Теория вероятности

Независимые повторные испытания

Содержание презентации

Независимые повторные испытания

Независимые повторные испытания.

- Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми повторными испытаниями.

- В разных независимых испытаниях событие А может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие А имеет одну и ту же вероятность.

Независимые повторные испытания.

Примеры:

1. Подбрасываем игральный кубик n раз. Выпадение числа очков от 1 до 6 происходит с вероятностью 1/6 в каждом из испытаний;
2. Приобретаем n лотерейных билетов. Для каждого из лотерейных билетов вероятность выигрыша есть величина постоянная;
3. Подбрасывается n раз монета. Выпадение орла или решки происходит с вероятностью ½ в каждом испытании.

Пример 1 и примеры 2,3 отличаются друг от друга тем, что в первом примере возможно появление 6-ти событий, а во втором и третьем – появление только 2-х событий: выиграл - не выиграл, орел – решка, т.е. условно можно назвать такие исходы «успех – неуспех». Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**.

Независимые повторные испытания.

Независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление события А (успех) с постоянной вероятностью p или непоявление события А (неуспех) с постоянной вероятностью q=1-p, называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли.**

Швейцарский математик
Якоб Бернулли (1654-1705).

Независимые повторные испытания

Формула Бернулли

Формула Бернулли.

Пусть производится n испытаний Бернулли. Вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно m раз можно найти по **формуле Бернулли:**

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

n – число испытаний

p – вероятность появления события A в одном испытании

q - вероятность непоявления события A в одном испытании

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие A появится ровно m раз в n испытаниях

Формула Бернулли.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию n = 7, m = 4, p = P(A) = 0.75.

По формуле Бернулли: $$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^3 = 35 \cdot 0{,}316 \cdot 0{,}0156 \approx 0{,}172$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму равна 0,1969

Формула Бернулли

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х: n=4, m=2, p=1/2, q=1/2. По формуле Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти: n=6, m=4, p=1/2, q=1/2. По формуле Бернулли:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. 3/8 > 5/16, то вероятнее выиграть одному из них 2 партии из 4-х.

Формула Бернулли

Пример. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены 6. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся:

a) менее трех цыплят $P_6(m < 3)$; (0,07047)

b) более трех цыплят $P_6(m > 3)$; (0,74431)

c) не менее трех цыплят $P_6(m \geq 3)$; (0,92953)

d) не более трех цыплят $P_6(m \leq 3)$; (0,25569)

Формула Бернулли

Пример. Две электрические лампочки включены в цепь параллельно. Вероятность того, что при некотором повышении напряжения в цепи выше номинального перегорит только одна лампочка, равна 0,18. найти вероятности перегореть для каждой из этих лампочек, если известно, что эти вероятности превосходят 0,7 и равны между собой.

Решение. Испытание состоит в проверке работы электрической лампочки. Общее число испытаний n = 2.

A – при повышении напряжения лампочка не перегорит.

По условию $P_2(1)=0{,}18$.

Требуется найти вероятность p наступления события A в каждом испытании.

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^{2-1} = 2 \cdot p \cdot (1-p) = 0.18 \Longrightarrow p^2 - p + 0.09 = 0$$

Это уравнение имеет два корня: p=0,9 и p=0,7. По условию p > 0,7. Поэтому p=0,7 не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: Вероятность того, что каждая из лампочек не перегорит p=0,9.

Независимые повторные испытания.

Наивероятнейшее число появлений события.

Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

Решение. Вероятность изготовления бракованной детали
$P = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
Искомые вероятности находим по формуле Бернулли:

