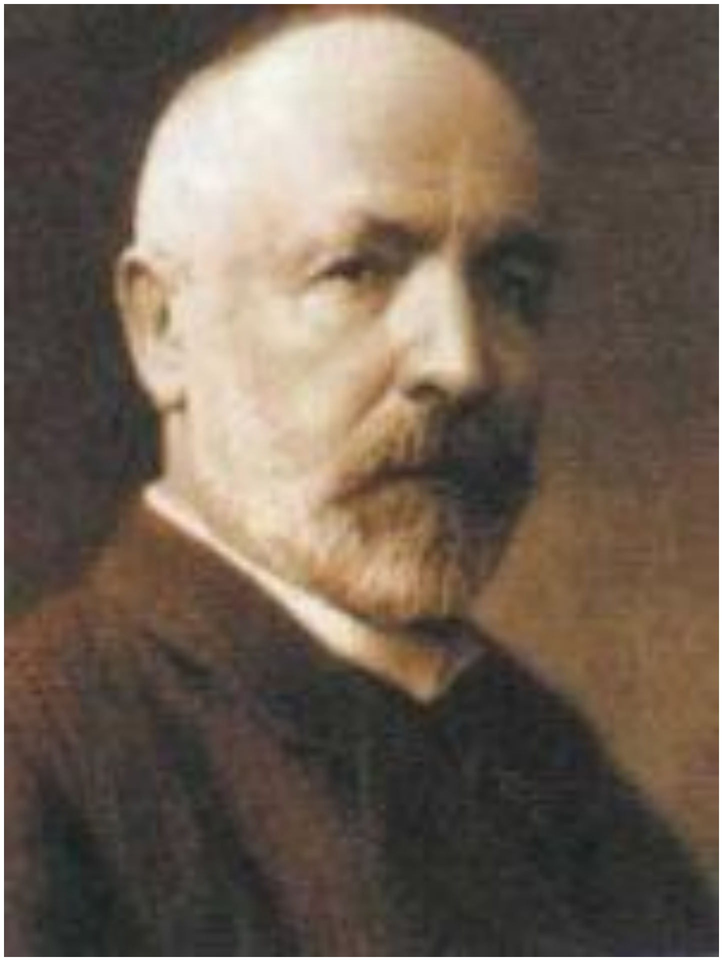
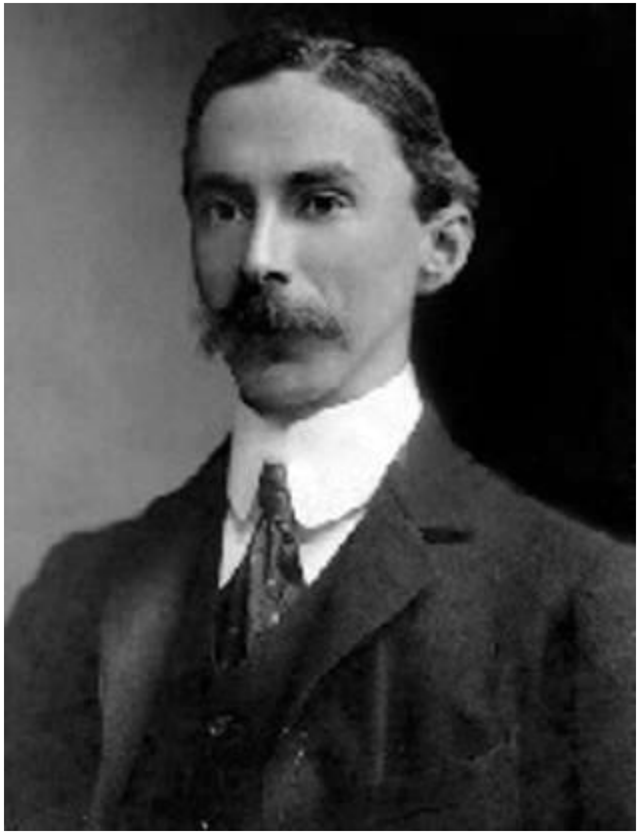
Введение в теорию множеств

