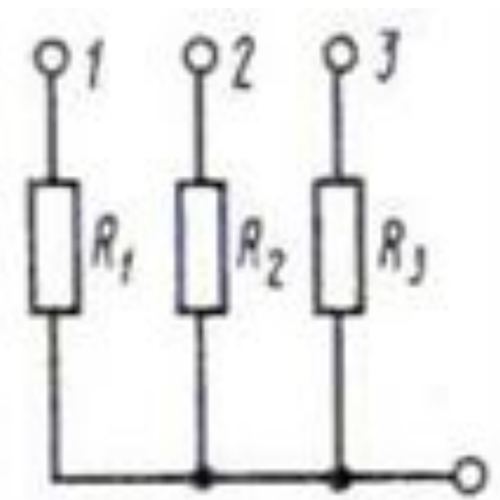
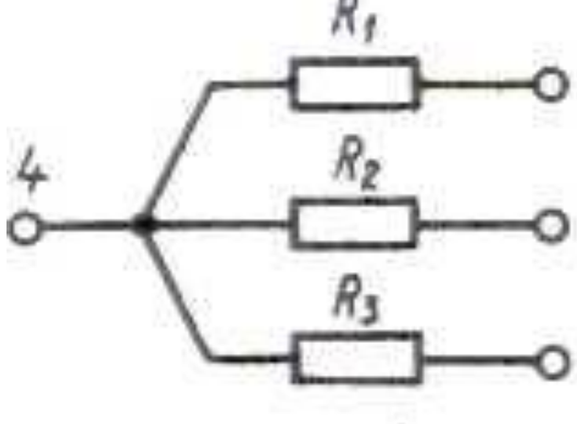
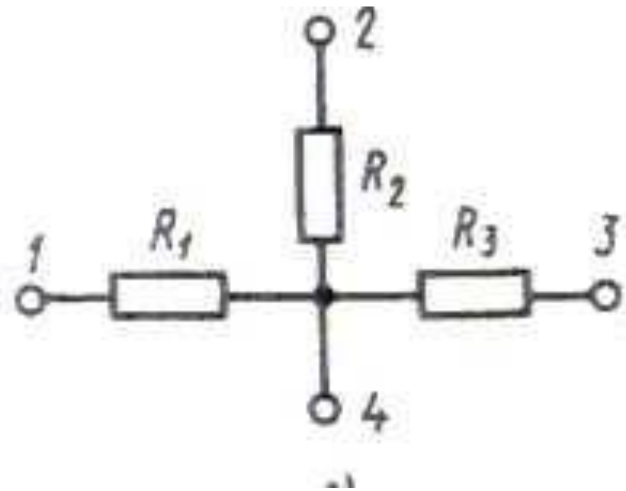
Топология цепей

Основные определения

Схема электрической цепи — это условное графическое изображение электрической цепи.