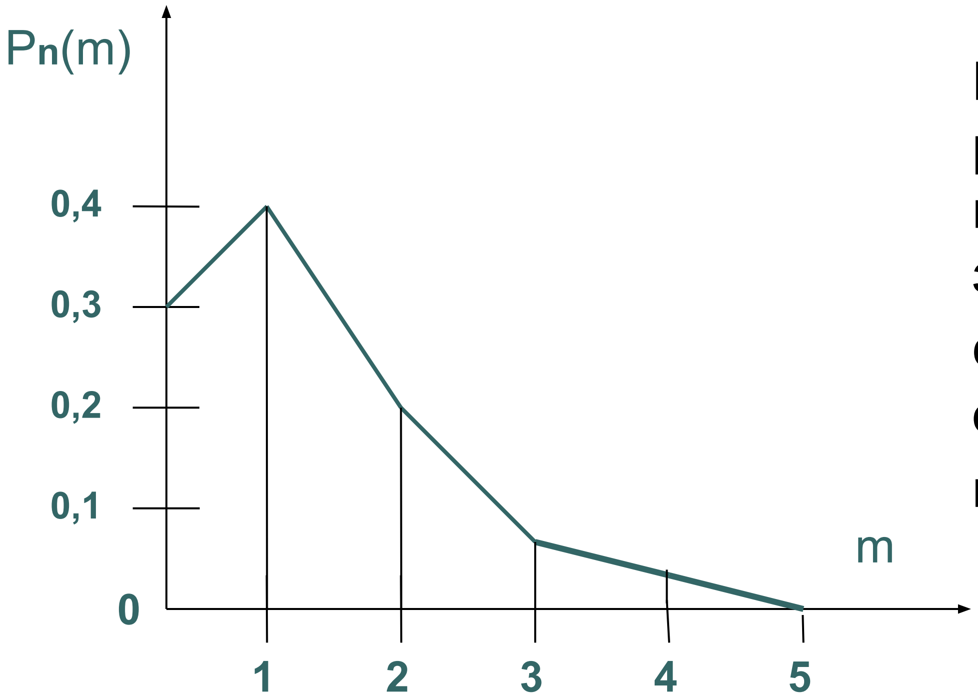
$P_5(0)=0{,}32768$; $P_5(3)=0{,}0512$;

$P_5(1)=0{,}4096$; $P_5(4)=0{,}0064$;

$P_5(2)=0{,}2048$; $P_5(5)=0{,}00032$.

Полученные вероятности изобразим графически точками с координатами $(m, P_n(m))$. Соединяя эти точки, получим **многоугольник, или полигон, распределения вероятностей.**

Наивероятнейшее число появлений события.



Рассматривая многоугольник распределения вероятностей мы видим, что есть такие значения m (в данном случае, одно - $m_0=1$), обладающие наибольшей вероятностью $P_n(m)$.

Наивероятнейшее число появлений события.

Число m_0 наступления события А в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(m_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(m)$ при любом m.

Для нахождения m_0 используется двойное неравенство:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$

Наивероятнейшее число появлений события.

Так как наивероятнейшее число может быть только **целым**, то:

a) Если границы дробные, то m_0 может принимать только одно значение;
b) Если границы целые (отличаются на 1), то m_0 может принимать два значения, равные граничным. Тогда для определения наивероятнейшего числа нужно сравнить вероятности на границах.

Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. В результате многолетних наблюдений вероятность дождя 21 июля в городе N составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет.

Решение. По условию: $p=0.3$, $q=0.7$, $n=30$.

$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$

$0.3 \cdot 30 - 0.7 \le m_0 \le 0.3 \cdot 30 + 0.3$

$8.3 \le m_0 \le 9.3$

$m_0 = 9$

Ответ: наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет равно 9.

Т.е. вероятнее всего 9 раз за 30 лет 21 июля будет дождливым.

Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

Решение. По условию: $p=1/6$, $q=5/6$, $m_0 = 10$.

$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$

$n \cdot 1/6 - 5/6 \le 10 \le n \cdot 1/6 + 1/6$ (умножим на 6)

$n - 5 \le 60 \le n + 1$ (запишем в виде двух неравенств)

$$\begin{cases} n - 5 \le 60 \\ n + 1 \ge 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \le 65 \\ n \ge 59 \end{cases}$$

Следовательно, $59 \le n \le 65$.

Ответ: чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10, игральную кость необходимо подбросить 59, 60, 61, 62, 63, 64 или 65 раз.

Наивероятнейшее число появлений события.

Задача. Склады семенного картофеля перед посадкой проверяют на отсутствие очагов гниения. В проверенном складе оказалось 20% клубней с пятнами. Найти:

a) наивероятнейшее число клубней без пятен среди 9 клубней, отобранных случайным образом; ($m_0=7$ и $m_0=8$)
b) вероятность наивероятнейшего числа клубней без пятен.