Георг Кантор



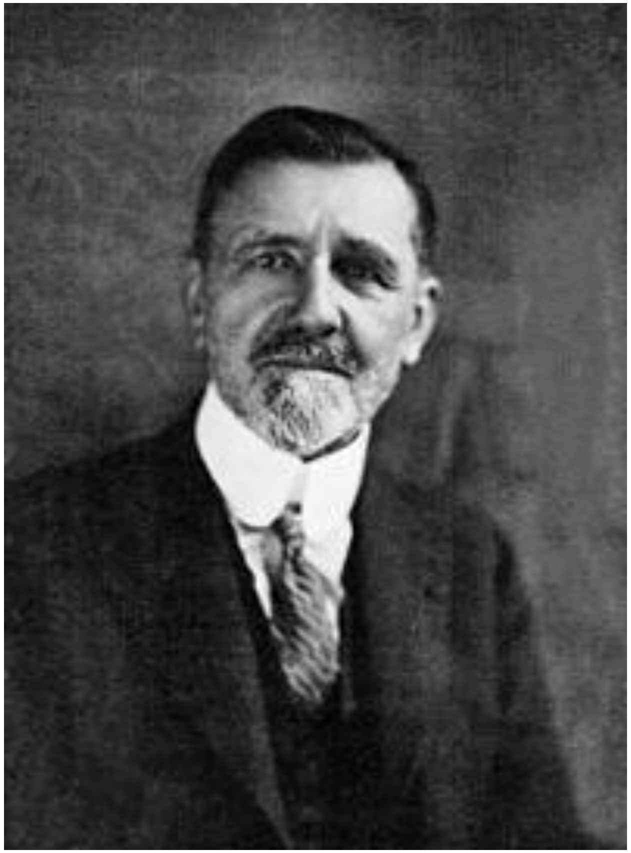
(03.03.1845 - 06.01.1918)
немецкий математик.

Бертран Расселл



18 мая 1872 — 2 февраля 1970 — английский математик, философ и общественный деятель

Феликс Эдуард Жустин **Эмиль Борель**



(7 января *1871* — 3 февраля *1956*) — французский математик и политический деятель.

Понятие множества

- Под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое *M* определённых хорошо различимых предметов *m* нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества *M*).

(Г. Кантор).

- *Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое.*

(Б. Расселл)

- Каждый сам знает, что он понимает под множеством.

(Э. Борель)

Введение в теорию множеств

1. Основные определения, терминология

Под *множеством* A мы понимаем совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим свойством *P(x)*.

Обозначение

1) Указанием определяющего свойства $A = \{x | P(x)\}$
2) Перечислением элементов $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Пример 1

$$B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$$
$$B = \{3; -1\}$$

Иногда второе обозначение распространяется и на некоторые бесконечные множества. Так,

$N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

$Z=\{\ldots,-n,\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$.

Определение 1

Множество A называется *подмножеством* B, если для любого

x ($x \in A \rightarrow x \in B$)

Обозначение:

$$A \subseteq B$$

Теорема 2

Для любых множеств *A, B, C* верно следующее:

а) $A \subseteq A$;

б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.

Доказательство

Для доказательства а) надо убедиться в истинности высказывания $\left(x \in A \to x \in A\right)$, но оно очевидным образом истинно, так как представляет собой импликацию, в которой посылка и заключение совпадают.

