Тема урока: *Использование монотонности при решении уравнений*

Учитель математики Грязнова Е.В.

Задача:

Решить уравнение

$$3^{2\sin^2 x} + \sqrt[3]{2\sin^2 x} = 3^{3\sin x + 2} + \sqrt[3]{3\sin x + 2}$$

Билет №1

- Решить уравнение .

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}3$$

- Решить уравнение .

$$\log_2(x^2-3)=\log_2 12-\log_2 2$$

Билет № 2

- При каком условии логарифмическая функция возрастает? $y = \log_a x$
- Какие из перечисленных функций являются возрастающими?

$$y = \log_\pi x \qquad y = \log_{\frac{1}{2}} x \qquad y = \lg x$$

$$y = \log_{\sqrt{3}} x$$

Билет № 3

- При каком условии показательная функция

$$y = a^x$$

убывает?

- Какие из перечисленных функций являются убывающими?

$$y = 2{,}1^x \qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad y = (\pi - 3)^x$$

$$y = e^x$$

Билет № 4

- Закончите предложение: Для возрастающей функции большему аргументу соответствует … .
- Закончите предложение: Сумма двух убывающих функций является … .

Билет № 5

- Решите уравнение .

$$2^{x-5} = 2^{3-3x}$$

- Решите уравнение .

$$\sqrt{x+10} = \sqrt{8-x}$$

- Если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из некоторого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется **возрастающей** на этом промежутке;
  если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из некоторого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется **убывающей** на этом промежутке.
  Функция, которая только возрастает или только убывает, называется **монотонной**.

- Можно ли применить монотонность функций при решении уравнений?
- Если да, то насколько эффективно это применение?

Этап 1

- Как решается графически уравнение вида

$$f(x) = a$$

где а – некоторое число?

- Если $f(x)$ – монотонная функция, то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

Пример

$$\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[9]{x-6}=6$$

- Если $x = 7$,
  то $3 + 2 + 1 = 6$,
  значит $x = 7$ – единственный корень.

Этап 2

- Теперь решаем уравнение вида

$$f(x) = g(x)$$

причем $y = f(x)$ возрастающая функция

$y = g(x)$ убывающая функция

- Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке М, а функция $y = g(x)$ убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке М не более одного корня.

Задания:

$$5^x - 1 = -\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 3x + 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{x} + 1$$

$$\sqrt{x-3} = 5 - x$$

$$3^x = \frac{3}{x}$$

$$\sqrt{x+1} = 5 - \frac{1}{4}x$$

$$(0,1)^x = -\frac{10}{x}$$

$$\log_2 x = 1 - x$$

$$4^x = -x + 5$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3}x - 2$$

Этап 3

- *Пусть область определения функции* $f(t)$ *есть промежуток M, и пусть эта функция непрерывна и строго монотонна (т.е. возрастает или убывает) на этом промежутке. Тогда уравнение* $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x), \\ \alpha(x) \in M, \\ \beta(x) \in M \end{cases}$$

Рассмотрим пример.
Решить уравнение .

$$\arcsin(x^2-8)=\arcsin(9x-26)$$

- **Решение:** Пусть $f(t)=\arcsin t$. Она определена, непрерывна и возрастает на $[-1;1]$. Уравнение имеет вид $f(x^2-8)=f(9x-26)$. Значит, оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-8=9x-26, \\ -1\le 9x-26\le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=6, \end{array}\right. \\ \dfrac{25}{9}\le x\le 3 \end{cases} \qquad x=3$$

Этап 4.

- **Задание:** Выявите функцию , область ее определения и вид монотонности для следующих уравнений.
- $$\lg\left(x^2-17\right)=\lg\left(11x-45\right)$$

  $$\sqrt{\log_3 x+1}=\sqrt{\log_3^2 x-5}$$

  $$\arccos\left(x^2-14\right)=\arccos\left(x+6\right)$$

  $$\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos^2 x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4-4\sin x}$$

Рассмотрим более сложные примеры

- Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \sqrt[5]{\sin x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} - \sqrt[5]{\cos x}$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t-\sqrt[5]{t}.$

Она определена, непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

Как разность убывающей функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$

и возрастающей функции $y=\sqrt[5]{t}$

функция $f(t)$ убывает на R .

Данное уравнение имеет вид

$$f(\sin x) = f(\cos x).$$

Значит, по утверждению оно равносильно уравнению $\sin x = \cos x,$

$$tgx = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Решить уравнение

$$e^{x^2-4x+5}+\sqrt[3]{x^2-4x+5}=e^{2x^2-3x+7}+\sqrt[3]{2x^2-3x+7}$$

Решение.

- Пусть $f(t)=e^{t}+\sqrt[3]{t}$. Эта функция определена, непрерывна и возрастает на всей числовой прямой. Данное уравнение имеет вид:
  $$f(x^2-4x+5)=f(2x^2-3x+7).$$
  Согласно утверждению оно равносильно уравнению

  $$x^2-4x+5=2x^2-3x+7.$$

  $$x^2+x+2=0,$$

  $$D=1-8=-7<0,$$

  Ответ: нет корней.

Решить уравнение

$$2^{x^2+1007}+\sqrt[2007]{x^2+1007}=2^{2009x-1001}+\sqrt[2007]{2009x-1001}$$

Сможете ли решить записанное на доске уравнение?

$$3^{2\sin^2 x} + \sqrt[3]{2\sin^2 x} = 3^{3\sin x + 2} + \sqrt[3]{3\sin x + 2}$$

- *- Можно ли применять монотонность при решении уравнений?*
- *- Эффективно ли применение монотонности при решении уравнений?*
- *- Что нового вы узнали на этом уроке?*
- *- Какие задачи из предложенных вам понравилось решать?*
- *- Чувствуете ли вы уверенность в данный момент перед нестандартными уравнениями?*

Домашнее задание

- решить уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} - (\sin x)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-\cos^2 x} - \left(1-\cos^2 x\right)^3$$

$$\cos^5 2x + 6\cos^3 2x = \cos^5 x + 6\cos^3 x$$

$$\sin\left(x^2+1\right) + \left(x^2+1\right)^3 + x^2 + 1 + \sin 2x + 8x^3 + 2x = 0$$

$$\sin\left(9x^2 + \frac{4}{x^2} - 7\right) + \sin\left(3x - \frac{2}{x} - 7\right) = 18x^2 + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x} + 6x - 28$$