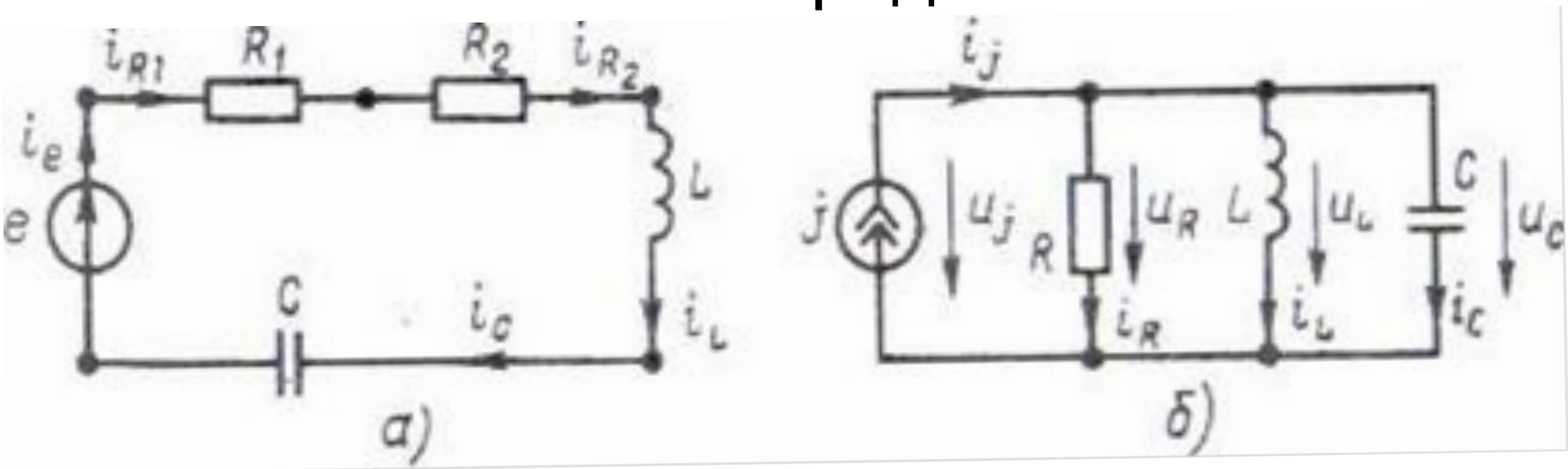


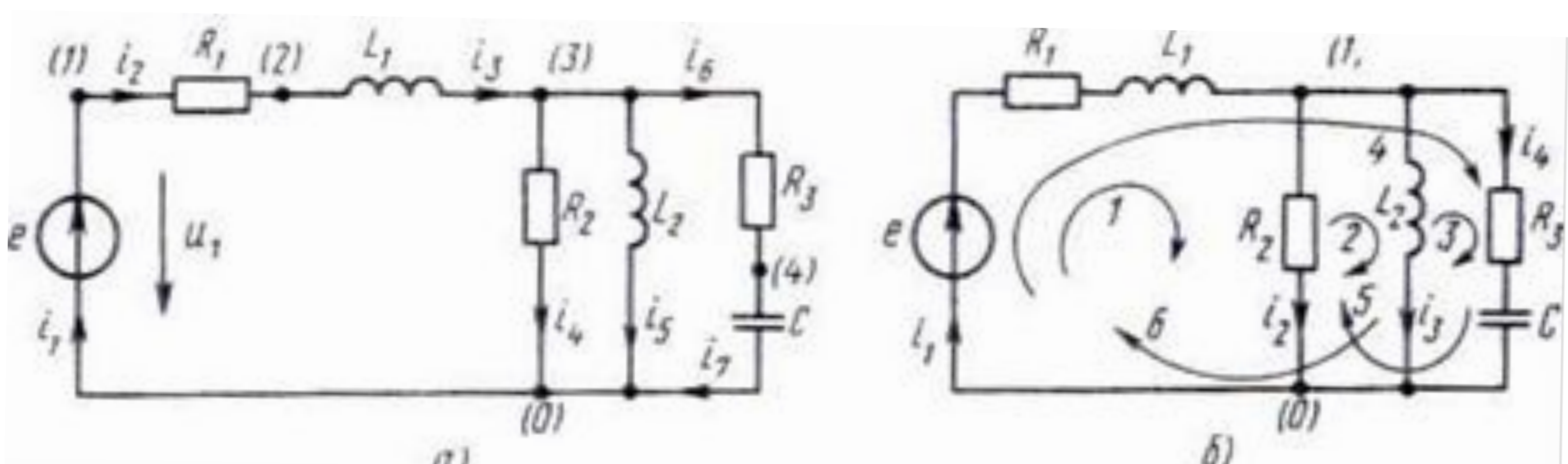




Топология цепей

Основные определения





Классификация электрических цепей

по топологическим особенностям:

пленарные (плоские)
непланарные (объемные);

разветвленные
неразветвленные;

простые (одноконтурные, двухузловые)
сложные (многоконтурные, многоузловые);

по энергетическим свойствам:

активные (содержащие идеализированные активные элементы)
пассивные (не содержащие идеализированных активных элементов);

по числу внешних выводов:

двухполюсники
многополюсники

Классификация электрических цепей

в зависимости от вида дифференциального у равнения цепи:

Идеализированные электрические цепи, процессы в которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, называются **цепями с сосредоточенными параметрами**.

Идеализированные электрически цепи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называются **цепями с распределенными параметрами**.

Классификация электрических цепей

Цепь с сосредоточенными или распределенными параметрами, составленная только из линейных идеализированных элементов, называется **линейной**. Дифференциальное уравнение такой цепи — линейное.

Если в состав цепи входит хотя бы один нелинейный пассивный или активный элемент, то она называется **нелинейной**, а процессы в ней описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Топология цепей
Основные определения

В ***неразветвленной цепи*** один и тот же ток замыкается через все элементы цепи.

В ***разветвленных цепях*** токи через различные элементы могут иметь различные значения.

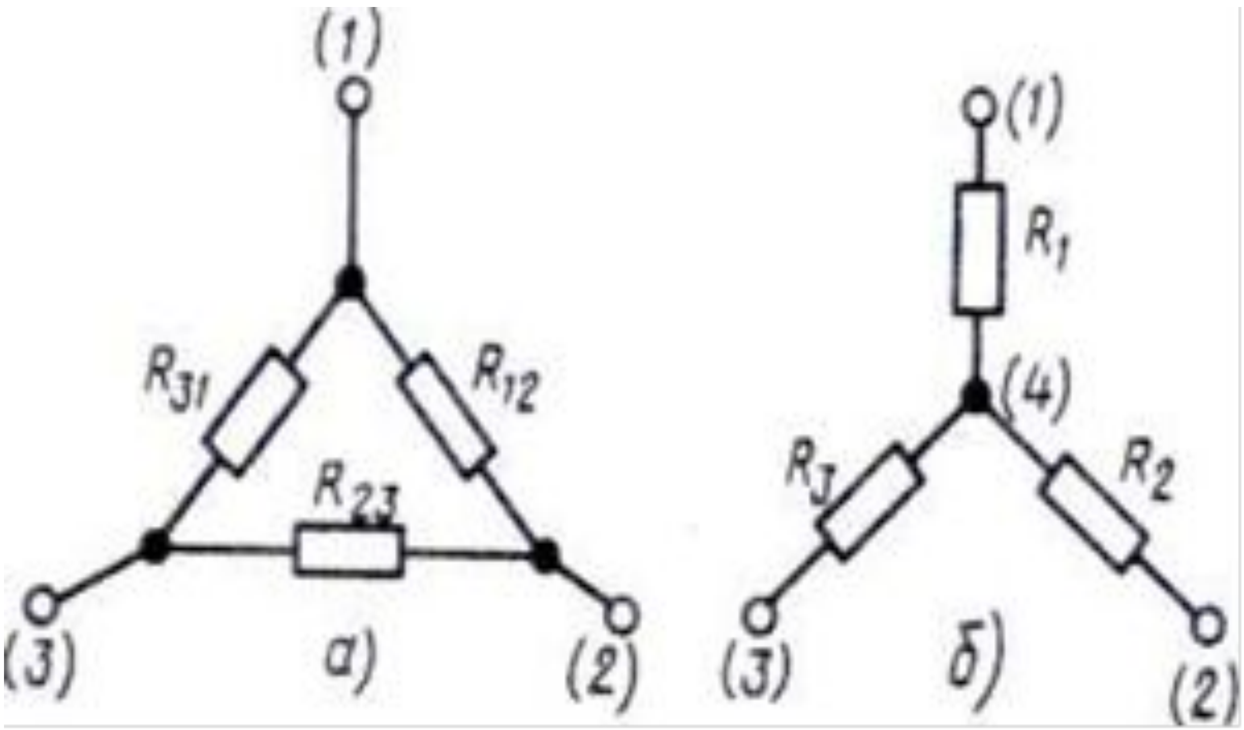
Соединение группы идеализированных двухполюсных элементов, при котором через них замыкается один и тот же ток, называется **последовательным**.

Соединение группы двухполюсных элементов, при котором все элементы находятся под одним и тем же напряжением, называется **параллельным**.