Для доказательства б) надо убедится в истинности высказывания

$$\left(x \in A \to x \in B\right) \wedge \left(x \in B \to x \in C\right) \to \left(x \in A \to x \in C\right)$$

Обозначим: "$x \in A$" через U, "$x \in B$" через V , "$x \in C$" через Z . Тогда надо убедиться в истинности высказывания .

$$F = \left(U \to V\right) \wedge \left(V \to Z\right) \to \left(U \to Z\right) =$$

$$= (\overline{U} \vee V)(\overline{V} \vee Z) \to \left(\overline{U} \vee Z\right) = \overline{\left(\overline{U} \vee V\right)\left(\overline{V} \vee Z\right)} \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= U\overline{V} \vee V\overline{Z} \vee \overline{U} \vee Z = \overline{V} \vee \overline{U} \vee V \vee Z = 1$$

Определение 3

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов $(A=B)$. Другими словами, обозначение $A=B$ служит сокращением для высказывания

$$\left(x \in A \leftrightarrow x \in B\right)$$

Пример

Указать равные множества

$A=\{0;1;2\}$, $B = \{1;0;2\}$, $C=\{0;1;2;0\}$, $D=\{\{1;2\};0\}$,

$E=\{1;2\}$, $F=\{x:x^3-3x^2+2x=0\}$.

Теорема 4

Для любых множеств A и B $A=B$ тогда и только тогда, когда

$A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Доказательство

Доказательство этого факта основано на том, что эквивалентность $X \leftrightarrow Y$ равносильна конъюнкции двух импликаций $\left(X \to Y\right)\left(Y \to X\right)$

Таким образом, для того, чтобы доказать равенство множеств A и B, надо доказать два включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, что часто используется для доказательства теоретико-множественных равенств.

Определение 5

$A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

Теорема 6

Для любых множеств A, B, C, если $A \subseteq B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$

Доказательство

Доказать самостоятельно (5 баллов).

Определение 7

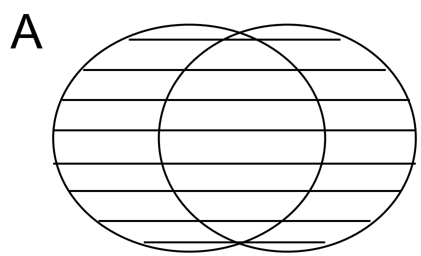
Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента, то есть x не принадлежит этому множеству (для любого x). Обозначение: $\varnothing$.

2. Операции над множествами

Определение 1

Объединением двух множеств A и B называется множество $A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \vee x \in B \right\}$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



$A \cup B$

Пример

Пусть $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$.

Объединение множеств

Теорема 2

Пусть *A, B, C* – произвольные множества. Тогда:

а) $A \cup A = A$ – *идемпотентность* объединения;

б) $A \cup B = B \cup A$ – *коммутативность* объединения;

в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – *ассоциативность* объединения;

г) $A \cup \varnothing = A$;

д) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A \leftrightarrow x \in A$$

б) Возьмем

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee$$

$$\vee\, x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$$

в) Возьмем

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

г)Возьмем

$$x \in A \cup \varnothing \leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \leftrightarrow x \in A$$

так как высказывание $x \in \varnothing$ тождественно ложно. Следовательно $A \cup \varnothing = A$.

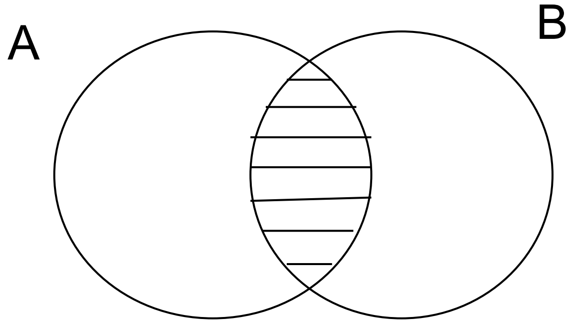
д) Пусть $A \cup B = \varnothing$ то есть, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in \varnothing$. Значит, высказывание $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ является тождественно ложным, , а дизъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда ложны оба эти высказывания. Следовательно, $x \in A \leftrightarrow x \in \varnothing$ и $x \in B \leftrightarrow x \in \varnothing$, а значит $A = B = \varnothing$.