($P_9(8) = P_9(7) \approx 0.3020$)

Задача. Вероятность появления события А в каждом из n независимых испытаний равно 0,7. Сколько таких испытаний нужно произвести, чтобы наивероятнейшее число появления события А в этих испытаниях было бы равно 20? (28 или 29 испытаний)

Независимые повторные испытания.

Домашнее задание

1. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, имея 7 билетов, выиграть:
   a) по двум билетам;
   b) по трем билетам?

2. На некотором поле повреждены гербицидами 15% растений мяты рассадной посадки. Найти наивероятнейшее число поврежденных гербицидами растений мяты среди 20 растений, отобранных с этого поля случайным образом.

3. Клиентов Сбербанка обслуживают два филиала. Первый филиал за рабочий день обслужил 120 клиентов, второй — 140 клиентов. Вероятность того, что эти клиенты взяли деньги со счетов, составляет соответственно 0,94 и 0,8. Найти наивероятнейшее число клиентов, взявших деньги со своих счетов. Какой из филиалов обслуживает больше клиентов?

Независимые повторные испытания.

Локальная теорема Лапласа.

Локальная теорема Лапласа.

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если

n = 50, m = 30, p=0,1, то для отыскания вероятности $P_{30}(50)$ надо вычислить выражение

$$P_{50}(30) = C_{50}^{30} \cdot 0{,}1^{30} \cdot 0{,}9^{20}$$

Нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. **Локальная теорема Лапласа** и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Локальная теорема Лапласа.

Лаплас Пьер Симон

(23.03.1749 - 05.03.1827), Нормандия

"То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, что мы не знаем".

Локальная теорема Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

где

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Локальная теорема Лапласа.

Замечание. Для частного случая, а именно для p=1/2, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром.

В 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют теоремой Муавра—Лапласа.

Абрахам де Муавр

(26.05.1667 – 27.11.1754), Франция.

По легенде, Муавр точно предсказал день собственной смерти. Обнаружив, что продолжительность его сна стала увеличиваться в арифметической прогрессии, он легко вычислил, когда она достигнет 24 часов, и, как всегда, не ошибся.

Локальная теорема Лапласа.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

составлена таблица значений функции $\varphi(x)$.

Пользуясь этой таблицей, необходимо иметь в виду **свойства функции** $\varphi(x)$:

1. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$
2. Функция $\varphi(x)$ — монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при $x \to \infty,\ \varphi(x) \to 0.$

(Практически можно считать, что уже при x > 5 $\varphi(x) \approx 0$).

Теорему Муавра-Лапласа применяют при n·p·q ≥ 10.

Локальная теорема Лапласа. Алгоритм решения

1. Находим n·p·q. Если n·p·q ≥ 10, то можно применять теорему Муавра-Лапласа.
2. Вычисляем x по формуле $$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$
3. По таблице находим $$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$
4. Вычисляем вероятность $$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

Локальная теорема Лапласа.

Пример. Вероятность выхода из строя кодового замка в течение месяца равна 2%. Какова вероятность того, что в партии из 600 замков, установленных фирмой, 20 замков выйдут из строя в течение месяца.

Решение. По условию n=600, m=20, p=0.02, q=0.98. Нужно найти $P_{600}(20)$. n·p·q=600·0.02·0.98=11.76, следовательно, локальную теорему Лапласа можно применять.

1. $\sqrt{npq} = \sqrt{11.76} \approx 3.43$;

2. $x = \dfrac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{20 - 600 \cdot 0{,}02}{3{,}43} \approx 2{,}33$;

3. $\varphi(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Rightarrow$ по таблице найдем $\varphi(2{,}33) \approx 0{,}026$;

4. $P_{600}(20) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \dfrac{0.026}{3.43} \approx 0.00758$.

Локальная теорема Лапласа.

Задача. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

(*npq=64, x=0, φ(0)* ≈ 0,3989, $P_{400}(80)=\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\approx\dfrac{0{,}3989}{8}\approx 0.04986$)

Задача. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле p = 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

(*npq*=1.875, *x*=0.36, *φ(0.36)* ≈ 0,3739, $P_{10}(8)=\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\approx\dfrac{0{,}3739}{1.37}\approx 0.2729$)

Если решать эту задачу с помощью формулы Бернулли, то результат будет несколько иным: $P_{10}(8)\approx 0{,}282$. Такое расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n).

