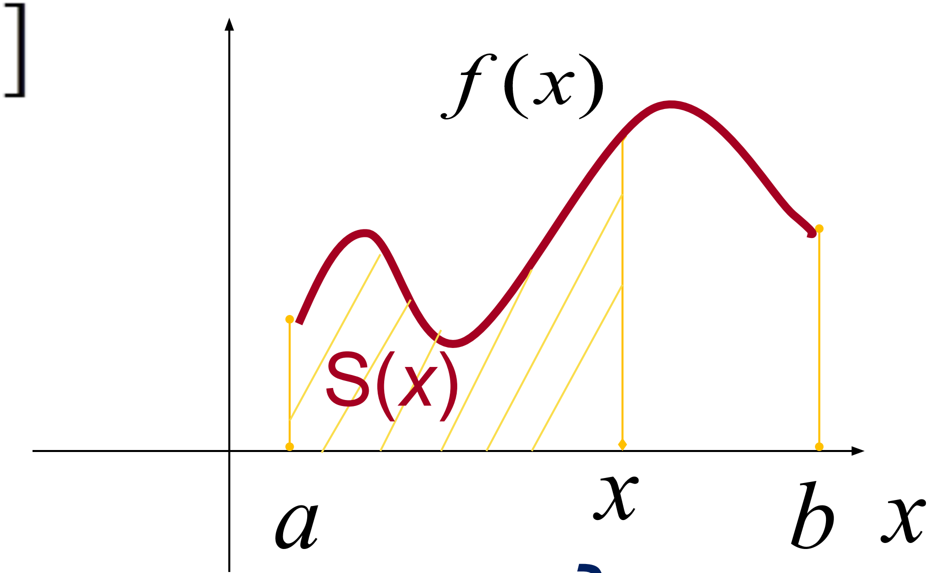
Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)-$ *непрерывна на* $[a,b]$. *Тогда для любого* x *из* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,x]$, *следовательно на* $[a,b]$ *определена функция* $[a,b]$

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx,$$

которая называется



интегралом с переменным верхним пределом.

Значение функции $\Phi(x)$ в точке x из $[a, b]$ равно площади $S(x)$ под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, x]$.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функция $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$. Тогда функция $\Phi(x)$ заданная формулой $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx,$ обладает следующими свойствами:

- непрерывна на отрезке $[a, b]$
- имеет производную для всех x из $[a, b]$ удовлетворяющую равенству $\Phi'(x) = f(x).$

Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ – *непрерывна на* $[a, b]$, *функция* $\Phi(x)$ – *любая ее первообразная на* $[a, b]$. *Тогда определенный интеграл от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a, b]$ *равен*

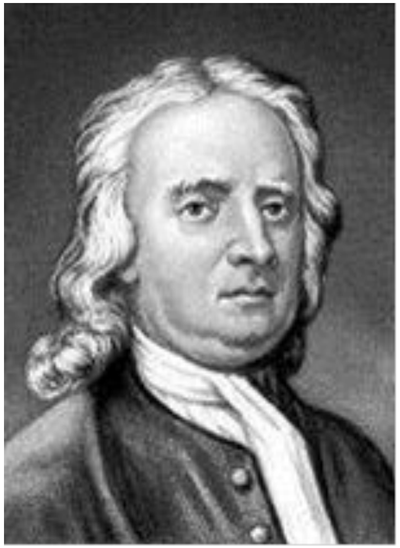
$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (*),$$

где $\Phi(b)$ *и* $\Phi(a)$

значения функции в точках a и b соответственно.

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (**)$$

Формула $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ *называется формулой* **Ньютона – Лейбница.**



Исаак Ньютон (1643-1727) – английский физик, математик и астроном. Один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии» , в котором он изложил Закон всемирного тяготения и три закона механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление.

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)

математик, физик и изобретатель,

юрист, историк, языковед. Основные математические

"Об истинном отношении круга к квадрату" (1682),
"Новый метод максимумов и минимумов" (1684),
"О скрытой геометрии и анализе неделимых..." (1686).

Вычисление определенных интегралов

Вычисление определенных интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два шага.

- На первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, получают некоторую первообразную $\Phi(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.
- на втором этапе применяется собственно формула Ньютона-Лейбница.

