Общая физика

Механика

Список вопросов на экзамен

- 1. Система отсчета. Материальная точка. Радиус-вектор и вектор перемещения, их связь с координатами точки. Траектория. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. Закон равноускоренного движения.
- 2. Движения тела по окружности. Угловая скорость, нормальное и тангенциальное ускорение. Движение по криволинейной траектории.
- 3. Инерциальные системы отсчета, первый закон Ньютона. Масса и импульс материальной точки. Сила. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Преобразования Галилея.
- 4. Замкнутая система материальных точек. Закон сохранения импульса. Момент импульса, закон сохранения момента импульса.

Список вопросов на экзамен

- 5. Работа и мощность силы. Консервативные силы, работа консервативных сил. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.
- 6. Упругие и квазиупругие силы. Закон Гука. Гармонические колебания: частота, период, амплитуда и фаза колебаний. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Гармонические колебания пружинного и математического маятников.
- 7. Затухающие колебания. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Энергия гармонических и затухающих колебаний.
- 8. Вынужденные колебания. Резонанс.

Система отсчета. Материальная точка. Радиус-вектор и вектор перемещения, их связь с координатами точки. Траектория. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. Закон равноускоренного движения.

- *Тело относительно, которого происходит определение положения рассматриваемого нами тела, называется телом отсчета.*

- *Совокупность тела отсчета, связанной с ним координатной системы и синхронизированных между собой часов образует систему отсчета*.

- *Тело размерами, которого можно пренебречь в условиях данной задачи называется материальной точкой.*

Кинематика. 1.3

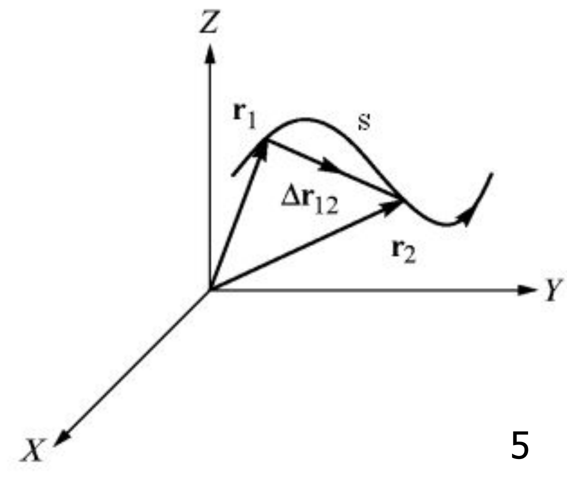
- *Тело размерами, которого можно пренебречь в условиях данной задачи называется материальной точкой.*

Положение материальной точки в пространстве можно определить с помощью радиус вектора.

- *Радиус вектор* **r** *– это вектор проведенный из начала координат системы отсчета в место где находится материальная точка в данный момент времени*

При движении радиус вектор материальной точки изменяется как по модулю, так и по направлению **r**(t).

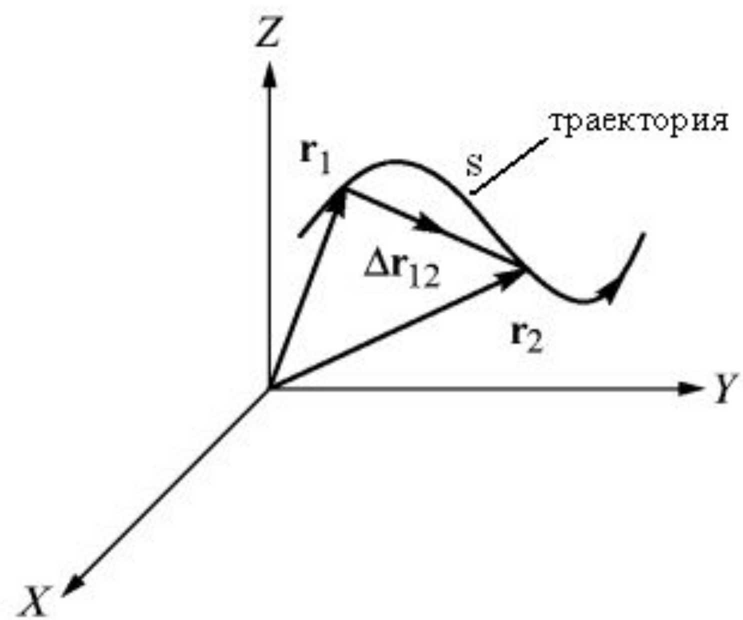
- *Геометрическое место концов радиуса вектора траекторией движения материальной точки*



Кинематика. 1.4

Пусть при своем движении материальная точка двигалась вдоль траектории из начального положения в конечное, тогда

- *Длина траектории называется путем s пройденным материальной точкой.*
- *Разница радиус векторов начального и конечного положений материальной токи называется перемещением* $\Delta \mathbf{r}_{12}$.

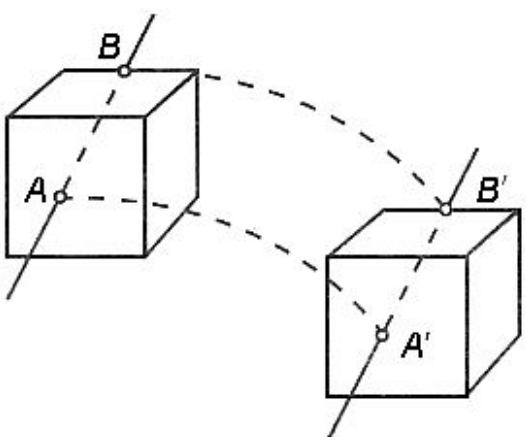


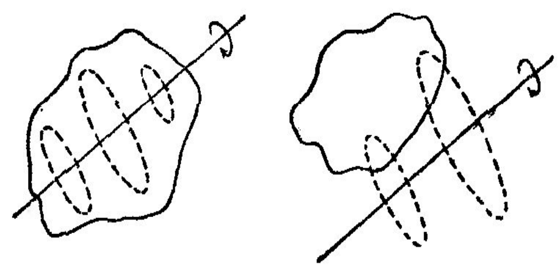
Кинематика. 1.5

Всякое движение можно разложить на два вида: поступательное и вращательное.

- *Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая связанная с движущимся телом остается параллельной самой себе.*
- *В случае вращательного движения все точки тела движутся по окружностям центры, которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения*.

Ось вращения может находиться и вне тела.





Кинематика. 1.6

При движении материальной точки за время Δt из начального положения в конечное ее перемещение составляет величину Δ**r.**

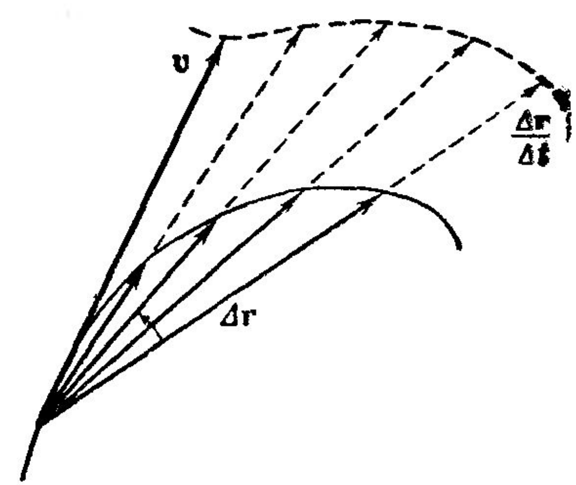
Тогда *отношение* Δr/Δt называют *средним вектором скорости* <**v**> *за время* Δt.

При стремлении Δt к нулю средний вектор скорости <**v**> стремится к определенному пределу – *этот предел называется скоростью материальной точки в данный момент времени* **v**.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Модуль вектора скорости **v** определяется следующим способом

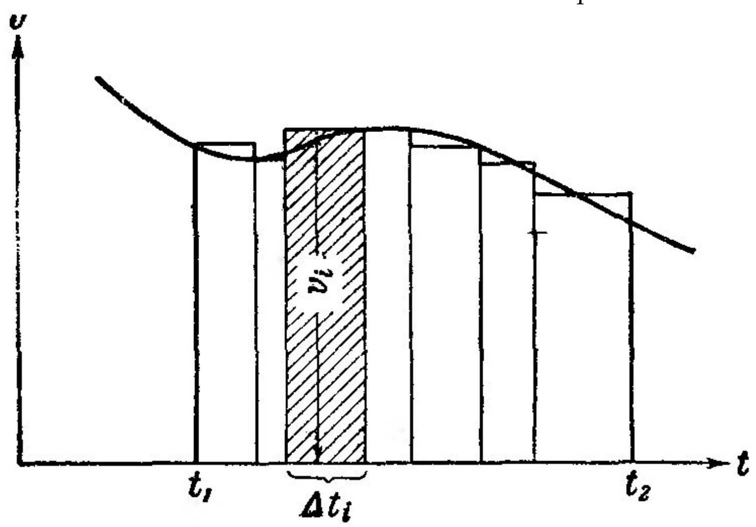
$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|d\mathbf{r}|}{dt}$$



Кинематика. 1.7

Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 равен определенному интегралу:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$



На графике зависимости модуля вектора скорости от времени пройденный путь графически изображается, как площадь под графиком между двумя моментами времени.