Комбинация последовательного и параллельного соединений элементов называется **смешанным** соединением

Топология цепей

Основные определения



Топология цепей
Основные определения

Ветвь представляет собой участок электрической цепи, вдоль которого замыкается один и тот же ток.

Место соединения ветвей между собой называется **узлом**, причем место соединения двух ветвей называют **устранимым узлом.**

Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям цепи так, что ни одна ветвь и ни один узел не встречаются дважды, называется **контуром**.

Контур характеризуют **направлением обхода** (порядком перечисления ветвей), которое выбирают произвольно и указывают изогнутой стрелкой.

Топологическое описание цепи, при котором необходимо принимать во внимание все узлы, в том числе и устранимые, будем называть **расширенным**.

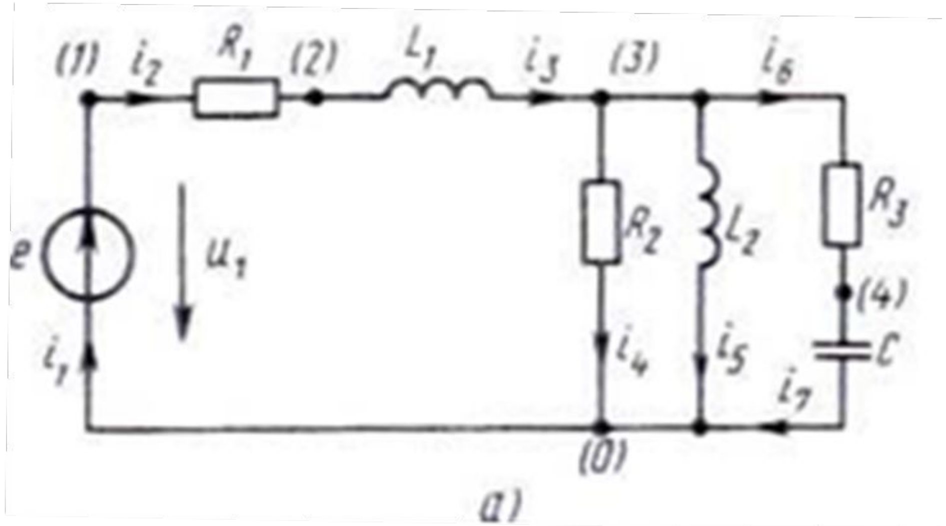
Топологическое описание цепи, при котором устранимые узлы во внимание не принимаются, будем называть **сокращенным**.

Понятие о компонентных и топологических уравнениях

Компонентные уравнения (уравнения ветвей) представляют собой математические модели соответствующих ветвей и выражают ток или напряжение каждой ветви через параметры элементов этой ветви.

Топологические уравнения устанавливают связь между токами или напряжениями различных ветвей, причем вид и число топологических уравнений не зависят от того, какие именно элементы входят в состав ветвей цепи.

Понятие о компонентных и топологических



$$u_1 = e;$$

$$u_2 = R_1 i_2;$$

$$u_3 = L_1 \frac{d i_3}{d t};$$

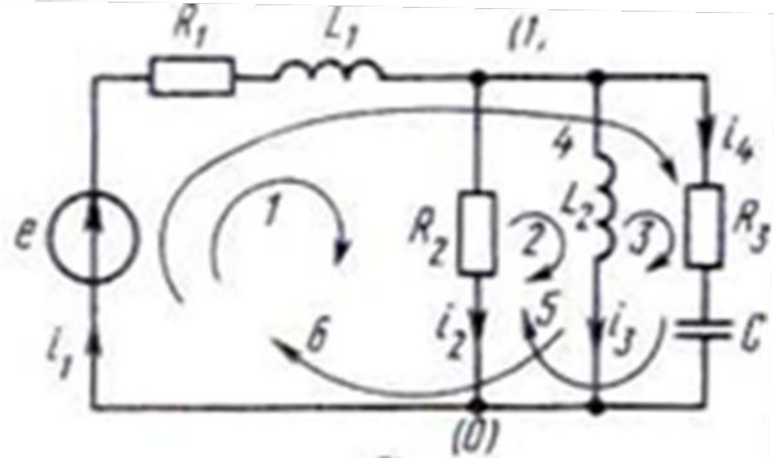
$$u_4 = R_2 i_4;$$

$$u_5 = L_2 \frac{d i_5}{d t};$$

$$u_6 = R_3 i_6;$$

$$u_7 = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_7 \, d t$$

Понятие о компонентных и топологических



б)

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - e;$$

$$u_2 = R_2 i_2;$$

$$u_3 = L_2 \frac{di_3}{dt};$$

$$u_4 = R_3 i_4 + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_4 dt$$

Понятие о компонентных и топологических уравнениях

Компонентные уравнения **невырожденной ветви** устанавливают связь между ее током и напряжением и могут быть записаны в двух формах:

1) ток ветви определяется через напряжение ветви;
2) напряжение ветви находится через ток.

$$i_R = Gu_R$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$i_L = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L dt$$

$$i = J\_ - G_i u$$

$$i = j(t)$$

$$u_R = Ri_R$$

$$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C dt$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$u = E\_ - R_i i$$

$$u = e(t)$$

Компонентное уравнение **вырожденной ветви** задает напряжение или ток ветви, но не позволяет по известному напряжению ветви найти ее ток или по заданному току определить напряжение.

ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов моделирующей цепи, в любой момент времени равна нулю.