Пересечение множеств

Определение 4

Пересечением множеств А и В называется множество

$$A \cap B = \left\{x \middle| x \in A \wedge x \in B\right\}$$



$A \cap B$

Пример

Пусть A={1,2,4,7,8,9}, B={1,3,5,7,8,10}, тогда $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1,7,8\}$

Пересечение множеств

Теорема 5

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap A = A$ - *идемпотентность* пересечения;

б) $A \cap B = B \cap A$ - *коммутативность* пересечения;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - *ассоциативность* пересечения;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Объединение и пересечение множеств

Теорема 6

1) $A \cap B \subseteq A$

2) $A \subseteq A \cup B$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

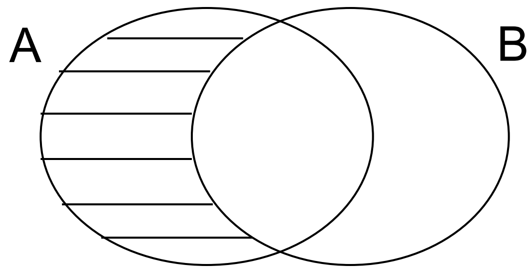
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Разность множеств, дополнение, симметрическая разность

Определение 1

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$



$A \setminus B$

Пример

Пусть $A=\{1,3,4,7,8,9,10\}$, $B=\{2,3,4,5,6,7\}$, тогда $A \setminus B=\{1,8,9,10\}$, $B \setminus A=\{2,5,6\}$.

Разность множеств

Теорема 2

Пусть *A*, *B*, *C* – произвольные множества, тогда:

1) $A \setminus A = \varnothing$

2) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$

3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Теорема 3 (законы Моргана)

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

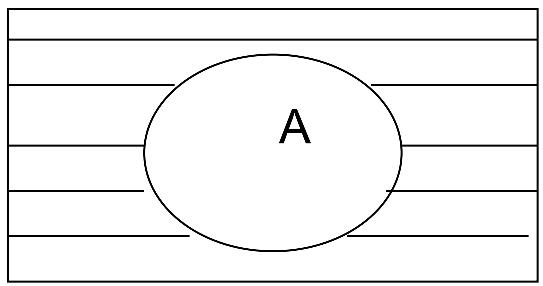
Множество U назовем *"универсальным"*, если оно содержит все элементы и все множества являются его подмножествами. Понятие *"универсального множества"* у нас будет зависеть от круга задач, которые мы рассматриваем. Довольно часто под универсальным множеством понимают множество R — множество вещественных чисел или множество C – комплексных чисел. Возможны и другие примеры. Всегда в контексте необходимо оговорить, что мы понимаем под универсальным множеством U.

Дополнение множеств

Определение 4

Пусть U – универсальное множество. *Дополнением A* в U (или просто *дополнением A*) называется множество .

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



$\overline{A}$

Пример

Если U – множество вещественных чисел и A – множество рациональных чисел, то – множество $\overline{A}$ иррациональных чисел

Дополнение множеств

Теорема 5

1) $\overline{\overline{A}} = A$

2) $\overline{U} = \varnothing$

3) $\overline{\varnothing} = U$

Теорема 6(законы Моргана для дополнений)

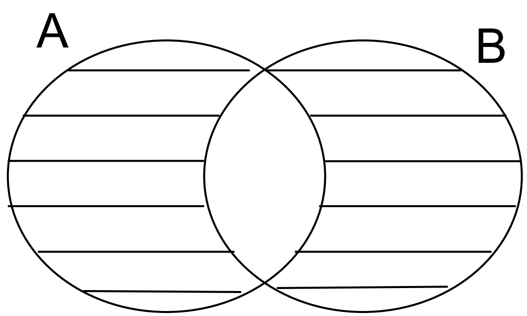
а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Симметрическая разность

- **Определение 7**
- Симметрической разностью множеств A и B называют множество

$$A \triangle B = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right)$$



$$A \triangle B$$

- Задача (3 балла).
- Доказать, что $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$