Кинематика. 1.8

Движение материальной точки характеризуется также ускорением. Вектор ускорения **w** определяет скорость изменения вектора скорости материальной точки со временем, т.е равен производной от вектора скорости по времени:

$$\mathbf{w} = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right| = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

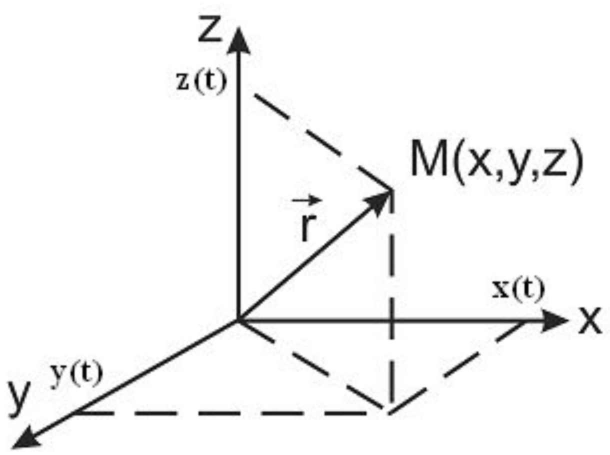
Прямолинейное движение с постоянным ускорением называется равнопеременным.

В зависимости от поведения скорости со временем различают *равномерно-ускоренное* и *равномерно-замедленно* движения.

Кинематика. 1.9

- Зная, проекции радиус вектора **r**(t) на оси X, Y, Z декартовой системы координат связанной с телом отсчета: x=x(t), y=y(t), z=z(t), можно получить координатное представление радиус вектора:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e_x} + y(t)\mathbf{e_y} + z(t)\mathbf{e_z}$$



Взяв производную по времени от выражения для радиус вектора, получим:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z\right) = \left(v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z\right)$$

Аналогично получаем координатное выражение для ускорения **w**

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{e}_z\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_z\right) = \left(w_x\mathbf{e}_x + w_y\mathbf{e}_y + w_z\mathbf{e}_z\right)$$

Кинематика. 1.10

Для полного решения задачи о движении материальной точки – определения ее скорости **v** и положения **r** в зависимости от времени – не достаточно знать зависимость **w**(t), еще необходимо знать и начальные условия.

Рассмотрим случай движения материальной точки с постоянным ускорением **w**=const.

$$\Delta \mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{w} dt = \mathbf{w} t \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} t$$

$$\Delta \mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{w} t^2/2 \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{w} t^2/2$$

Движения тела по окружности. Угловая скорость, нормальное и тангенциальное ускорение. Движение по криволинейной траектории.

Введем единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$, связанный с движущейся материальной точкой и направленный по касательной к траектории в сторону скорости. Вектор скорости $\mathbf{v}$ материальной точки направлен по касательной к траектории, поэтому его можно определить следующим образом:

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau}$$

Тогда ускорение материальной точки:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

После ряда преобразований получаем выражение для ускорения материальной точки

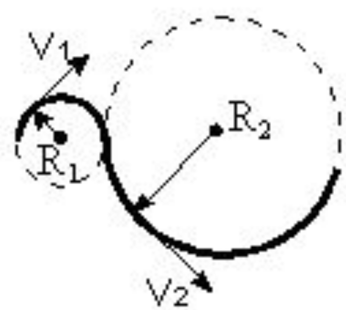
$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$$

Кинематика. 2.2

Первое слагаемое в этом выражении называется тангенциальным ускорением w_τ, второе нормальным w_n:

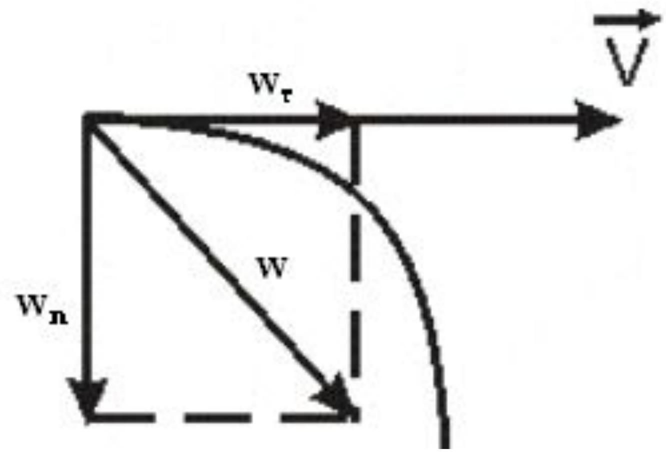
$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{R}$$

При стремлении начальной и конечной точек траектории друг к другу отрезок траектории между ними стремится к дуге окружности с центром в некоторой точке. *Эту точку называют центром кривизны траектории в данной точке*, а *радиус* R *соответствующей окружности - радиусом кривизны траектории в данной точке*



Кинематика. 2.3

Таким образом, полное ускорение **w** материальной точки может быть представлено как сумма двух векторов тангенциального и нормального ускорений. Один из, которых $\mathbf{w}_n$ перпендикулярен к вектору скорости **v**, а второй $\mathbf{w}_\tau$ направлен по касательной к траектории



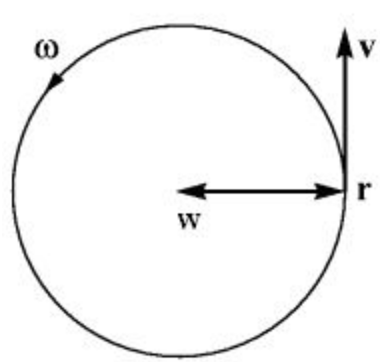
- Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине. Если скорость по величине не изменяется, тангенциальное ускорение равно нулю.
- Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Если направление скорости не изменяется, движение происходит по прямолинейной траектории.

Кинематика. 2.4

- Ускорение материальной точки, движущейся по произвольной кривой, также будет зависеть от кривизны траектории, которая в разных точках будет различна. Модуль полного ускорения

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=\sqrt{\dot{v}^2+\left(v^2/R\right)^2}$$

Предположим, что материальная точка движется вокруг неподвижной в данной системе отсчета оси по окружности радиуса r.



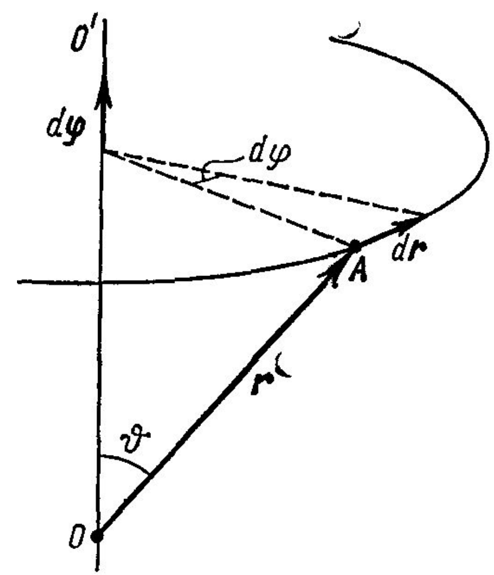
Кинематика. 2.5

- Соответствующий угол поворота будем характеризовать вектором d**φ**, модуль которого равен углу поворота, а направление совпадает с осью вращения, причем так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора d**φ**. Тогда элементарное перемещение материальной точки при таком повороте связано с углом поворота соотношением:

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{r}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

или в векторном виде:

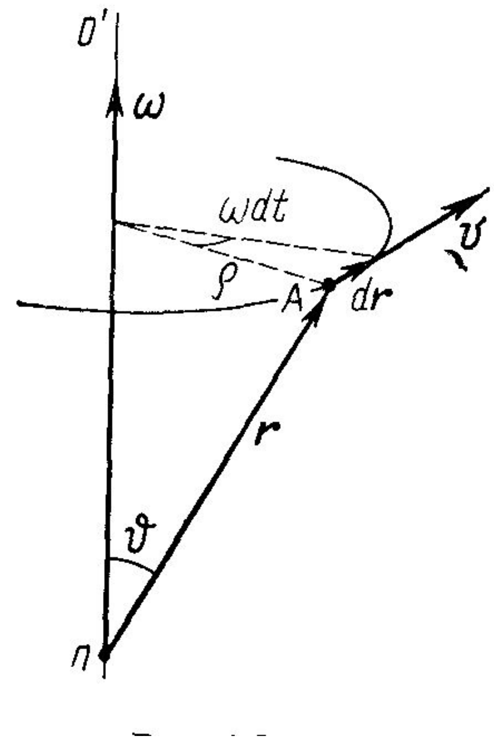
$$\mathrm{d}\mathbf{r} = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}]$$



Кинематика. 2.6

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

ω называется угловой скоростью тела. Вектор **ω** направлен вдоль оси, вокруг которой движется материальная точка, в сторону, определяемую правилом правого винта, и представляет собой аксиальный вектор.



Кинематика. 2.7

- при равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени. Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения T, *под которым понимают время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол* 2π. Поскольку промежутку времени T соответствует угол поворота 2π,

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

откуда период T равен:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Число оборотов в единицу времени ν, равно:

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Кинематика. 2.8

- Из предыдущего соотношения следует, что угловая скорость равна 2π, умноженное на число оборотов в единицу времени

$$\omega = 2\pi\nu$$

Вектор угловой скорости может изменяться, как по величине, так и по направлению. В первом случае изменяется значение вектора линейной скорости материальной точки, тогда как во втором случае изменяется ось вращения. Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуют величиной называемой угловым ускорением:

$$\boldsymbol{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Направление вектора **β** совпадает с направлением d**ω** – приращения вектора **ω**.