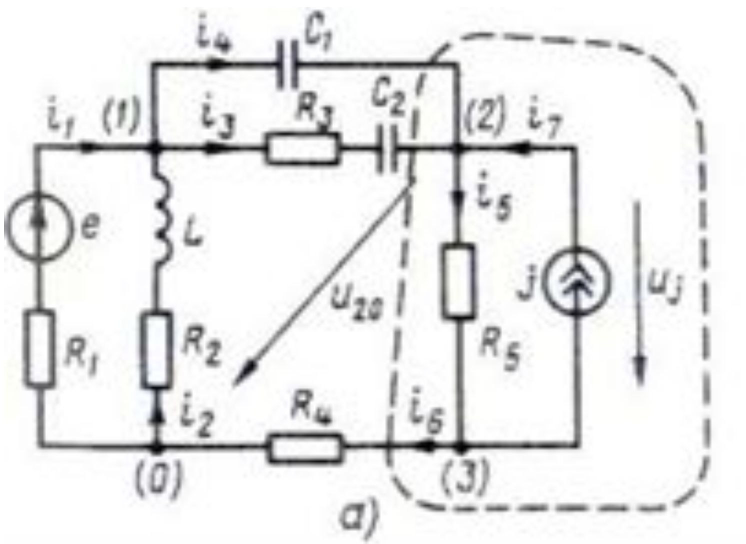
уравнение баланса токов в узле

$$\sum_{k=1}^{p} a_{1k} i_k = 0, l = 0, 1, 2, \ldots, q-1$$

l и k— номера узлов и ветвей; q и p— число узлов и ветвей.

В уравнение баланса токов, составленное для ***l***-го узла, входят только токи ветвей, подключенных к этому узлу, причем токи ветвей, направленных к узлу, берутся со знаком минус, а токи ветвей, направленных от узла, - со знаком плюс.

ЗАКОНЫ КИРХГОФА



для узла(1) $-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0;$

для узла (2) $-i_3 - i_4 + i_5 - i_7 = 0;$

для узла (3) $-i_5 + i_6 + i_7 = 0;$

для узла (0) $i_1 + i_2 - i_6 = 0.$

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов моделирующей цепи, в любой момент времени равна нулю.

ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в произвольный контур: алгебраическая сумма мгновенных значении напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи. в каждый момент времени равна нулю.

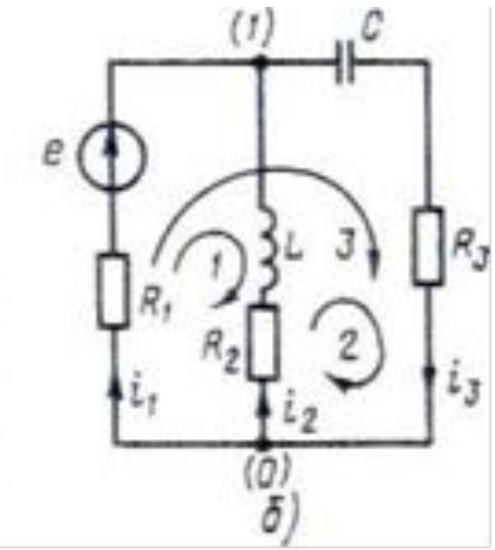
уравнение баланса напряжений ветвей

$$\sum_{k=1}^{p} b_{lk} u_k = 0, \qquad l = 0, 1, \dots, N$$

l и k— номера контуров и ветвей; N и p— число контуров и ветвей.

В уравнение баланса напряжений, составленное для $\boldsymbol{l}$-го контура, входят только напряжения ветвей, входящих в этот контур, причем если положительное направление напряжения совпадает с направлением обхода контура, то оно входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

ЗАКОНЫ КИРХГОФА



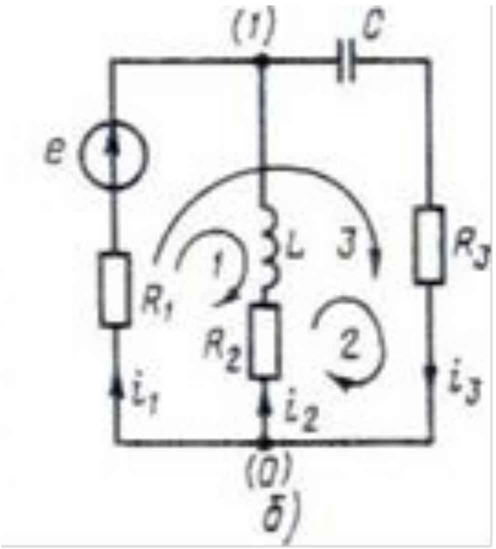
для контура (1) $u_1 - u_2 = 0;$

для контура (2) $u_2 + u_3 = 0;$

для контура (3) $u_1 + u_3 = 0;$

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на всех элементах любого контура моделирующей цепи, за исключением источников напряжения в каждый момент времени, равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС источников напряжения, действующих в этом контуре.

