Тема 2. Конвекция

Лекции 8, 9

§ 5. Ламинарный тепловой пограничный слой при вынужденном движении жидкости вдоль плоской поверхности

В § 10 темы 1 было получено выражение для толщины ламинарного гидродинамического погранслоя на плоской поверхности:

$$\delta = 4{,}64 \cdot x \cdot \mathrm{Re}_x^{-0{,}5}.$$

Для капельных неэлектропроводных жидкостей и газов

$$\frac{\delta}{\delta_T} \approx \mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Следовательно, толщина теплового погранслоя

$$\delta_T = 4{,}64 \cdot x \cdot \mathrm{Re}_x^{-0{,}5} \cdot \mathrm{Pr}^{-1/3}.$$

Для нахождения градиента температуры на плоской поверхности аппроксимируем распределение избыточной температуры с помощью полинома третьей степени:

$$\vartheta = T - T_W = a + b \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot y^3,$$

где коэффициенты a, b, c и d должны быть найдены из граничных условий:

1) при $y = 0$ $\vartheta = 0$ – очевидно;

2) при $y = 0$ $\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0;$

3) при $y = \delta_T$ $\vartheta = \vartheta_0 = T_0 - T_W = \Delta T$ (температурный напор) – очевидно;

4) при $y = \delta_T$ $\partial\vartheta/\partial y = 0$ – условие плавности профиля температуры.

Для того чтобы убедиться в истинности 2)-го условия, необходимо воспользоваться уравнением энергии для пограничного слоя.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) -$$

исходное уравнение для несжимаемой жидкости.

1. Поток стационарен $\Rightarrow \partial T / \partial t = 0$.
2. Поскольку поверхность бесконечна по оси z и никаких изменений в этом направлении не происходит, то $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \cdot$
3. В связи с малой толщиной теплового погранслоя все величины изменяются по его толщине значительно быстрее, чем по длине, то есть $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} << \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.

Имеем:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \; -$$

уравнение энергии для ламинарного теплового погранслоя, называемое уравнением Польгаузена (аналог 1-го уравнения Прандтля – см. § 8 темы 1).

На поверхности пластины, т.е. при y = 0 u = 0 (условие прилипания) и v = 0 (условие непроницаемости поверхности пластины, справедливое при малой интенсивности массообмена между пластиной и потоком). Следовательно,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \text{ что то же, что и } \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \; -$$

подтвердили 2)-е условие.

В связи с идентичностью граничных условий для скорости и для избыточной температуры и аналогичного их описания, константы полинома имеют тот же вид, что и в § 10 темы 1:

$$a = 0; \quad b = \frac{3}{2} \cdot \frac{\vartheta_0}{\delta_T}; \quad c = 0; \quad d = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta_0}{\delta_T^3}.$$

Таким образом, профиль избыточной температуры имеет приближенно следующий вид:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\vartheta_0}{\delta_T}.$$

Из уравнения конвективной теплоотдачи найдем коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\Delta T} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Подставляя значение производной избыточной температуры в формулу для α, найдем

$$\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{\delta_T}.$$

Подставив в последнюю формулу выражение для δ_T (слайд 2), найдем, как изменяется α по длине плоской поверхности:

$$\alpha = 0{,}332 \cdot \frac{\lambda}{x} \cdot Re_x^{0,5} \cdot Pr^{1/3}.$$

Введем безразмерный коэффициент теплоотдачи:

$$\frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = \mathrm{Nu} \text{ – критерий Нуссельта.}$$

Вильгельм Нуссельт (1882–1957) – немецкий инженер и физик, создатель теории подобия в теплообмене. В 1915 году Нуссельт опубликовал новаторскую работу «Основные законы переноса тепла»: здесь он использовал безразмерные группы, известные теперь как критерии подобия в теплообмене. Основными математическими работами Нуссельта являются решения для ламинарного теплообмена в пучке труб и основы теории регенераторов.

Тогда формулу для коэффициента теплоотдачи можно переписать в виде:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}332 \cdot \mathrm{Re}_x^{0{,}5} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Полученная формула дает локальное значение α, однако в практических расчетах удобнее иметь дело со средним по поверхности значением этой величины.

Тогда представляется возможным определить суммарный поток теплоты на этой поверхности по формуле:

$$Q_W = \overline{\alpha}\cdot\Delta T\cdot F\,.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае безграничной в направлении z пластины среднее по поверхности значение любой величины определяется путем ее усреднения по некоторой длине:

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{L}\cdot\int_0^L \alpha(x)\,dx = \frac{1}{L}\cdot\int_0^L c\cdot x^{-1/2}dx = \frac{1}{L}\cdot c\cdot 2\cdot L^{1/2} = \cdot 2\cdot c\cdot L^{-1/2},$$

то есть среднее по длине значение коэффициента теплоотдачи равно удвоенному локальному его значению в конце этой длины.