Кинематика. 2.9

- Зная радиус окружности, по которой движется материальная точка, угловую скорость, можно определить линейную скорость движения материальной точки по окружности. Для этого разделим в формуле, определяющей перемещения материальной точки, левую и правую части на dt. Так как d**r**/dt=**v** и d**φ** /dt=**ω**, то

$$\mathbf{v} = \left[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}\right]$$

Продифференцировав выражения связывающее угловую и линейную скорости найдем полное ускорение материальной точки

$$\mathbf{w} = \left[d\boldsymbol{\omega}/dt, \mathbf{r}\right] + \left[\boldsymbol{\omega}, d\mathbf{r}/dt\right]$$

$$\mathbf{w} = \left[\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}\right] + \left[\boldsymbol{\omega}, \left[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}\right]\right]$$

Кинематика. 2.10

- В рассматриваемом случае ось вращения неподвижна, поэтому вектор $[\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}]$ представляет собой тангенциальное ускорение

Вектор $\left[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]\right]$ - это нормальное ускорение w_n.
Модули этих ускорений равны:

$$|\mathbf{w}_\tau| = \beta \mathrm{r}; \qquad |\mathbf{w}_\mathrm{n}| = \omega^2 \mathrm{r}$$

Окончательно получаем модуль полного ускорения:

$$\mathrm{w} = \sqrt{\mathrm{w}_\tau^2 + \mathrm{w}_n^2} = \mathrm{r}\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$$

Инерциальные системы отсчета, первый закон Ньютона. Масса и импульс материальной точки. Сила. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Преобразования Галилея.

- Классическая динамика основана на трех законах сформулированных Ньютоном. Классическая ньютоновская динамика (механика) описывает обширный круг явлений. Однако существуют границы ее применимости. Классическая динамика применима при скоростях на много меньших скоростей света 3 10^8 м/с и на расстояниях значительно больших атомных 10^{-13}см.

Первый закон Ньютона формулируется следующим образом*:*

всякое тело находится в состоянии покоя или равномерно и прямолинейно движется, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Оба этих состояния характеризуются тем, что ускорение тела равно нулю. Формулировке первого закона можно придать следующий вид: *скорость любого тела остается постоянной, пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменение*

Динамика. 3.2

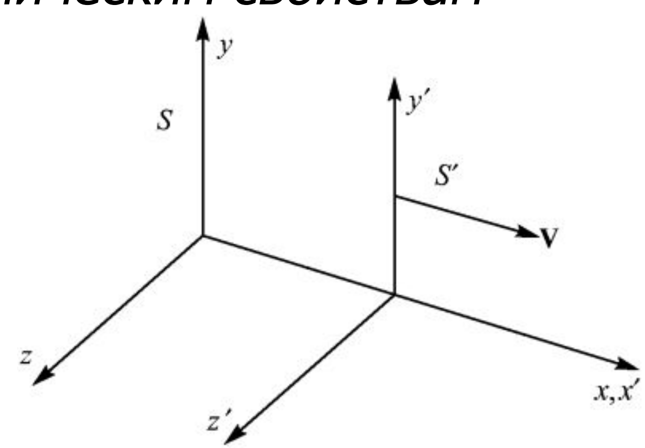
- *Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется инерциальной*.
- *Система отсчета в которой первый закон Ньютона не выполняется называется неинерциальной системой отсчета*.

Любая система, движущаяся относительно инерциальной системы отсчета прямолинейно и равномерно тоже будет инерциальной.

Для инерциальных систем справедлив

- *принцип относительности, согласно которому все инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу*.

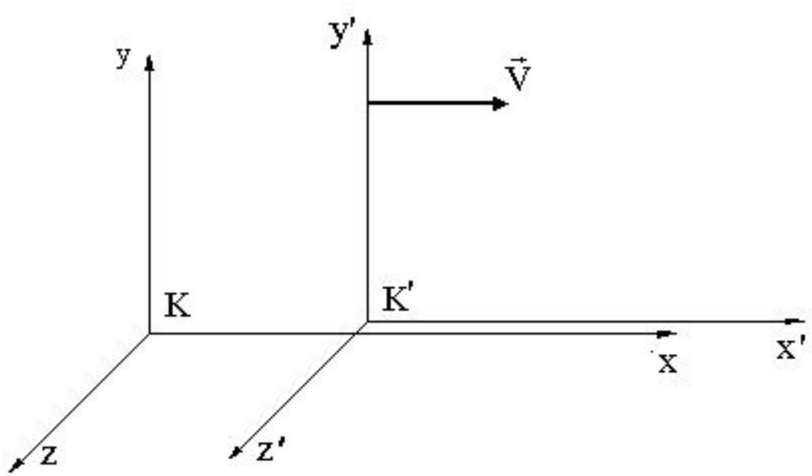
Данное утверждение составляет содержание принципа *относительности Галилея*.



Динамика. 3.3

- Пусть инерциальная система К′ движется со скоростью **V** относительно другой инерциальной системы К. Выберем оси координат x′, y′, z′ К‵-системы параллельно соответствующим осям x, y, z К-системы так, чтобы оси x′ и x совпадали между собой и были направлены вдоль вектора **V**. Взяв за начало отсчета времени момент, когда начала координат *O*′ и *O* совпадали, запишем соотношение между радиус-векторами **r**′ и **r** одной и той же материальной точки в К′- и К-системах:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{V}t$$



и, кроме того,

$$t'=t$$

Динамика. 3.4

Подразумевается, что длина отрезков и ход времени не зависят от состояния движения и, следовательно, одинаковы в обеих системах отсчета. В координатах *преобразования Галилея* имеют вид:

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t.$$

Продифференцировав по времени преобразования Галилея, найдем классический закон преобразования скорости материальной точки при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$$

Дифференцируя это выражение по времени с учетом того, что $\mathbf{V} = const$, получаем $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$, т.е. ускорение точки одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Динамика. 3.5

В динамике рассматривается движение материальной точки в связи с теми причинами (взаимодействиями), которые обуславливают тот или иной характер движения.

- *Влияние другого тела или тел, вызывающее ускорение тела (изменение скорости), называют силой* .

Опыт показывает, что всякое тело оказывает сопротивление при любых попытках изменить его скорость – как по модулю, так и по направлению.

- *Свойство, выражающее степень сопротивления тела изменению его скорости, называют инертностью*.
- *Мерой инертности служит величина, называемая массой*

Динамика. 3.6

- Понятие массы m, вводится по определению отношений масс двух различных тел по обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными силами:

$$m_1 / m_2 = w_2 / w_1$$

В рамках ньютоновской механики масса обладает следующими двумя важнейшими свойствами:

1) масса – величина аддитивная, т.е. масса составного тела равна сумме масс его частей;

2) масса тела как такового – величина постоянная, не изменяющаяся при его движении.

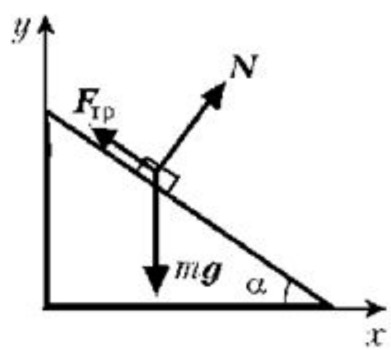
Динамика. 3.7

- *Второй закон Ньютона формулируется следующим образом: ускорение всякого тела прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе тела.*

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Опыт показывает, что если на тело действуют несколько сил, то результирующая сила **F** определяется следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots,$$



Динамика. 3.8

Во всех случаях, когда в опытах участвуют два тела A и B и тело A сообщает ускорение телу B, обнаруживается, что и тело B сообщает ускорение телу A. Отсюда мы заключаем, что действия тел друг на друга имеют характер взаимодействия. Ньютон постулировал общее свойство всех сил взаимодействия третьим законом Ньютона:

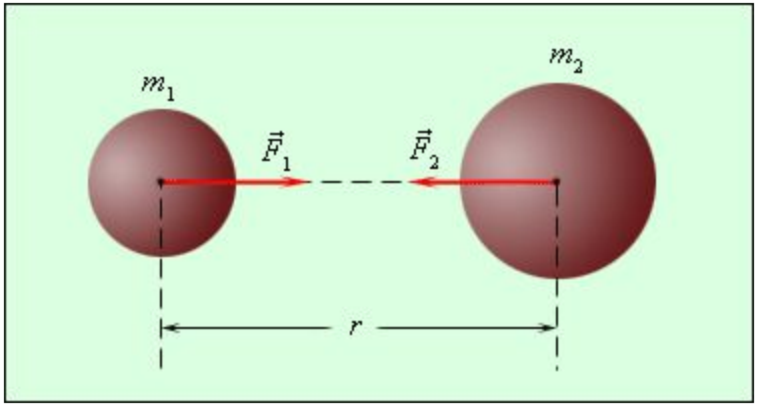
- *силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки,* т.е.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Чтобы свести нахождение закона движения частицы к чисто математической задаче, необходимо, прежде всего, знать зависимость силы от определяющих ее величин. Такие зависимости являются следствием обобщения результатов опыта. Наиболее часто встречаемые силы это гравитационные, электрические, сила упругости, сила трения скольжения, однородная сила тяжести.

Динамика. 3.9

Сила гравитационного притяжения, действующая между двумя телами в соответствии с законом всемирного тяготения имеет вид:



$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где γ – гравитационная постоянная.
r – растояние между центрами масс тел.