ЗАКОНЫ КИРХГОФА

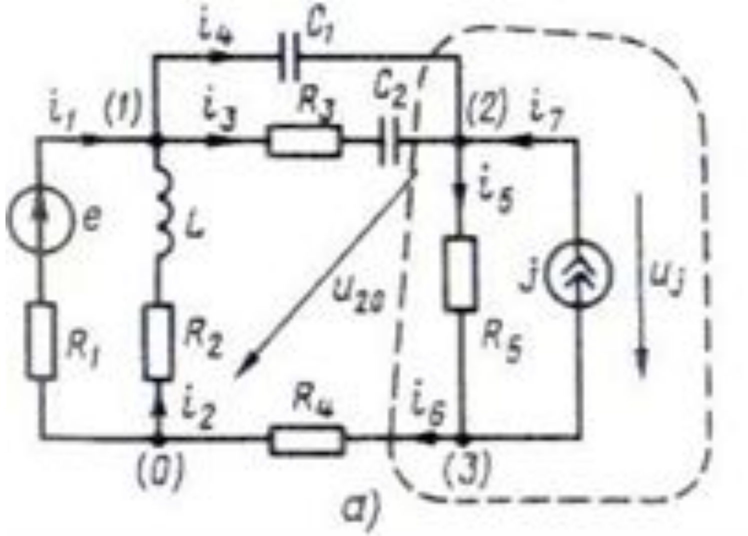


$$u_{R1} - u_L - u_{R2} = e;$$

$$u_{R2} + u_L + u_C + u_{R3} = 0;$$

$$u_{R1} + u_C + u_{R3} = e;$$

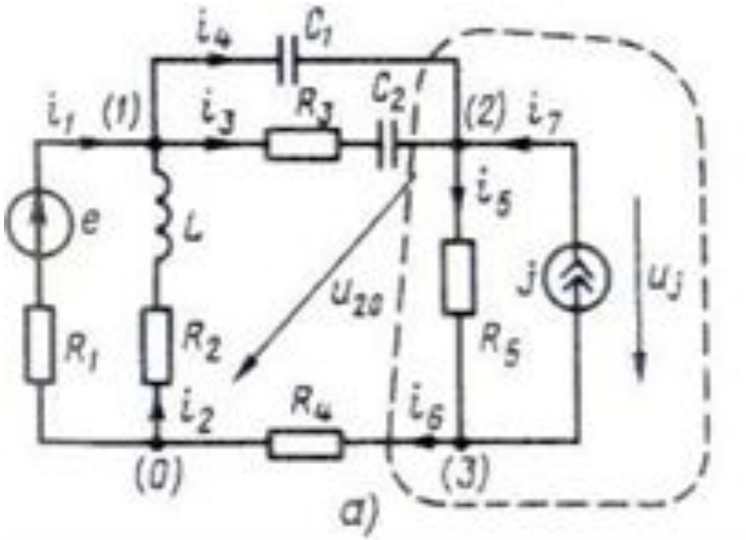
ЗАКОНЫ КИРХГОФА



$$u_{R2} + u_L + u_{R3} + u_{C2} + u_{20} = 0.$$

Уравнения по второму закону Кирхгофа можно составить для любой совокупности элементов, образующих путь для электрического тока от произвольно выбранного узла (а) электрической цепи к узлу (б) с учетом напряжения между конечными точками этого пути $\boldsymbol{u}_{\text{аб}}$

ЗАКОНЫ КИРХГОФА

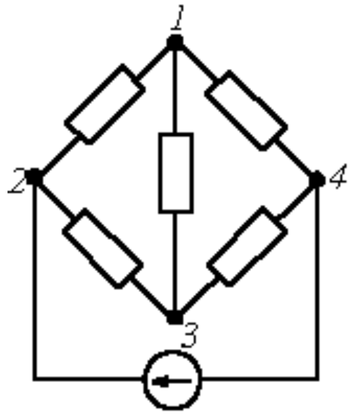


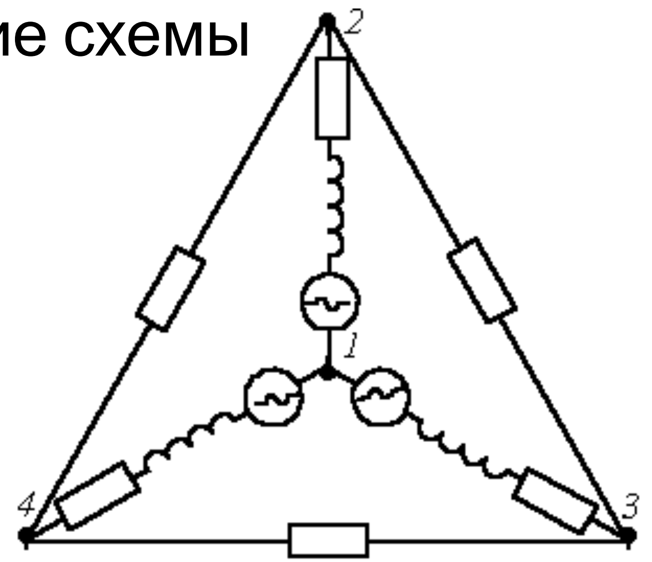
$$u_{R1} + u_{R3} + u_{R4} + u_{C2} + u_j = e.$$

Для контуров, в которых есть источники тока, уравнения баланса напряжений составляют по общему правилу, причем напряжение источника тока учитывается в левой части уравнения.

ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

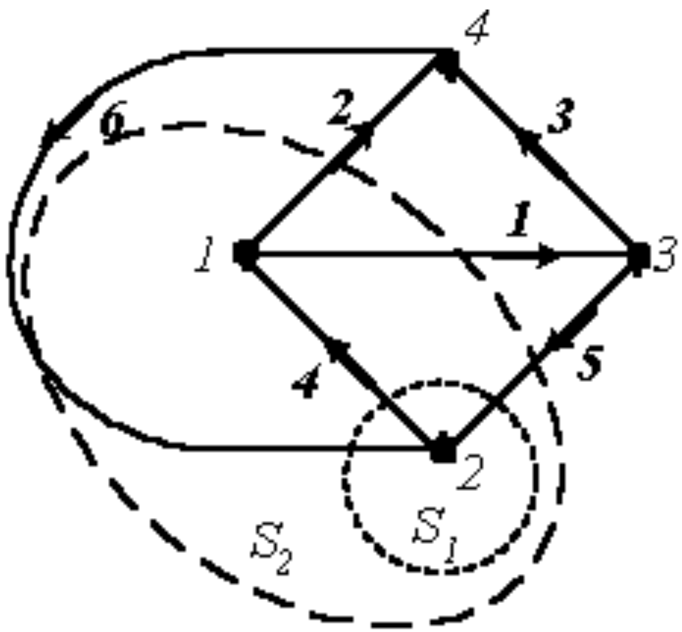
Электрическая цепь характеризуется совокупностью элементов, из которых она состоит, и способом их соединения. Соединение элементов электрической цепи наглядно отображается ее схемой. Рассмотрим для примера две электрические схемы





Представленные схемы различны и по форме, и по назначению, но каждая из указанных цепей содержит по 6 ветвей и 4 узла, одинаково соединенных. Таким образом, в смысле геометрии (топологии) соединений ветвей данные схемы идентичны.

ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называется **графом** электрической цепи. При этом следует помнить, что ветви могут состоять из каких-либо элементов, в свою очередь соединенных различным образом.

ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

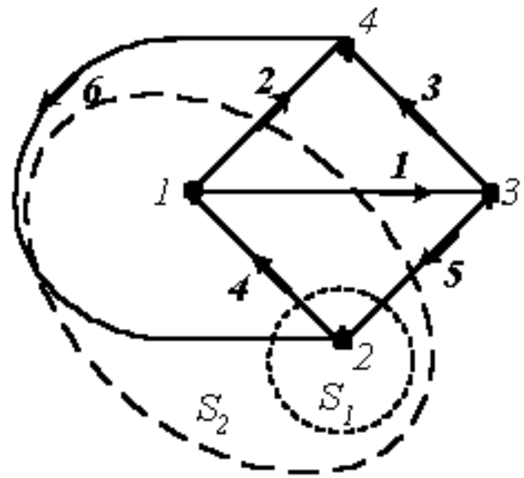
Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называется **ветвью** графа.

Граничные точки ветви графа называют **узлами** графа.

Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называется **ориентированным**.

Подграфом графа называется часть графа, т.е. это может быть одна ветвь или один изолированный узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в графе.

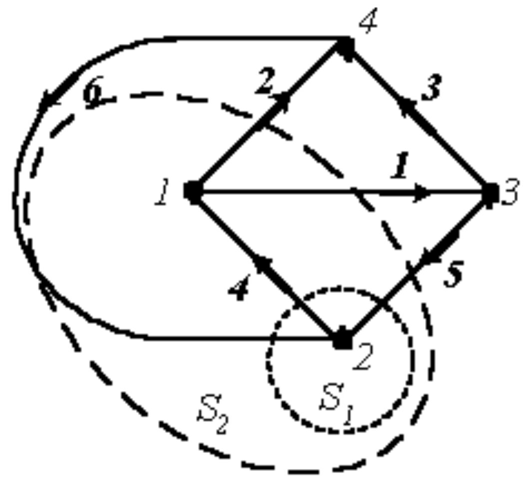
ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



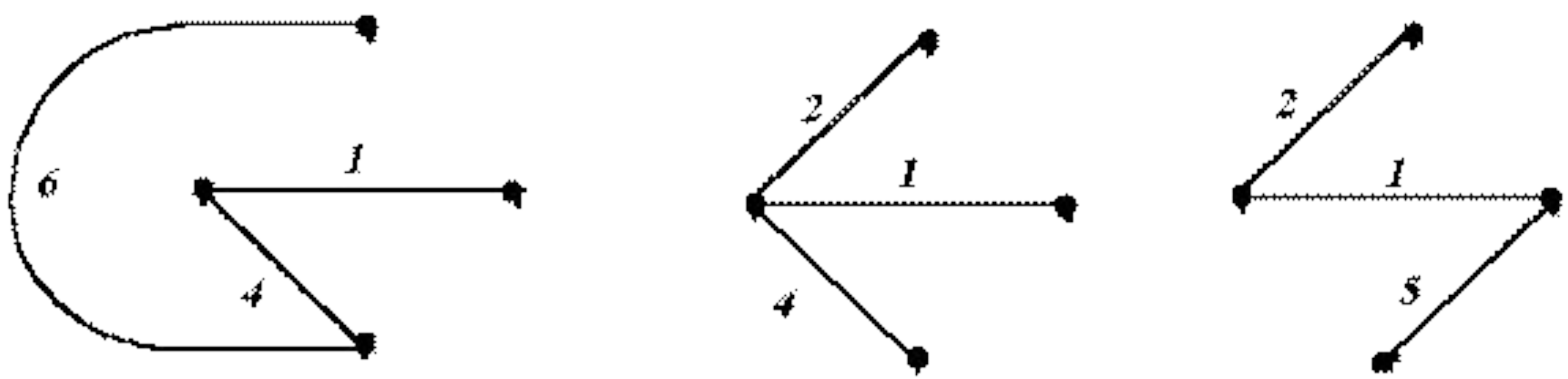
1. Путь – это упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседние ветви имеют общий узел, причем любая ветвь и любой узел встречаются на этом пути только один раз. Например, в схеме на рисунке ветви 2-6-5; 4-5; 3-6-4; 1 образуют пути между одной и той же парой узлов 1 и 3. Таким образом, путь – это совокупность ветвей, проходимых непрерывно.

2. Контур – замкнутый путь, в котором один из узлов является начальным и конечным узлом пути. Например, для графа по рисунку можно определить контуры, образованные ветвями 2-4-6; 3-5-6; 2-3-5-4. Если между любой парой узлов графа существует связь, то граф называют

ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



3. Дерево – это связный подграф, содержащий все узлы графа, но ни одного контура. Примерами деревьев для графа могут служить фигуры.



ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4. Ветви связи (дополнения дерева) – это ветви графа, дополняющие дерево до исходного графа.
Если граф содержит ***m*** узлов и ***n*** ветвей, то число ветвей любого дерева

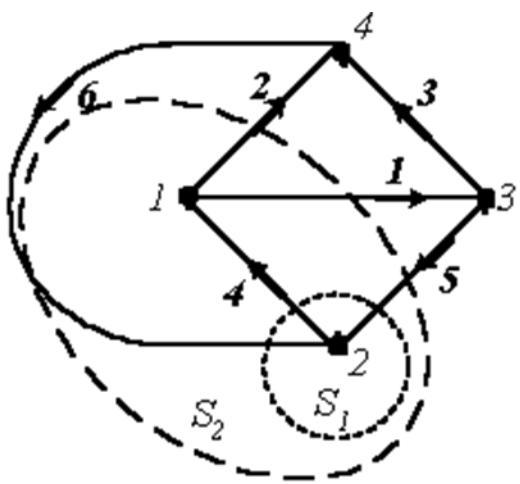
$$\partial = m - 1,$$

а числа ветвей связи графа

$$c = n - (m - 1) = n - m + 1.$$

ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

5. Сечение графа – множество ветвей, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть отдельным узлом.