Локальная теорема Лапласа.

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.

Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна p = 80/100 = 0,8; n = 400, m = 300, q = 0,2.

1. npq = 400 · 0,8· (1—0,8) = 64 > 10, следовательно можно применять локальную формулу Муавра—Лапласа.
2. $\sqrt{npq} = \sqrt{64} = 8$;
3. $x = \dfrac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{8} \approx -2{,}5$;
4. По таблице найдем $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175$;
5. $P_{400}(300) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \dfrac{0{,}0175}{8} \approx 0.0022$.

Локальная теорема Лапласа.

Пусть в условиях предыдущего примера необходимо найти вероятность того, что от 300 до 360 семей (включительно) имеют холодильники. В этом случае по теореме сложения вероятность искомого события:

$$P_{400}(300 \le m \le 360) = P_{400}(300) + P_{400}(301) + \dots + P_{400}(360)$$

В принципе вычислить каждое слагаемое можно по локальной формуле Муавра—Лапласа, но большое количество слагаемых делает расчет весьма громоздким. В таких случаях используется **интегральная теорема Лапласа**.

Независимые повторные испытания.

Интегральная теорема Лапласа

Интегральная теорема Лапласа

Интегральная теорема Муавра—Лапласа. Если вероятность *p* наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число *m* наступления события А в *n* независимых испытаниях заключено в пределах от *a* до *b* (включительно), при достаточно большом числе *n* приближенно равна

$$P_n(a \le m \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$ где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt, \qquad x_1 = \frac{a - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \qquad x_2 = \frac{b - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Интегральная теорема Лапласа

Функция *Ф(x)* называется **функцией Лапласа.**

Свойства функции *Ф(x)*:

1. Функция *Ф(x)* нечетная, т.е. *Ф(-x) = - Ф(x).*
2. Функция Ф(x) монотонно возрастающая, причем при $x \to \infty, \ \Phi(x) \to 0.5,$ (практически можно считать, что уже при *x* > 5 *Ф(x)* ≈ 0,5).

Интегральную теорему Лапласа применяют при n·p >10.

Для функции Лапласа также имеются статистико-математические таблицы.

Интегральная теорема Лапласа

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Необходимо найти вероятность того, что из 400 семей от 300 до 360 семей (включительно) имеют холодильники.

Решение. p = 80/100 = 0,8; n = 400, q = 0,2, a = 300, b = 360.

1. $np = 0.8 \cdot 400 = 320 > 10$, значит, можно применить интегральную теорему Лапласа.
2. $x_1 = \dfrac{a - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{300 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \dfrac{-20}{8} = -2.5$; $x_2 = \dfrac{b - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{360 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \dfrac{40}{8} = 5$.
3. $\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) \approx -0,4938$, $\Phi(5) \approx 0,499997$;
4. $P_{400}(300 \le m \le 360) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,499997 - (-0,4938) = 0,993793$.

Ответ: вероятность того, что от 300 до 360 семей (включительно) имеют холодильники равна 0,993793.

Интегральная теорема Лапласа

По данным ремонтной мастерской, в течение гарантийного срока выходят из строя в среднем 12 % кинескопов. Какова вероятность того, что из 50 наугад выбранных кинескопов проработают гарантийный срок:

а) 47 кинескопов;

6) не менее 47 кинескопов;

в) менее 47 кинескопов;

г) более чем 47 кинескопов;

д) не более 47 кинескопов;

е) 50 кинескопов?

Интегральная теорема Лапласа

При скрещивании двух сортов люпина во втором поколении ожидаемым отношением алкалоидных растений к безалкалоидным является отношение 9:7. Найти вероятность того, что среди полученных 150 гибридных растений

а)половина растений будут алкалоидными?

б)Более половины растений будут алкалоидными?

($p = 9/16 \approx 0{,}5625$; $P_{150}(75) \approx 0{,}02$, $P_{150}(76 \le m \le 150) \approx 0{,}9382$)

Интегральная теорема Лапласа

Домашнее задание:

1. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных детей мальчиков будет:

a) не менее половины;

$$P_{1000}(500 \le m \le 1000) \approx \Phi(31) - \Phi(-0{,}63) \approx 0{,}5 - (-0{,}2357) = 0{,}7357.$$

b) менее половины.

$$P_{1000}(0 \le m < 499) = 0{,}2643$$

Принять, что вероятность рождения мальчика равна 0,51.