Динамика. 3.10

Кулоновская сила действующая между двумя точечными зарядами q_1 и q_2

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

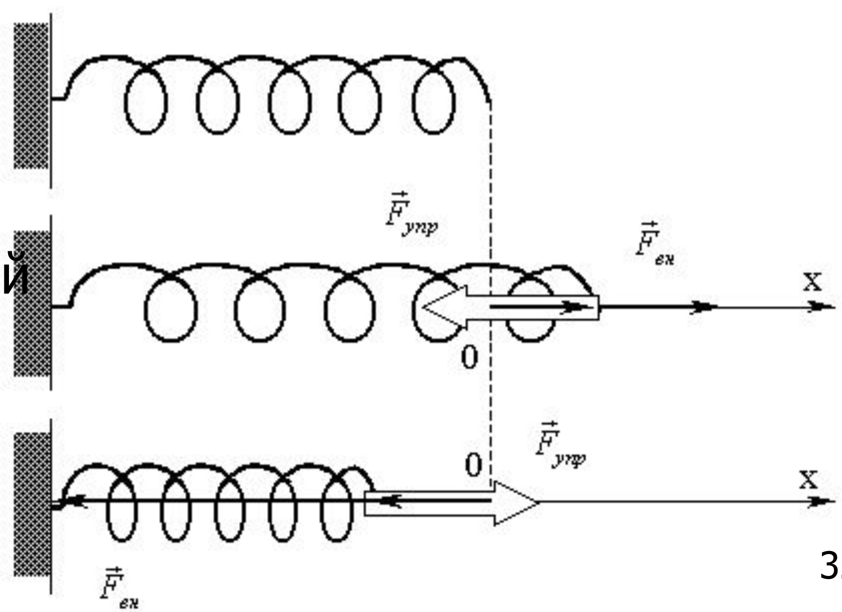
где r – расстояние между зарядами

k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Упругая сила – сила, *пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия*

и направленная к положению

равновесия: $\mathbf{F}_{упр} = -\chi\mathbf{r}$,



где **r** – радиус-вектор, характеризующий смещение материальной точки из положения равновесия;

χ – положительный коэффициент, зависящий от упругих свойств среды.

Динамика. 3.11

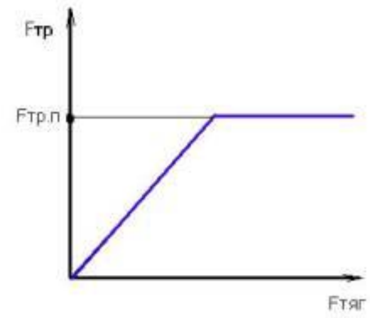
Сила трения скольжения, возникающая при скольжении данного тела по поверхности другого тела:,

$$F=kN$$

где k – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей;

N – сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

Сила **F** направлена в сторону противоположную направлению движения данного тела относительно другого

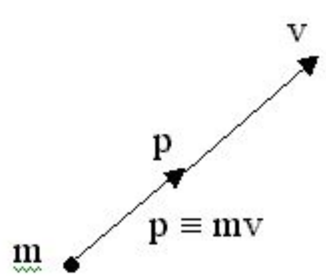


Замкнутая система материальных точек. Закон сохранения импульса. Момент импульса, закон сохранения момента импульса.

Любое тело или совокупность тел представляет собой систему материальных точек. Для описания системы материальных точек необходимо знать закон движения каждой материальной точки системы, т.е. знать зависимость координат и скоростей каждой материальной точки от времени. Оказывается, есть общие принципы, которые можно применить к описанию системы в целом. Это законы сохранения. Существуют такие величины, которые обладают свойством сохраняться во времени. Среди этих величин наиболее важную роль играют энергия, импульс и момент импульса. Эти три величины имеют важное общее свойство аддитивности: их значения для системы, равно сумме значений для каждой из частей системы в отдельности.

По определению, импульс материальной точки:

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$$



где m и v – ее масса и скорость.

Законы сохранения. 4.2

Воспользовавшись определением импульса, запишем второй закон Ньютона в иной форме:

$$m\mathbf{w}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}$$

т.е. *производная импульса материальной точки по времени равна результирующей всех сил действующих на материальную точку*. Например если **F**=0 то **p**=*const*.

Это уравнение позволяет найти приращение импульса материальной точки за любой промежуток времени, если известна зависимость силы **F** от времени:

$$\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1=\int_0^t \mathbf{F}dt$$

Таким образом, приращение импульса частицы за любой промежуток времени зависит не только от значения силы, но и от продолжительности ее действия

Законы сохранения. 4.3

Материальные точек, входящие в систему могут взаимодействовать, как между собой, так и с другими телами не входящими в систему. В соответствие с этим

- *силы взаимодействия между материальными точками системы называются внутренними,*
- *а силы обусловленные взаимодействием с телами не входящими в систему называются внешними*.
- *В случае если на систему не действуют внешние силы, она называется замкнутой*.

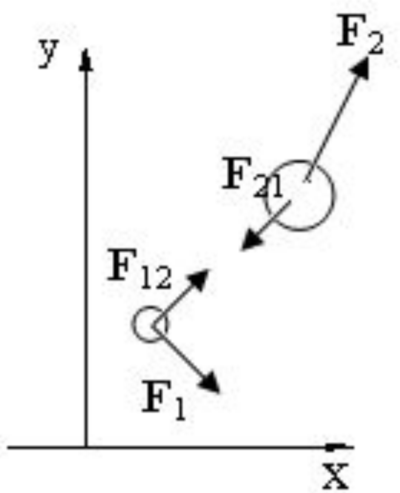
Импульс системы определим, как векторную сумму импульсов ее отдельных частей:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$$

Законы сохранения. 4.4

Рассмотрим импульс системы состоящей из двх материальных точек. Тогда импульс такой системы равен $\mathbf{p}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$. Напишем для каждой материальной точки второй закон Ньютона:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}=\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_1, \qquad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}=\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_2$$



Сложим эти два уравнения вместе. Сумма внутренних сил будет равна нулю (по третьему закону Ньютона, $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$), вследствие чего получим:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$$

Законы сохранения. 4.5

Если на систему не действуют внешние силы то получается, что

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

следовательно для замкнутой системы **p** постоянен.

Аналогичные рассуждения можно обобщить и на систему из N материальных точек. Закон сохранения импульса формулируется следующим образом:

импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

Импульс остается постоянным и для не замкнутой системы *при условии, что внешние силы, действующие на материальные точки системы, в сумме дают ноль. Даже если сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторую ось равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось будет оставаться постоянной*.

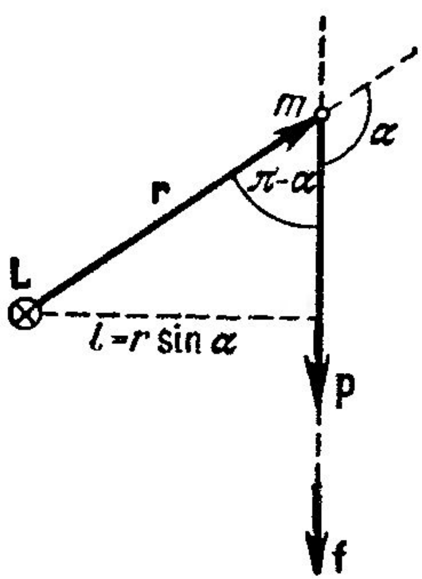
Законы сохранения. 4.6

- Момент импульса относительно точки *O* равен:

$$\mathbf{L}=[\mathbf{r},\mathbf{p}]=m[\mathbf{r},\mathbf{v}]$$

где **r** – радиус-вектор, проведенный из точки *O* в ту точку пространства, в которой находится материальная точка. Из этого определения следует, что **L** является аксиальным вектором. Его направление выбрано так, что вращение вокруг точки *O* направлении вектора **p** и вектор **L** образуют правовинтовую систему. Модуль вектора **L** равен:

$$L=rp\sin\alpha=lp$$



где α – угол между **r** и **p**, $l=r\sin\alpha$ – плечо вектора **p** относительно точки *O*

Законы сохранения. 4.7

- Момент импульса материальной точки может изменяться со временем, продифференцировав выражение для момента импульса, можно определить причину вызывающую изменение момента импульса

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[d\mathbf{r}/dt, \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r}, d\mathbf{p}/dt \right]$$

Первое слагаемое в правой части равенства обращается в ноль так, как d**r**/dt=**v**, а скорость параллельна импульсу **p**. Далее, согласно второму закону Ньютона, d**p**/dt=**F**, получаем:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[\mathbf{r}, \mathbf{F} \right]$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения, называют моментом силы **F** относительно точки *O*. Обозначим ее буквой М:

Законы сохранения. 4.8

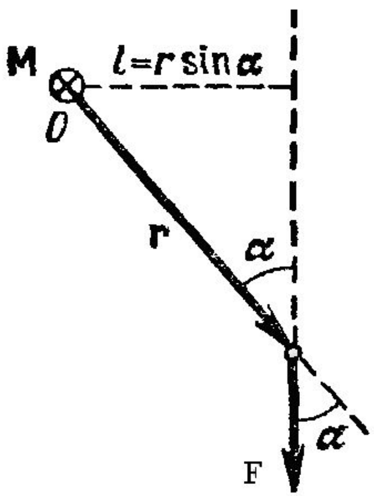
$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

Модуль этого вектора равен

$$M = lF.$$

Таким образом производная от момента импульса относительно некоторой точки О равна моменту М равнодействующей силы относительно той же точки О

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$



Это уравнение называют уравнением моментов. Из уравнения моментов, в частности, следует, что если **M**=0, то **L**=*const*. Другими словами, если относительно некоторой точки О выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю в течение интересующего нас промежутка времени, то относительно этой точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого времени.

Законы сохранения. 4.9

Для определения приращения момента импульса частицы относительно точки *O* за любой промежуток времени, если известна зависимость от времени момента силы необходимо проинтегрировать выражение d**L**=**M**dt. В результате найдем приращение вектора L за конечный промежуток времени t:

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_0^t \mathbf{M}\mathrm{d}t$$

Момент импульса системы - векторная сумма моментов импульсов ее отдельных частиц:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$$

Подобно тому, как это делалось для импульса системы. Рассмотрим случай системы состоящей из двух материальных точек.