Примеры.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 x^2 dx.$

Решение. Произвольная первообразная для функции

$$f(x) = x^2$$

имеет вид $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C.$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{3}.$

- **Пример 2.** Вычислить $\int\limits_1^2 2^{3x-4}\,dx.$

Решение.

$$\int\limits_1^2 2^{3x-4}\,dx = \left(\frac{1}{3\ln 2}2^{3x-4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(2^{3x-4}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3\ln 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2}.$$

Ответ: $\frac{7}{6\ln 2}.$

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную на* $[\alpha, \beta]$, $a = \varphi(\alpha); b = \varphi(\beta)$ *и функция* $f(x)$ *непрерывна в каждой токе* $x = \varphi(t)$, *где* $t \in [\alpha, \beta]$. *Тогда справедливо следующее равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эту формулу называют формулой **замены переменной в определенном интеграле.**

Примеры

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx.$

Решение. Пусть

$$t=2-x^2,\quad dt=d\left(2-x^2\right)=\left(2-x^2\right)' dx=-2xdx,$$

$$xdx=-\frac{1}{2}dt.\quad \text{При } x=0, \text{ то } t=2-0^2;\ \text{при } x=1,$$

$$\text{то } t=2-1^2=1.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx=\int_2^1 t^5\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int_2^1 t^5 dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_2^1=$$

$$=-\frac{1}{12}(t)^6\Big|_2^1=-\frac{1}{12}\left(1-2^6\right)=\frac{21}{4}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. *Пусть функция* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *имеют непрерывные производные на* $[a, b]$ *тогда справедливо следующее равенство*

$$\int_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du, \qquad (***)$$

где $u \cdot v\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$

Эту формулу называют формулой **интегрирования по частям для определенного интеграла.**

Примеры.

Пример 4. Вычислить $\int_0^1 \ln(x+1)dx.$

Решение. $u=\ln(x+1),\ du=d(\ln(x+1)=$

$$(\ln(x+1))'dx=\frac{dx}{x+1};\quad vdv=dx,\ v=\int dx=x.$$

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx=(x\ln(x+1))\Big|_0^1-\int_0^1 x\frac{dx}{x+1};$$

$$\int_0^1 x\frac{dx}{x+1}=\int_0^1 \frac{(x+1-1)dx}{x+1}=$$

$$\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=x\Big|_0^1-\ln(x+1)\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = (x\ln(x+1))\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{x+1} =$$

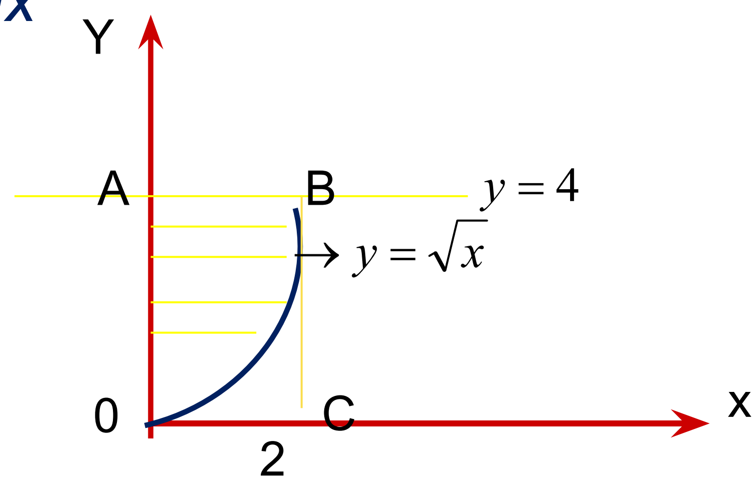
$$\ln 2 - 0 - \left(1 - \ln 2\right) = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1;$$

Ответ: $\ln 4 - 1.$

Пример 5. *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями*

$$x = \sqrt{y}\,,\ x = 0,\ y = 4.$$

Решение. *Из рисунка следует, что площадь искомой фигуры равна:* $S_{OABC} - S_{OBC}$, *каждая их которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла.*



Решая систему $\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y}, \end{cases}$ *получим координаты точки* **B(2;4).**

$$S_{OABC} = \int_0^2 4dx = 4x\Big|_0^2 = \mathbf{8}; \quad S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}};$$

$$S = \mathbf{8} - \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}} = \frac{16}{3}(ед.^2).$$

ОТВЕТ: $\frac{16}{3}(ед.^2).$

Несобственный интеграл

Определение: *Пусть функция f(x) непрерывна на интервале* $(a;+\infty)$. *Если существует* $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx,$ *то этот предел называется несобственным интегралом и обозначается*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_\alpha^t f(x)dx.$$

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае - расходящимся.