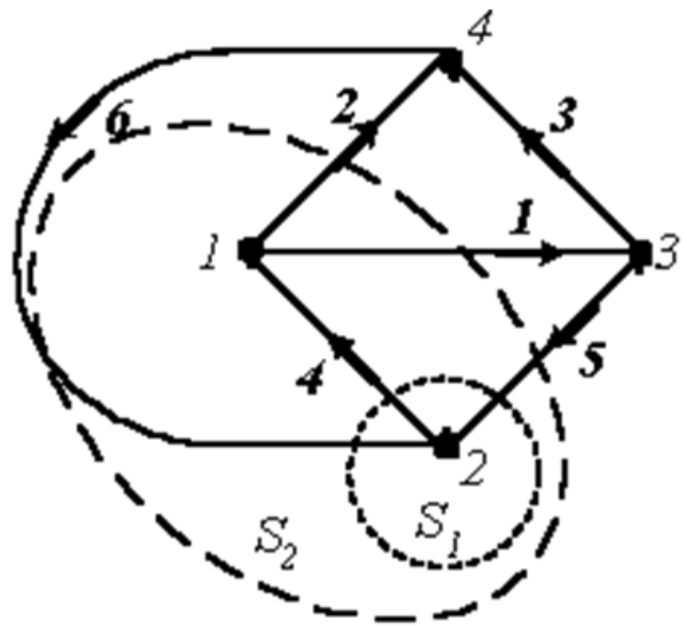


Сечение можно наглядно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, рассекающей соответствующие ветви. Примерами таких поверхностей являются для нашего графа S_1 и S_2. При этом получаем соответственно сечения, образованные ветвями 6-4-5 и 6-2-1-5.

ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

С понятием дерева связаны понятия главных контуров и сечений:

- **главный контур** – контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи;
- **главное сечение** – сечение, состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева.



Уравнения электрического равновесия цепей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ И КОНТУРОВ

Для линейной независимости системы уравнений достаточно, чтобы каждое из входящих в систему уравнений отличалось от остальных хотя бы одной переменной.

Для линейной независимости уравнений, составленных на основании первого закона Кирхгофа, достаточно, чтобы каждое из уравнений баланса токов отличалось от других уравнений хотя бы одним током или, что то же самое, чтобы каждый из узлов или каждое из сечений, для которых составляется уравнение баланса токов, отличались бы от других узлов или сечений хотя бы одной ветвью.

Этому условию удовлетворяет система главных сечений графа, так как каждое из главных сечений, соответствующих выбранному дереву, отличается от других главных сечении по крайней мере одной ветвью а именно ветвью дерева, входящей в данное главное сечение.

Уравнения электрического равновесия цепей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ И КОНТУРОВ

Каждому дереву графа можно поставить в соответствие $m=q-1$ главных сечений и, следовательно, $m=q-1$ линейно независимое уравнение баланса токов.

Число линейно независимых уравнений баланса токов не изменится, если эти уравнения составлять не для главных сечений графа, а для узлов электрической цепи.

Следовательно, любые $q-1$ узлов электрической цепи образуют систему независимых узлов. Обычно в качестве независимых узлов, для которых составляется система независимых уравнений баланса токов, выбирают узлы с номерами от 1 до $q-1$. Для узла с номером **0**, который будем называть **базисным**, уравнений баланса токов не составляют.

Уравнения электрического равновесия цепей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ И КОНТУРОВ

Для линейной независимости уравнений, составляемых на основании второго закона Кирхгофа, достаточно, чтобы каждое из этих уравнений отличалось от остальных хотя бы одним напряжением.
Для того чтобы выделенная совокупность контуров была независимой достаточно чтобы каждый контур отличался от остальных хотя бы одной ветвью. Этому требованию удовлетворяет система главных контуров, соответствующих какому-либо дереву графа, так как каждый из главных контуров отличается от других во крайней мере соответствующей ему главной ветвью.

Уравнения электрического равновесия цепей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ И КОНТУРОВ

Для линейной независимости уравнений, составляемых на основании второго закона Кирхгофа, достаточно, чтобы каждое из этих уравнений отличалось от остальных хотя бы одним напряжением.
Для того чтобы выделенная совокупность контуров была независимой достаточно чтобы каждый контур отличался от остальных хотя бы одной ветвью. Этому требованию удовлетворяет система главных контуров, соответствующих какому-либо дереву графа, так как каждый из главных контуров отличается от других во крайней мере соответствующей ему главной ветвью.
Так как число главных контуров, соответствующих любому дереву графа, $n=p-q+1$, то в каждой цепи можно выделить n независимых контуров и составить для них n линейно

Уравнения электрического равновесия цепей

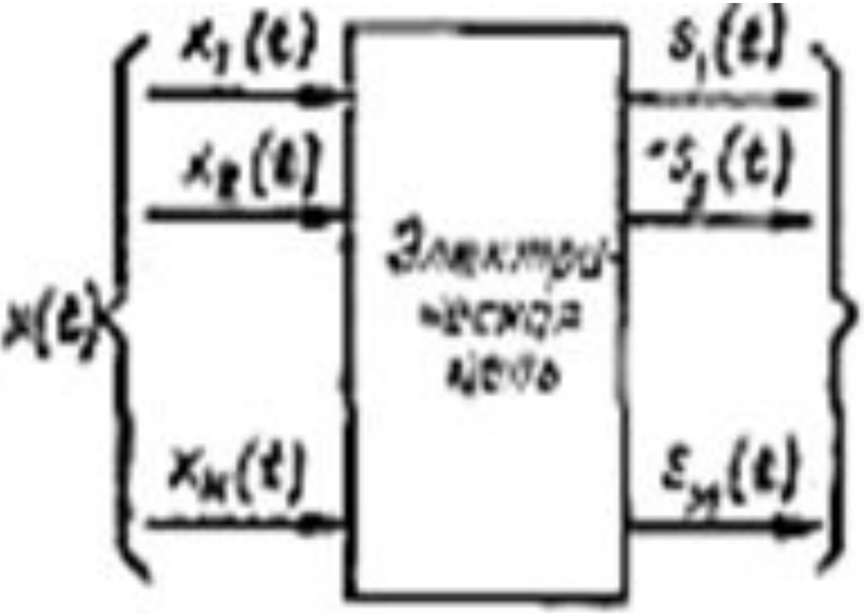
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ И КОНТУРОВ

Таким образом, общее число линейно независимых уравнений, которые можно составить для произвольной цепи на основании законов Кирхгофа, оказывается равным числу ветвей рассматриваемой цепи:

$$m + n = (q - 1) + (p - q + 1) = p$$

Уравнения электрического равновесия цепей

Основные задачи теории цепей



Любую электрическую цепь можно рассматривать как систему с одним или несколькими входами и одним или несколькими выходами. Если к входам цепи приложить внешнее воздействие , то на выходах можно обнаружить реакцию или отклик , где N, M - число входов и выходов. В зависимости от исходных данных и конечной цели исследования в теории цепей различают две группы задач: **задачи анализа** и **задачи синтеза**.