Законы сохранения. 4.10

Момент внутренней силы действующей на 1 частицу со стороны второй обозначим $\mathbf{M}_{12}$, результирующий момент внешних сил действующих на эту частицу $\mathbf{M}_1$. Аналогично введем обозначения и для второй материальной точки $\mathbf{M}_{21}$ и $\mathbf{M}_2$. Тогда уравнения моментов для материальных точек системы будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_1=\mathbf{M}_{12}+\mathbf{M}_1, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{L}_2=\mathbf{M}_{21}+\mathbf{M}_2$$

Сложив эти выражения получим:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)=\mathbf{M}_{12}+\mathbf{M}_{21}+\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$$

Рассмотрим сумму двух первых слагаемых в правой части :

$$\mathbf{M}_{12}+\mathbf{M}_{21}=\left[\mathbf{r}_1,\mathbf{F}_{12}\right]+\left[\mathbf{r}_2,\mathbf{F}_{21}\right]=\left[\mathbf{r}_1,\mathbf{F}_{12}\right]-\left[\mathbf{r}_2,\mathbf{F}_{12}\right]=\left[\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{F}_{12}\right]=\left[\mathbf{r}_{12},\mathbf{F}_{12}\right]=0$$

Законы сохранения. 4.11

Радиус-вектор $\mathbf{r}_{12}$ коллинеарен силе $\mathbf{F}_{12}$, поэтому векторное произведение этих двух векторов равно нулю. Таким образом, получаем:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}$$

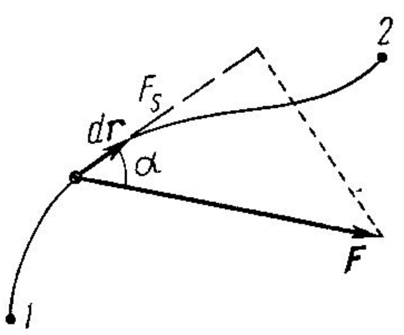
Данное соотношение можно обобщить на систему из произвольного числа материальных точек. Следовательно, получаем, что изменение момента импульса системы обусловлено действием на нее момента внешних сил. Если же внешние силы не действуют, то момент импульса остается постоянным. Таким образом, мы пришли к закону сохранения момента импульса:

момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

Пусть на материальную точку действует сила **F**, и под действием этой сила произошло перемещение по некоторой траектории из точки 1 в точку 2. В общем случае сила **F** меняется в процессе движения.

- *Действие силы* **F** *на перемещении* d**r** *характеризуют величиной, равной скалярному произведению* **F**d**r**, *эту величину называю работой силы* **F** *на перемещении* d**r**:

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = F\cos\alpha\, ds = F_s ds$$



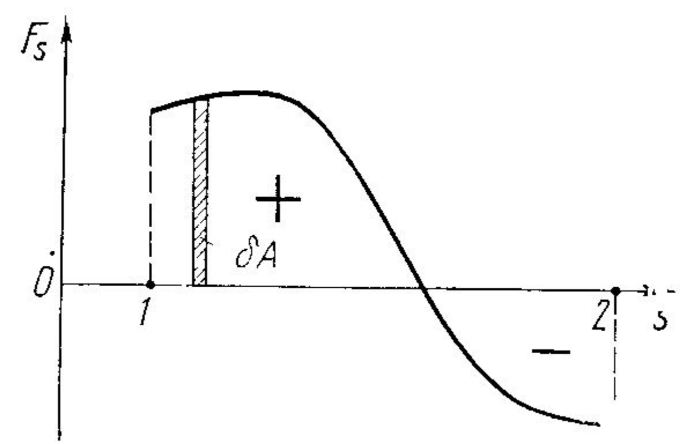
где α – угол между вектором силы и перемещения, ds – элементарный отрезок пути, F_s – проекция вектора силы на перемещение.

Законы сохранения. 5.2

- Работа A – величина алгебраическая: в зависимости от угла между силой и перемещением работа может быть как положительной, отрицательной так и равной нулю. Если же необходимо определит работу, совершенную силой F на всей траектории необходимо вычислить интеграл:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 F_s ds$$

Построив график зависимости проекции силы Fs от положения материальной точки (s) на траектории. Можно придти к выводу, что графически элементарная работа dA будет выглядеть как площадь под графиком между двумя точками. При этом площадь над осью s будет положительной, а под ней отрицательной.



Законы сохранения. 5.3

На практике часто имеет значение не само значение работы, а то время, за которое данная работа была выполнена. Поэтому вводится

- *величина, характеризующая работу, совершаемую в единицу времени – мощность*.

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Если работа, совершаемая за одинаковые промежутки времени не одинакова то можно определить мгновенную мощность:

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$$

Пусть за время dt точка получает перемещение dr. Тогда элементарная работа равна dA=Fdr и мощность можно представить в виде:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v}$$

Законы сохранения. 5.4

- Если в каждой точке пространства на помещенную туда материальную точку действует сила, то говорят, что материальная точка находится в *поле сил*.

  Поле, остающееся постоянным во времени, называют стационарным.

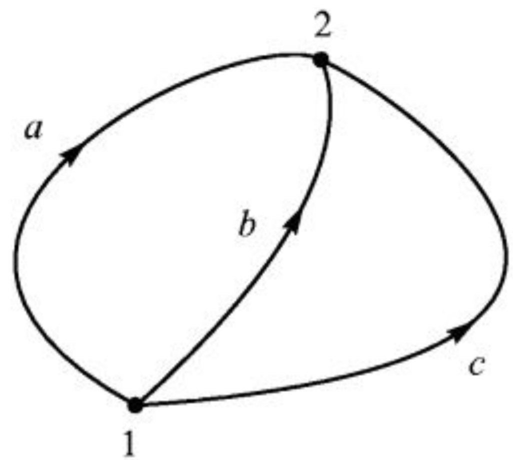
  Стационарные силовые поля, в которых работа не зависит от пути между точками 1 и 2, называют консервативными.

  Силы, не являющиеся консервативными, называют неконсервативными.

  Силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами и направленные по прямой, проходящей через эти частицы называют центральными

Законы сохранения. 5.5

Тот факт, что работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положения материальной точки, дает возможность сопоставить полю некоторую функцию координат(радиус-вектора) U(**r**).



$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = U_1 - U_2$$

Таким образом, *работа сил поля на пути 1-2 равна убыли потенциальной энергии материальной точки в данном поле*.

Законы сохранения. 5.6

Для этого достаточно вычислить работу, совершаемую силами поля на любом пути между точками, и представить ее в виде убыли некоторой функции, которая и есть потенциальная энергия U(r). Именно так и были получены работы в полях упругой, гравитационной и кулоновской сил

В поле упругой силы:

$$U(r) = \frac{kr^2}{2}$$

В кулоновском поле материальной точки:

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}$$

В однородном поле силы тяжести:

$$U(z)=mgz$$

Законы сохранения. 5.7

При перемещении материальной точки из одной точки поля консервативных сил в другую работа сил поля равна убыли потенциальной энергии. В случае элементарного перемещения получим:

$$\mathbf{F}d\mathbf{r}=-dU$$

Так как $\mathbf{F}d\mathbf{r}=F_s ds$ имеем: $F_s ds=-dU$ Отсюда: $F_s = -\dfrac{\partial U}{\partial s}$

В декартовых координатах это соотношение имеет вид:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{k}\right)$$

Величину, стоящую в скобках, называют градиентом скалярной функции U и обозначают grad U или ∇U

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

Законы сохранения. 5.8

- Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила при элементарном перемещении dr

$$d\mathbf{A}=\mathbf{F}d\mathbf{r}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}d\mathbf{r}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}dt\mathbf{v}=m\mathbf{v}d\mathbf{v}=mvdv=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Отсюда видно, что работа результирующей силы F идет на приращение некоторой величины, которую называют *кинетической энергией*:

$$T=\frac{mv^2}{2}$$

Таким образом, при конечном перемещении из точки 1 в точку 2:

$$T_2\text{-}T_1=A_{12}$$

приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на материальную точку на том же перемещении.

Законы сохранения. 5.9

Результирующая всех сил может быть представлена как

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_{конс.}+\mathbf{F}_{стор.}$$

Тогда работа этих сил идет на приращение кинетической энергии:

$$A_{конс.}+A_{стор.}$$

Так же работа сил консервативного поля равна убыли потенциальной энергии

$$A_{конс.}=-\Delta U.$$

В итоге получаем:

$$\Delta T=-\Delta U+A_{стор.}$$

$$\Delta(T+U)=A_{стор.}$$

Из этого соотношения видно, что работа сторонних сил идет на приращение величины

$$T+U.$$

Эту величину – *сумму кинетической и потенциальной энергий – называют полной механической энергией материальной точки и обозначают* E.

Законы сохранения. 5.10

Полная механическая энергия, как и потенциальная, определяется с точностью до произвольной постоянной.

Изменение полной механической энергии материальной точки обусловлено совершением над ней работы сторонними силами. Отсюда непосредственно следует закон сохранения механической энергии: *если сторонние силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы в течении интересующего нас времени, то полная механическая энергия частицы в стационарном поле консервативных сил остается постоянной за это время*.

$$\mathrm{E}=\mathrm{T}+\mathrm{U}=const$$

Если же рассматривать не одну материальную точку, а систему, то помимо потенциальной энергии во внешнем поле сил необходимо также учитывать энергию взаимодействия между отдельными материальными точками системы

$$\mathrm{E}_2-\mathrm{E}_1=\mathrm{A}^{дис.}_{внеш.}+\mathrm{A}_{внутр}$$

Механическая энергия замкнутой системы, в которой не действуют диссипативные силы, сохраняется в процессе движения т.е

$$\mathrm{E}=\mathrm{T}+\mathrm{U}_{соб.}=const$$

Лекция 6
Упругие и квазиупругие силы. Закон Гука. Гармонические колебания: частота, период, амплитуда и фаза колебаний. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Гармонические колебания пружинного и математического маятников.

- *Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости*.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания и вынужденные колебания.

