Вычисление первообразных функции

Обозначение

$f(x)$ -функция

$F(x)$ – первообразная функции

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x)=f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)'=-\sin x$.

Теорема: Если $F(x)$– первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то функция $F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ на этом промежутке, где C –произвольная постоянная.

Таблица первообразных

№	Функция f(x)	Первообразная F(x)
1	к (где к – число)	к·x+C
2	x^p ($p \neq -1$)	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
3	$\frac{1}{x}$ (x>0)	$\ln x + C$
4	e^x	$e^x + C$
5	sinx	-cosx+C
6	cosx	sinx+C
7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$ctgx + C$

Правила нахождения первообразных

1) Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для функции $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ первообразная для $f(x)+g(x)$;
2) Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ и к- постоянная, то $к\cdot F(x)$ первообразная для $к\cdot f(x)$;
3) Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ и к,b – постоянные, причём $к\neq 0$, то $\frac{1}{к}\cdot F(кx+b)$- первообразная для $f(кx+b)$.

Пример 1: Вычислить первообразную $f(x)=14x^6$

$$F(x)=14\cdot\frac{x^{6+1}}{6+1}+C=\frac{14x^7}{7}+C=2x^7+C$$

$$f(x)=x^p,\ p\neq 0 \quad F(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$$

Пример 2: Вычислить первообразную $f(x)=x^4-3x^2+6x+7$

$$F(x)=\frac{x^{4+1}}{4+1}-3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+6\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}+\frac{7x^{0+1}}{0+1}+C=\frac{x^5}{5}-3\cdot\frac{x^3}{3}+6\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{7x^1}{1}+C=$$

$$=\frac{x^5}{5}-x^3+3x^2+7x+C$$

$$f(x)=x^p,\ p\neq 0 \quad F(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$$

Пример 3: Вычислить первообразную f(x)=17cos(12x-3)

$$F(x) = 17 \cdot \frac{1}{12}\sin(12x-3) + C = \frac{17}{12}\sin(12x-3) + C$$

$$f(kx+b) \qquad \frac{1}{k}F(kx+b)$$

$$f(x) = \cos x \qquad F(x) = \sin x + C$$

Пример 4: Вычислить первообразную

$$f(x) = \frac{34}{x^{10}} = 34x^{-10}$$

$$F(x) = 34 \cdot \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + C = \frac{34x^{-9}}{-9} + C = -\frac{34}{9x^9} + C$$

$$f(x) = x^p,\ p \neq 0 \quad F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$$

Пример 5: Вычислить первообразную

$$\text{f(x)}=6\sqrt{x}+20\sqrt[4]{x^3}=6x^{\frac{1}{2}}+21x^{\frac{3}{4}}$$

$$F(x)=6\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+21\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+C=\frac{6x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+21\cdot\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}+C=$$

$$=\frac{2\cdot 6x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{4\cdot 21x^{\frac{7}{4}}}{7}C=4x^{\frac{3}{2}}+12x^{\frac{7}{4}}+C$$

$$f(x)=x^p,\ p\neq 0$$

$$F(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$$

Задание 1:Найдите первообразные для функций:

$$f(x) = 2x^3 - 0,3;$$

$$f(x) = 5\sin(4x - 42);$$

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 0,11;$$

$$f(x) = 2\cos x - 5.$$

Пример 6: Для функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку М(3;4) .

Решение:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$$

Теперь подставим координаты точки $M(3;4)$ в общий вид первообразной.

$$F(3) = 4$$

$$\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 \cdot 3 + C = 4$$

$$C = -5$$

Тогда первообразная, график которой проходит через точку $M(3;4)$ имеет вид:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 5$$

Задание 2 :

а) Для функции $y = 6x^2 - 4x + 1$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку $A(1;-3)$.

б) Для функции $y = 2x^2 - 2x - 5$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку $A(2;-1)$.