

Тема урока: *Использование монотонности при решении уравнений*

Учитель математики Грязнова Е.В.





Задача:

Решить уравнение

$$3^{2\sin^2 x} + \sqrt[3]{2\sin^2 x} = 3^{3\sin x + 2} + \sqrt[3]{3\sin x + 2}$$

Билет №1



- Решить уравнение .

$$\log_{\frac{1}{2}}(x + 5) = \log_{\frac{1}{2}} 3$$

- Решить уравнение .

$$\log_2(x^2 - 3) = \log_2 12 - \log_2 2$$



Билет № 2

- При каком условии логарифмическая функция возрастает? $y = \log_a x$
- Какие из перечисленных функций являются возрастающими?

$$y = \log_{\pi} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$y = \lg x$$

$$y = \log_{\sqrt{3}} x$$



Билет № 3

- При каком условии показательная функция
$$y = a^x$$

убывает?

- Какие из перечисленных функций являются убывающими?

$$y = 2,1^x \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad y = (\pi - 3)^x$$

$$y = e^x$$



Билет № 4

- Закончите предложение: Для возрастающей функции большему аргументу соответствует
- Закончите предложение: Сумма двух убывающих функций является



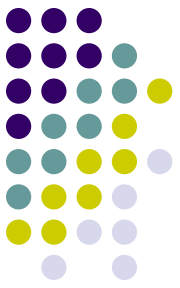
Билет № 5

- Решите уравнение .

$$2^{x-5} = 2^{3-3x}$$

- Решите уравнение .

$$\sqrt{x+10} = \sqrt{8-x}$$



- Если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из некоторого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется **возрастающей** на этом промежутке;
если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из некоторого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется **убывающей** на этом промежутке.

Функция, которая только возрастает или только убывает, называется **монотонной**.



- Можно ли применить монотонность функций при решении уравнений?
- Если да, то насколько эффективно это применение?



Этап 1

- Как решается графически уравнение вида

$$f(x) = a$$

где a – некоторое число?



- Если $f(x)$ – монотонная функция, то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

Пример



$$\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[9]{x-6} = 6$$

- Если $x = 7$,
то $3 + 2 + 1 = 6$,
значит $x = 7$ – единственный корень.



Этап 2

- Теперь решаем уравнение вида

$$f(x) = g(x)$$

причем $y = f(x)$ возрастающая функция

$y = g(x)$ убывающая функция



- Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке M , а функция $y = g(x)$ убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке M не более одного корня.

Задания:

$$5^x - 1 = -\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{x} + 1$$

$$3^x = \frac{3}{x}$$

$$(0,1)^x = -\frac{10}{x}$$

$$4^x = -x + 5$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 3x + 8$$

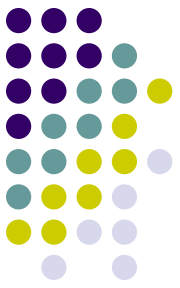
$$\sqrt{x-3} = 5-x$$

$$\sqrt{x+1} = 5 - \frac{1}{4}x$$

$$\log_2 x = 1 - x$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3}x - 2$$





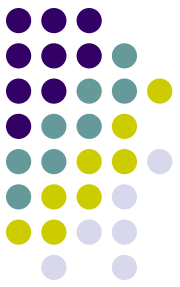
Этап 3

- Пусть область определения функции $f(t)$ есть промежуток M , и пусть эта функция непрерывна и строго монотонна (т.е. возрастает или убывает) на этом промежутке. Тогда уравнение $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x), \\ \alpha(x) \in M, \\ \beta(x) \in M \end{cases}$$

Рассмотрим пример.

Решить уравнение .



$$\arcsin(x^2 - 8) = \arcsin(9x - 26)$$

- **Решение:** Пусть $f(t) = \arcsin t$. Она определена, непрерывна и возрастает на $[-1;1]$. Уравнение имеет вид $f(x^2 - 8) = f(9x - 26)$. Значит, оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 8 = 9x - 26, \\ -1 \leq 9x - 26 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 3, \\ x = 6, \end{cases} \\ \frac{25}{9} \leq x \leq 3 \end{cases} \quad x = 3$$



Этап 4.

- **Задание:** Выявите функцию, область ее определения и вид монотонности для следующих уравнений.

- $\lg(x^2 - 17) = \lg(11x - 45)$

$$\sqrt{\log_3 x + 1} = \sqrt{\log_3^2 x - 5}$$

$$\arccos(x^2 - 14) = \arccos(x + 6)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4\sin x}$$

Рассмотрим более сложные примеры



- Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \sqrt[5]{\sin x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} - \sqrt[5]{\cos x}$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t - \sqrt[5]{t}$.



Она определена, непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.

Как разность убывающей функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$

и возрастающей функции $y = \sqrt[5]{t}$

функция $f(t)$ убывает на R .

Данное уравнение имеет вид



$$f(\sin x) = f(\cos x).$$

Значит, по утверждению
оно равносильно

уравнению $\sin x = \cos x,$

$$\operatorname{tg} x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Решить уравнение



$$e^{x^2-4x+5} + \sqrt[3]{x^2-4x+5} = e^{2x^2-3x+7} + \sqrt[3]{2x^2-3x+7}$$

Решение.



- Пусть $f(t) = e^t + \sqrt[3]{t}$. Эта функция определена, непрерывна и возрастает на всей числовой прямой.

Данное уравнение имеет вид:

$$f(x^2 - 4x + 5) = f(2x^2 - 3x + 7)$$

Согласно утверждению оно равносильно уравнению

$$x^2 - 4x + 5 = 2x^2 - 3x + 7.$$

$$x^2 + x + 2 = 0,$$

$$D = 1 - 8 = -7 < 0,$$

Ответ: нет корней.

Решить уравнение



$$2^{x^2+1007} + \sqrt[2007]{x^2 + 1007} = 2^{2009x-1001} + \sqrt[2007]{2009x - 1001}$$

Сможете ли решить записанное на доске уравнение?



$$3^{2 \sin^2 x} + \sqrt[3]{2 \sin^2 x} = 3^{3 \sin x + 2} + \sqrt[3]{3 \sin x + 2}$$



- - *Можно ли применять монотонность при решении уравнений?*
- - *Эффективно ли применение монотонности при решении уравнений?*
- - *Что нового вы узнали на этом уроке?*
- - *Какие задачи из предложенных вам понравилось решать?*
- - *Чувствуете ли вы уверенность в данный момент перед нестандартными уравнениями?*

Домашнее задание



- решить уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} - (\sin x)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1 - \cos^2 x} - (1 - \cos^2 x)^3$$

$$\cos^5 2x + 6 \cos^3 2x = \cos^5 x + 6 \cos^3 x$$

$$\sin(x^2 + 1) + (x^2 + 1)^3 + x^2 + 1 + \sin 2x + 8x^3 + 2x = 0$$

$$\sin\left(9x^2 + \frac{4}{x^2} - 7\right) + \sin\left(3x - \frac{2}{x} - 7\right) = 18x^2 + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x} + 6x - 28$$