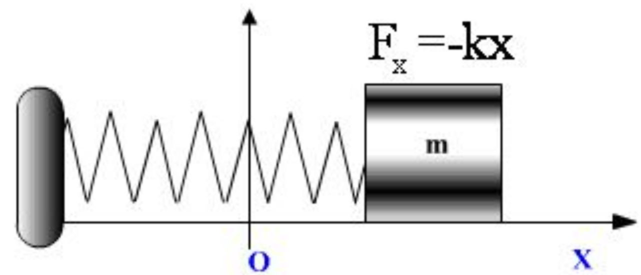
- *Свободными называют такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок либо она была выведена из положения равновесия*.
- *Вынужденными называют такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы*.

Простейшим примером по характеру описания являются *гармонические колебания*. *Это такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса*.

Колебания. 6.2

- Простейшим примером системы, где возникают свободные гармонические колебания, является движение тела под действием силы упругости пружины.

Примером такой системы является тело массы *m*, прикрепленное к пружине жесткостью *k*, движущееся по горизонтальной поверхности без трения. В этом случае *x* – растяжение пружины (смещение тела из положения равновесия).



Начало координат выбирается в точке, соответствующей положению конца нерастянутой пружины, поэтому $x = l - l_0$ – растяжение пружины. Если *силы вида*

$$F_x = -kx$$

имеют другую природу (т.е. не являются силами упругости) то их называют квазиупругими. В этом случае k – коэффициент квазиупругой силы.

Колебания. 6.3

Напишем второй закон Ньютона, в проекции на ось x, для этой системы

$$F_x = mw_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания данной системы:

$$m\ddot{x}=-kx$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

получим окончательный вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего гармонические колебания:

$$\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Колебания. 6.4

Решение данного уравнения имеет вид:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия называется амплитудой колебаний A.

Величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$ стоящая под знаком косинуса, называется начальной *фазой колебания*.

Величину ω_0 называют циклической или круговой частотой колебаний.

Промежуток времени T, за который фаза колебаний изменится на 2π, называется *периодом колебания*. Он определяется из следующего условия

$$(\omega_0(\mathrm{t}+\mathrm{T}) + \varphi_0) = (\omega_0 \mathrm{t} + \varphi_0) + 2\pi$$

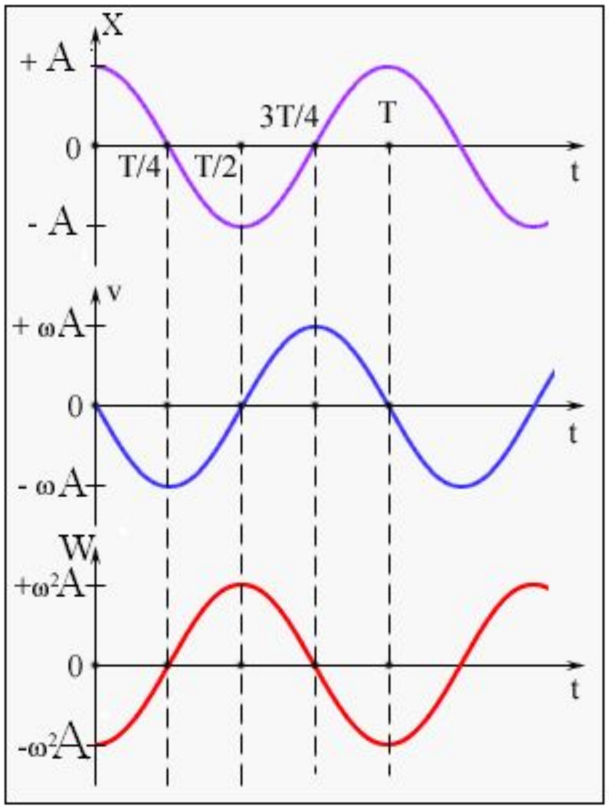
$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебания ν.

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{T}}$$

Колебания. 6.5

Продифференцировав зависимость смещения от времени x(t) получим выражение для зависимости скорости от времени. Взяв вторую производную, получим зависимость ускорения от времени:



$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$w = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

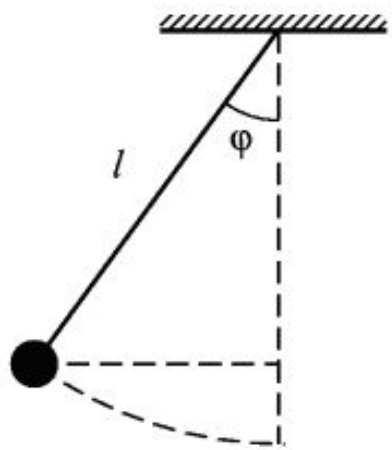
Как следует из этих соотношений ускорение, и смещение находятся в противофазе. Т.е. в тот момент, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего отрицательно значения, и наоборот.

Колебания. 6.6

Другим примером колебательной системы может служить математический маятник.

- *Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из легкой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.*

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.



В такой системе при малых углах отклонения нити происходят гармонические колебания. В этом случае собственная частота

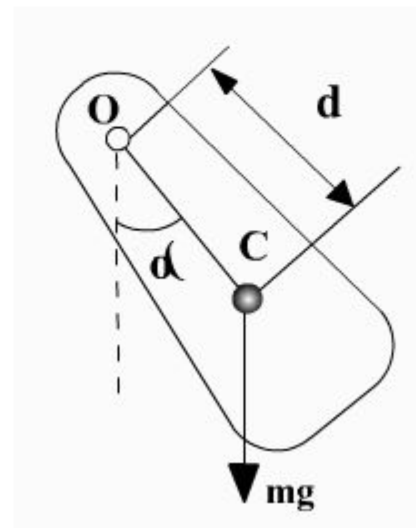
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

период $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Колебания. 6.7

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции.

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия E состоит только из потенциальной, которая достигает своего максимального значения U_{max}:



$$E = U_{max} = \frac{kA^2}{2}$$

Колебания. 6.8

При прохождении же системы через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения T_{max}:

$$E = T_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Определим, как изменяется со временем кинетическая и потенциальная энергии гармонических колебаний. Кинетическая энергия в произвольный момент времени равна:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

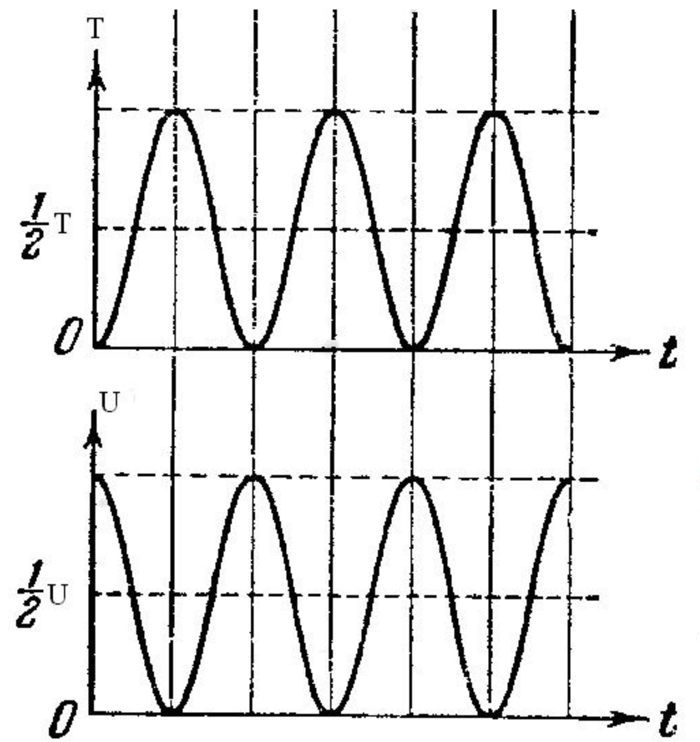
Потенциальная энергия выражается формулой:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Колебания. 6.9

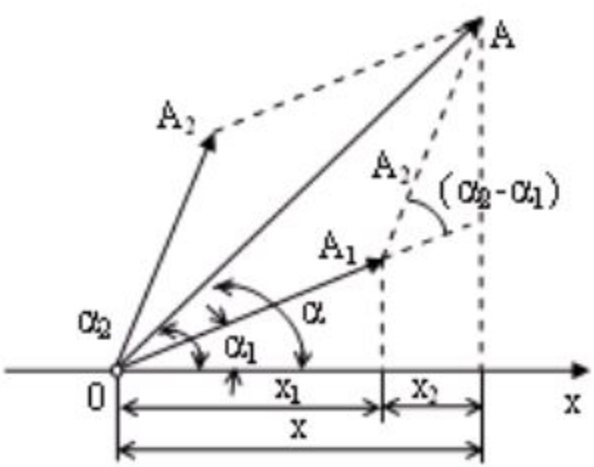
- Сложив вместе кинетическую и потенциальную энергии, получим формулу для полной энергии:

$$E = U + T = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = const$$

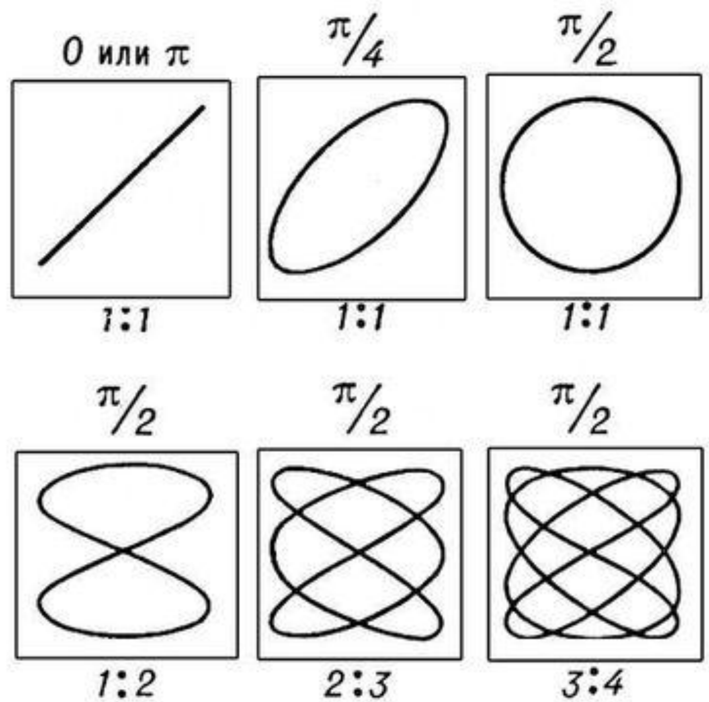


Колебания. 6.10

- Сложение колебаний одного направления



Сложение перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.