2. При уборке картофеля повреждается в среднем 10% клубней. Найти вероятность того, что в случайной выборке из 200 клубней повреждено от 15 до 50 клубней.

($P_{200}(15 \le m \le 50) \approx 0{,}881$)

Независимые повторные испытания.

Формула Пуассона.

Формула Пуассона.

- Если число независимых испытаний *n* достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании отлична от 0 и 1 и мала (p – близка к 0), так что $n \cdot p \le 10$, то для вычисления вероятности появления события *k* раз применяют **формулу Пуассона.**

Пуассон Симеон
(21.06.1781 - 25.04.1840)
Французский учёный, член Парижской АН, почётный член Петербургской АН.
Труды Пуассона относятся к теоретической и небесной механике, математике и математической физике.

Формула Пуассона.

Теорема. Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянно близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А наступит m раз приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda = n \cdot p$$

Формулу Пуассона можно применять при $\lambda \leq 10$.

Существуют статистико-математические таблицы для распределения Пуассона.

Формула Пуассона.

Пример. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

Решение. Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна p = 1/365. Так как p = 1/365 — мала, n = 1825 — велико и

λ = np = 1825 • (1/365) = 5 < 10, то применяем формулу Пуассона:

$$P_{1825}(4) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} = \frac{625}{24 \cdot e^5} = \frac{625}{24 \cdot 2.7^5} \approx \frac{625}{3443.7377} \approx 0.18$$

По таблицам можно точнее и быстрее найти $P(m,\lambda)$. Так для данного примера $P_{1825}(4) = P(m, \lambda) = P(4,5) \approx 0.17547$.

Ответ: вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета равна 0,17547.

Формула Пуассона.

Задача 1. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течение 1 ч работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 1000ч работы устройства придется пять раз менять микросхему? ($P_{1000}(5) \approx 0,1563$)

Задача 2. Телефонный коммутатор обслуживает 2000 абонентов. Для каждого абонента вероятность позвонить в течение часа равна 0,0025. Найти вероятность того, что в течение часа позвонят на коммутатор:

а) три абонента; ($P_{2000}(3) \approx 0,1404$)

б) не менее четырех абонентов.

$$P(F) = P_{2000}(k \geq 4) = 1 - P(\overline{F}) =$$

$$= 1 - \left(P_{2000}(0) + P_{2000}(1) + P_{2000}(2) + P_{2000}(3)\right).$$

$$P(F) = P_{2000}(k \geq 4) \approx 1 - P(0,0067 + 0,0337 + 0,0842 + 0,1404) =$$

$$= 1 - 0,265 = 0,735.$$

Независимые повторные испытания. Схема

Наивероятнейшее число

$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$

Независимые повторные испытания

n невелико, p (или q) не очень мало	n велико, p (или q) не очень мало	n велико, p (или q) очень мало
Формула Бернулли	**Формула Лапласа**	**Формула Пуассона**
$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$	$P_n(m) \approx \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$	$P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$
npq < 10	$x = \dfrac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$	$\lambda = n \cdot p$
	npq >= 10	np < 10

Таблица для Таблица для φТаблица для φ(Таблица для φ(x)

Независимые повторные испытания. Решение задач.

Задача 3. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины:
а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий;
в) не менее 480; г) от 480 до 520.

Задача 4. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

Задача 5. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.

Домашняя работа

1) С помощью зенитной установки обстреливают мишень. Вероятность попадания в цель составляет 0,7. Какова вероятность того, что из 80 произведенных на штабных учениях выстрелов достиг нут цели: а) 75 выстрелов; б) не менее 75 выстрелов; в) менее 75 выстрелов; г) не более 75 выстрелов; д) более 75 выстрелов; е) все выстрелы?
2) Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хруп кости (брак) равна 0,02. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не ме нее 1000 исправных?
3) Сколько изюма в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность иметь в булочке хотя бы одну изюмину была не менее 0,99?