Уравнения электрического равновесия цепей

Основные задачи теории цепей

Задача анализа цепи состоит в определении реакции цепи ***s(t)*** на заданное внешнее воздействие ***x(t)***.

Задача синтеза цепи заключается в нахождении цепи по заданной реакции цепи ***s(t)*** на некоторое внешнее воздействие ***x(t)***.

Уравнения электрического равновесия цепей

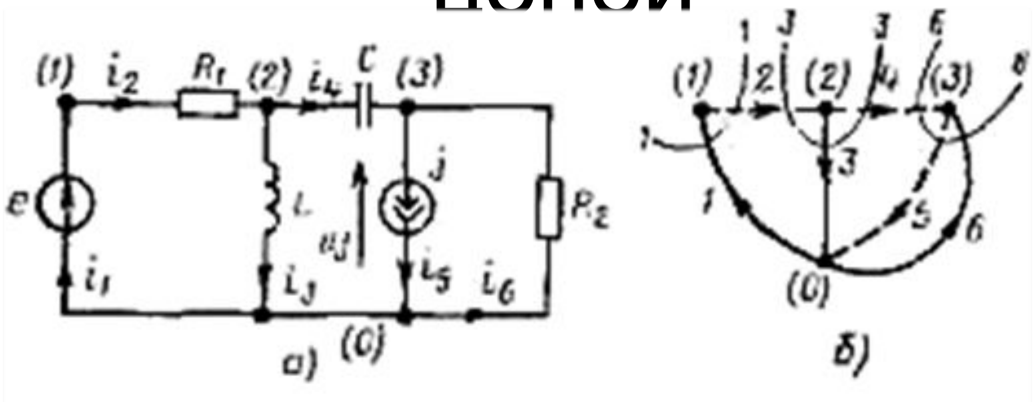
Уравнения, решение которых позволяет определить токи и напряжения ветвей электрической цепи, называются ***уравнениями электрического равновесия цепи***.

Для цепи, не содержащей вырожденных ветвей, общее число неизвестных токов и напряжений равно удвоенному числу ветвей ***2p*** (для каждой невырожденной ветви неизвестен ее ток и напряжение). Используя законы Кирхгофа, для такой цепи можно составить ***m = q - 1*** независимых уравнений баланса токов и ***n = p – q + 1*** независимых уравнений баланса напряжений. В сочетании с ***p*** компонентными уравнениями (уравнениями ветвей) получаем ***2p*** линейно независимых уравнений, что достаточно для определения неизвестных токов и напряжений ветвей.

Уравнения электрического равновесия цепей

Если в рассматриваемой цепи имеется $\boldsymbol{p}_{\text{ит}}$ ветвей, в которых содержатся идеальные источники тока (токи этих ветвей заданы, а напряжения неизвестны), и $\boldsymbol{p}_{\text{ин}}$ ветвей, составленных только из идеальных источников напряжения (напряжения этих ветвей известны), то общее число неизвестных токов и напряжений уменьшается до $2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{\text{ит}} - \boldsymbol{p}_{\text{ин}}$. Для определения этих неизвестных можно составить $2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{\text{ит}} - \boldsymbol{p}_{\text{ин}}$, линейно независимых уравнений ($\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}$ уравнений на основании законов Кирхгофа и, $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{\text{ит}} - \boldsymbol{p}_{\text{ин}}$ компонентных уравнений для невырожденных ветвей).

Уравнения электрического равновесия цепей



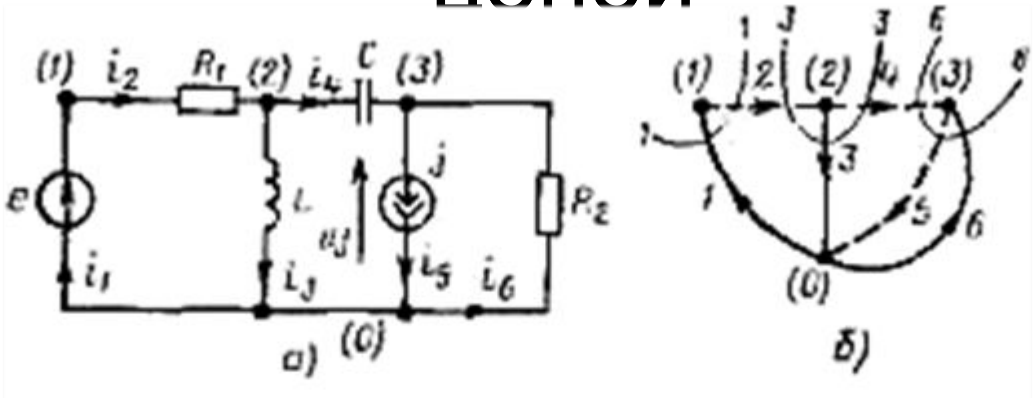
$$-i_1 + i_2 = 0 \qquad u_2 + u_3 = e(t) \qquad u_2 = R_i i_2$$

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0 \qquad -u_3 + u_4 - u_6 = 0 \qquad u_3 = L\frac{di_3}{dt}$$

$$-i_4 + i_5 - i_6 = 0 \qquad u_5 + u_6 = 0 \qquad u_6 = R_2 i_6$$

$$u_4 = u_4(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_4 dt$$

Уравнения электрического равновесия цепей



$$a_2 \frac{d^2 u_3}{dt^2} + a_1 \frac{du_3}{dt} + a_0 u_3 = f(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{LC} \qquad a_1 = \frac{L + R_1 R_2 C}{R_1 LC} \qquad a_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$f(x) = -R_2 \frac{d^2 j(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1 C} \frac{de(t)}{dt} =$$