Лекция 7
Затухающие колебания. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания. Энергия гармонических и затухающих колебаний.

При движении тела в среде последняя всегда оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. При этом энергия движущегося тела, в конце концов, переходит в тепло. В таких случаях говорят, что имеет место *диссипация* энергии. если движение тела в среде достаточно медленное по сравнению со скоростью внутренних диссипативных процессов, то реакция среды на движение тела в некоторых случаях может быть приближенно описана введением так называемой силы трения, действующей на тело и зависящей лишь от скорости последнего. Такая ситуация возникает, например, при движении тела в вязкой среде, жидкости или газе.

В ряде случаев можно считать, что сила сопротивления пропорциональна величине скорости

$$F_{сопр.} = -r\dot{x}$$

Колебания. 7.2

Уравнение второго закона Ньютона для пружинного маятника в присутствие сил сопротивления имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

Перепишем его следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Где применены следующие обозначения:

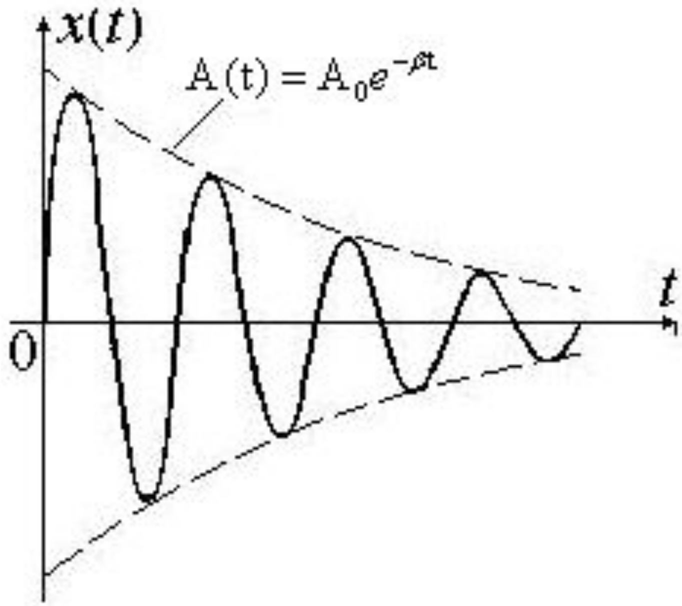
$$2\beta = \frac{r}{m}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

ω_0 представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при $r=0$. Наличие сопротивления среды приводит к тому, что размах колебаний уменьшается. Поэтому в зависимости смещения от времени амплитуда колебаний должна изменяться.

Колебания. 7.3

При небольшой силе трения полученное выше дифференциальное уравнение имеет следующее решение:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$



Колебания. 7.4

В соответствии с видом функции движение системы можно рассматривать как гармонические колебания частоты ω с амплитудой, изменяющейся во времени по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = \dfrac{r}{2m}$ которую называют коэффициентом затухания.

Найдем время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз.

По определению $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$ откуда $\beta\tau=1$.

Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в *e* раз. Период затухающих колебаний равен:

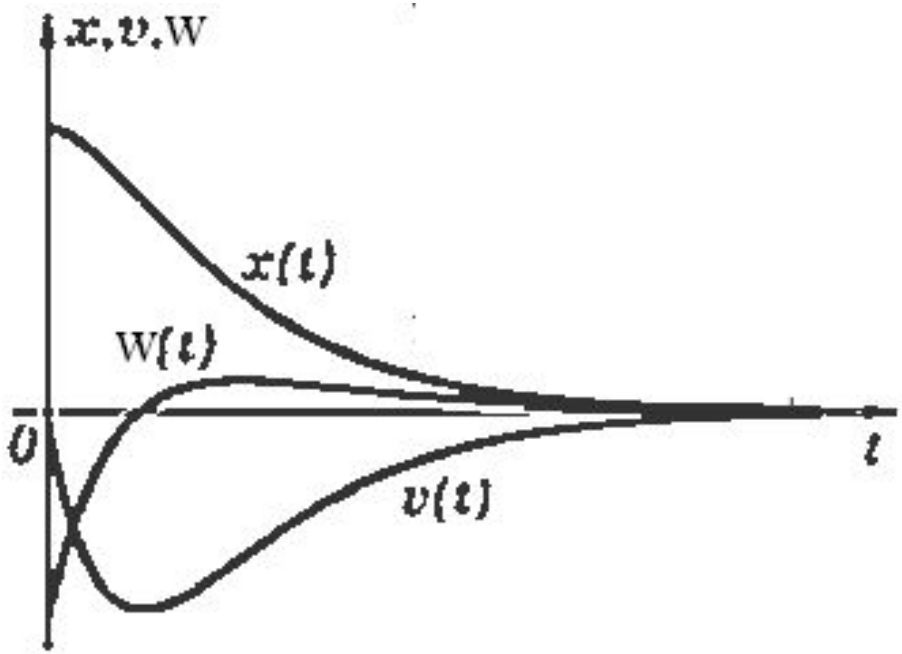
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Колебания. 7.5

- Видно, что период затухающих колебаний больше, чем период незатухающих колебаний с теми же параметрами колебательной системы. При незначительном сопротивлении среды $(\beta^2 \ll \omega_0^2)$, период колебаний практически равен $T_0 = 2\pi / \omega_0$. С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается. При приближении коэффициента затухания(сопротивления среды) к величине равной ω_0 период колебаний становится равным бесконечности и колебания становятся апериодическими – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Запас механической энергии тела к моменту его возвращения в положение равновесия полностью расходуется на преодоление трения.

Колебания. 7.6

Апериодические колебания



Колебания. 7.7

Последующие наибольшие отклонения в какую-либо сторону (например A′, A″, A‴ и т.д.) образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если

$$A' = A_0 e^{-\beta t}, \text{ то}$$

$$A'' = A_0 e^{-\beta(t+T)} = A' e^{-\beta T}, \quad A''' = A_0 e^{-\beta(t+2T)} = A'' e^{-\beta T}$$

Вообще, отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

Это отношение называют декрементом затухания, а его логарифм – логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

Колебания. 7.8

Выразив β через λ и Т, закон убывания амплитуды можно записать в виде:

$$A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}$$

За время τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз, система успевает совершить $N_e = \tau/T$ колебаний. Из условия $e^{-\lambda\frac{\tau}{T}} = e^{-1}$ получается, что $\lambda\frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$

Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в *e* раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$$

называемая *добротностью* колебательной системы. Как видно из ее определения, добротность пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых системой за то время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз.

Колебания. 7.9

Найдем импульс системы, совершающей затухающие колебания. Продифференцировав зависимость, смещение в затухающих колебаниях по времени и умножив полученный результат на массу m, получим:

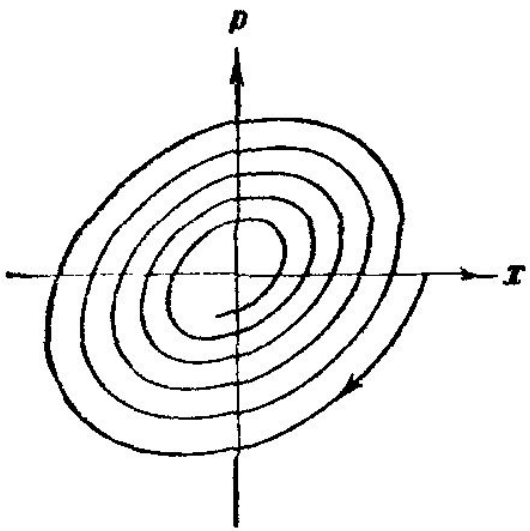
$$p = m\dot{x} = -\mathrm{m}\mathrm{A}_0 e^{-\beta \mathrm{t}} \left[\beta \cos(\omega \mathrm{t} + \varphi_0) + \omega \sin(\omega \mathrm{t} + \varphi_0) \right]$$

Это выражение может быть преобразовано к виду

$$p = p_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \psi)$$

Если бы не множитель $e^{-\beta t}$ то, исключив t из этих уравнений, мы получили бы в координатах x и p уравнение эллипса, повернутого по отношению к координатным осям. Наличие экспоненциального множителя приводит к тому, что эллипс превращается в скручивающуюся спираль. Эта спираль и представляет собой фазовую траекторию затухающего колебания. Она будет наклонена по отношению к координатным осям тем сильнее, чем больше коэффициент затухания

Колебания. 7.10



При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнять эту убыль энергии, колебания станут незатухающими. Пополнение энергии системы может осуществляться за счет толчков извне, однако эти толчки должны сообщаться системе в такт с ее колебаниями, иначе они могут уменьшить колебания системы и даже прекратить их совсем.

Можно сделать так, чтобы колеблющаяся система сама управляла внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется *автоколебательной*, а совершаемые ею незатухающие колебания – *автоколебаниями*.

Если колебательная система подвергается воздействию внешней периодической силы, то возникают так называемые *вынужденные колебания*, имеющие незатухающий характер. Вынужденные колебания следует отличать от автоколебаний. В случае автоколебаний в системе предполагается специальный механизм, который в такт с собственными колебаниями "поставляет" в систему небольшие порции энергии из некоторого резервуара энергии. Тем самым поддерживаются собственные колебания, которые не затухают. В случае автоколебаний система как бы сама себя подталкивает. В случае вынужденных колебаний система подталкивается посторонней силой. Особый интерес представляет случай, когда внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой ω, воздействует на колебательную систему, способную совершать собственные колебания на некоторой частоте ω_0. Если свободные колебания происходят на частоте ω_0, которая определяется параметрами системы, то установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на *частоте ω внешней силы*.

Вынужденные колебания. 8.2

Уравнение второго закона Ньютона для пружинного маятника, на который действует периодически изменяющаяся сила, будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t$$

Разделив это уравнение на m, и перенеся члены с x и в левую часть, получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$$

Решение данного уравнения имеет следующий вид:

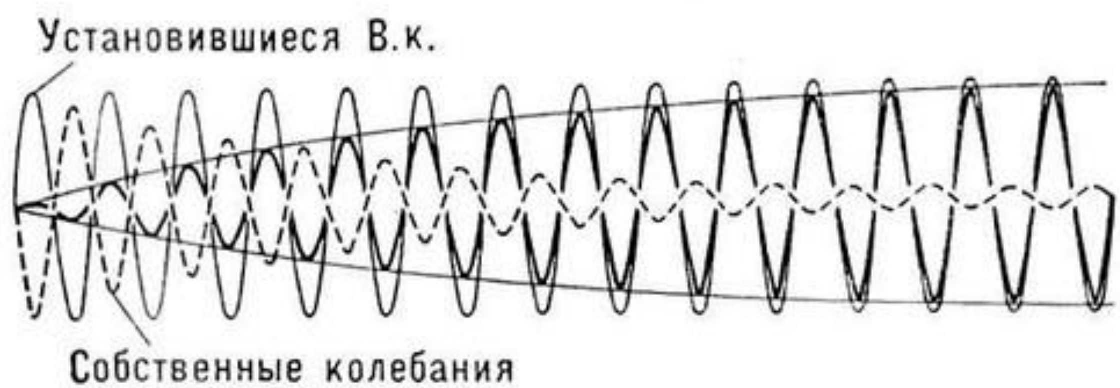
$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)t + \varphi'\right) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы представляет свободные колебания их частота ω определяется внутренними свойствами системы, а амплитуда A_0 и фаза φ' — начальными условиями и внешними воздействиями. Второе слагаемое, называемое *вынужденными колебаниями*, обусловлено наличием внешней (вынуждающей) силы.

Вынужденные колебания. 8.3

Первое слагаемое в этом выражении играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний. С течением времени из-за экспоненциального множителя роль первого слагаемого все больше уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя лишь второе слагаемое.

$$x(t)=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$



Вынужденные колебания. 8.4

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется *резонансом*, соответствующая частота – *резонансной частотой*.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{рез}$, нужно найти максимум функции определяющей зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы. Продифференцировав выражение

$$A(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

по ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

Вынужденные колебания. 8.5

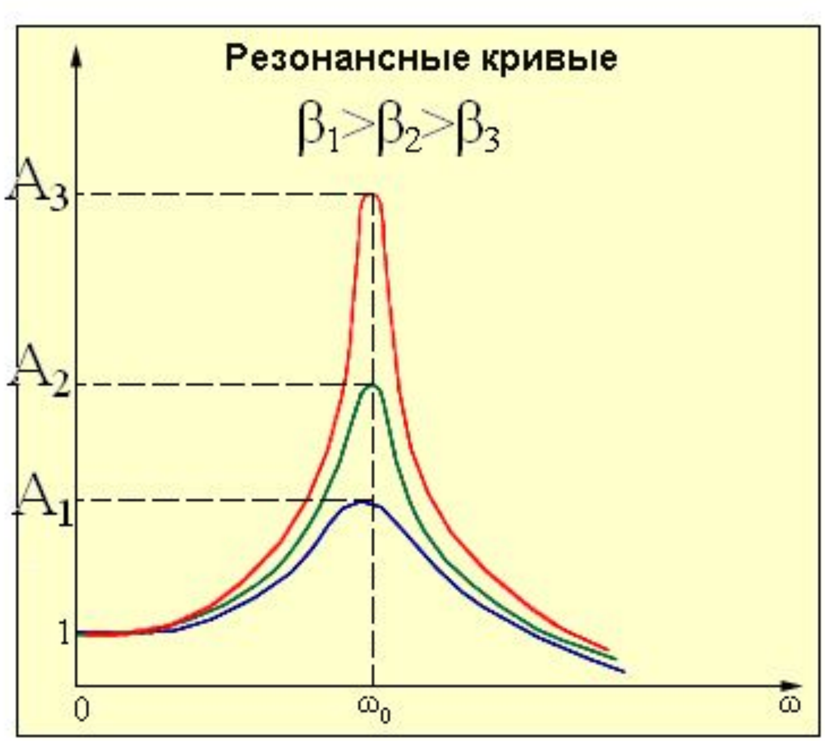
Данное уравнение имеет три решения: ω=0 и $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Решение равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное не подходит, как не имеющее физического смысла. В результате, для резонансной частоты получается значение:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Если частота ω внешней силы приближается к собственной частоте ω, возникает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется *резонансом*. Зависимость амплитуды *A* вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы называется *резонансной характеристикой* или *резонансной кривой*.

Вынужденные колебания. 8.6



При очень большом затухании выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается – с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает. При стремлении ω к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному

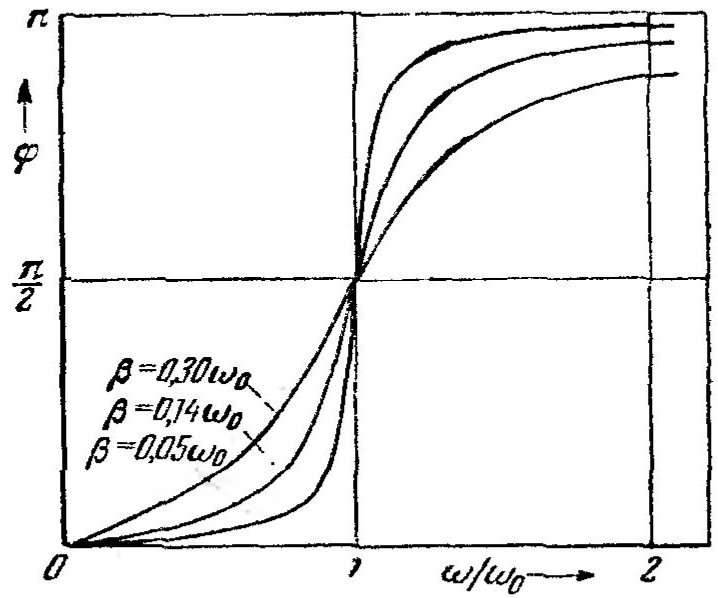
$$f_0 / \omega_0^2$$

т.е. F_0/k . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы величины F_0

Вынужденные колебания. 8.7

При резонансе амплитуда $A_{рез}$ колебания может во много раз превосходить амплитуду A колебаний свободного конца пружины, вызванного внешним воздействием. В отсутствие трения амплитуда вынужденных колебаний при резонансе должна неограниченно возрастать. В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения. Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность Q колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе. У колебательных систем с не очень высокой добротностью (< 10) резонансная частота несколько смещается в сторону низких частот

Вынужденные колебания. 8.8

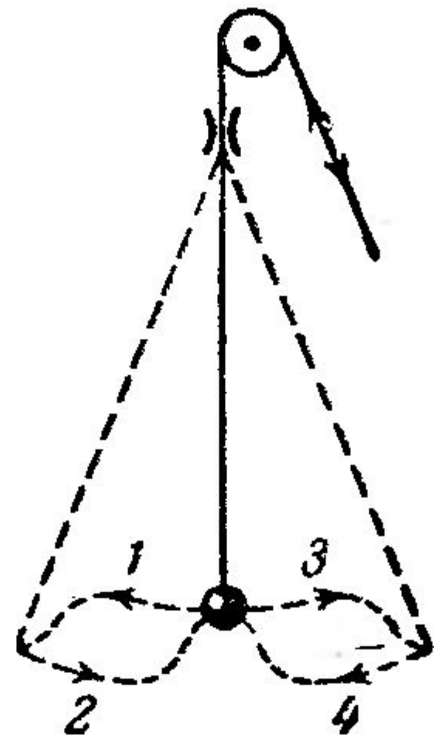


Зависимость φ от ω при различных значения коэффициента затухания β. Частоте ω_0 соответствует $\varphi=\pi/2$.

Вынужденные колебания. 8.9

Оказывается, существует иной вид воздействия извне, с помощью которого можно сильно раскачать систему.

- *Этот вид воздействия заключается в совершаемом в такт с колебаниями периодическом изменении какого-либо параметра системы, вследствие чего само явление называется параметрическим резонансом*.



Простейшим примером системы, в которой возможен параметрический резонанс, является простейший маятник – шарик на нитке. Если периодически изменять длину маятника l, увеличивая ее в моменты, когда маятник находится в крайних положениях, и уменьшается в моменты, когда маятник находится в среднем положении, то маятник сильно раскачается.

Вынужденные колебания. 8.10

- Увеличение энергии маятника при этом происходит за счет работы, которую совершает сила, действующая на нить. Сила натяжения нити при колебаниях маятника непостоянна: она меньше в крайних положениях, когда скорость обращается в нуль, и больше в среднем положении, когда скорость маятника максимальна. Поэтому отрицательная работа внешней силы при удлинении маятника оказывается меньше по величине, чем положительная работа, совершаемая при укорочении маятника. В итоге работа внешней силы за период оказывается больше нуля.