Таким образом, критериальная формула для среднего коэффициента теплоотдачи в случае плоской поверхности имеет вид:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}664 \cdot \mathrm{Re}_L^{0,5} \cdot \mathrm{Pr}^{1/3}.$$

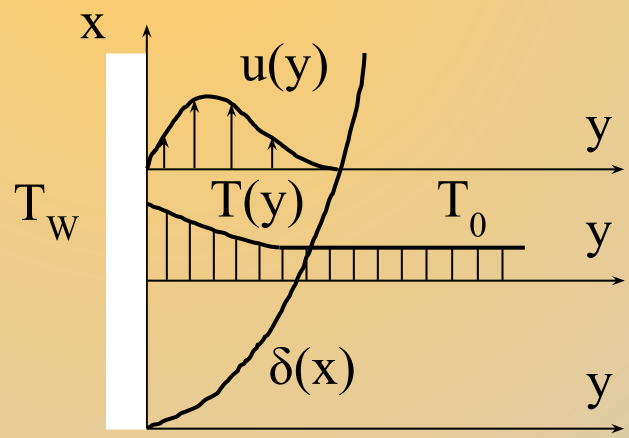
где $\overline{\mathrm{Nu}} = \dfrac{\overline{\alpha} \cdot L}{\lambda}$, $\mathrm{Re}_L = \dfrac{u_0 \cdot L}{\nu}$.

Физические параметры, входящие в подобные формулы (λ, ν, a) зависят от температуры, этот факт можно приближенно учесть, взяв значения этих параметров при средней по толщине погранслоя температуре:

$$T_M = \frac{T_0 + T_W}{2}.$$

§ 6. Конвективная теплоотдача при свободном движении

Понятие пограничного слоя может быть применено и для свободноконвективного движения жидкости, например, вблизи нагретой вертикальной плоской поверхности. Распределение температуры принципиально не отличается от случая вынужденного движения:



Выясним, какой вид должна иметь безразмерная величина, характеризующая свободноконвективное движение.

На элементарный объем dV, плотность среды в котором меньше плотности окружающей жидкости на величину $\Delta\rho$, действует архимедова сила

$$dF_A = \Delta\rho \cdot g \cdot dV\ .$$

В качестве разности плотностей можно выбрать величину

$$\Delta\rho = \rho_0 - \rho_W\ ,$$

где ρ_0 – плотность жидкости при температуре T_0,

ρ_W – то же при температуре T_W.

Порядок объемной плотности архимедовой силы

$$o(f_A) = \frac{dF_A}{dV} \approx \Delta\rho \cdot g\ .$$

Как это следует из уравнения Навье-Стокса, в частном случае одномерного стационарного движения объемная плотность силы инерции

$$f_И = \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

а ее порядок

$$o(f_И) \approx \frac{\rho_0 \cdot u_0^2}{l_0},$$

где ρ_0, u_0, l_0 – характерные величины плотности, скорости и характерный размер потока.

Из уравнения Прандтля для гидродинамического погранслоя следует, что

$$f_{ТР} = \rho \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

следовательно,

$$o(f_{ТР}) \approx \frac{\rho_0 \cdot \nu \cdot u_0}{l_0^2}.$$

С учетом требования безразмерности величина, характеризующая соотношение архимедовой силы, сил инерции и трения, выразится следующим образом:

$$\frac{o(f_A)\cdot o(f_И)}{\left[o(f_{ТР})\right]^2} = \frac{g\cdot l_0^3}{\nu^2}\cdot\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = Ar$$ – критерий Архимеда,

определяющий движение жидкости в условиях свободной конвекции

Архимед (около 287–212 до н.э.) – древнегреческий математик и механик, основоположник теоретической механики и гидростатики. В трактате «О равновесии плоских фигур» ввел понятие центра тяжести и предложил методы его определения для различных тел. Широкую известность получил закон Архимеда, изложенный в его трактате «О плавающих телах»: на всякое тело, погруженное в жидкость, действует поддерживающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости, направленная вверх и приложенная к центру тяжести вытесненного объема.

Если изменение плотности обусловлено термическим расширением среды, критерий Архимеда принимает специфическую форму, которую можно получить следующим образом.

Термическое расширение характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения, выражающего относительное изменение удельного объема при изменении температуры на 1 К:

$$\beta = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T}, \ K^{-1},$$

где v – удельный объем жидкости, то есть величина, обратная плотности.

Принимая неизменным значение этой величины при изменении температуры от одного характерного значения до другого, получим:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho_W - \rho_0}{T_0 - T_W} \quad \Rightarrow \quad \Delta\rho = \rho_0 - \rho_W = \rho_0 \cdot \beta \cdot \Delta T .$$

Подставив выражение для Δρ в формулу для критерия Архимеда, получим:

$$\frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot l_0^3}{\nu^2} = \mathrm{Gr}$$ – критерий Грасгофа.

Франц Грасгоф (1826–1893) – немецкий механик и машиностроитель. Был сторонником аналитических методов в механике. Работал также в области гидравлики, теплотехники. Его главный труд – «Теоретическое машиноведение» (тт. 1-3, 1875-1890).

Фото из «Альбома течений жидкости и газа» М. Ван-Дайка

Свободная конвекция от вертикальной пластинки.
Пластинка была равномерно нагрета в воздухе; это создает установившееся ламинарное течение. Интерферограмма демонстрирует линии постоянной плотности, которые являются также и изотермами, поскольку давление остается почти постоянным. Число Грасгофа равно приблизительно 5 млн. на расстоянии 0,1 м от нижнего края пластинки, так что тепловой пограничный слой оказывается сравнительно толстым. [Eckert, Soehngen, 1948]

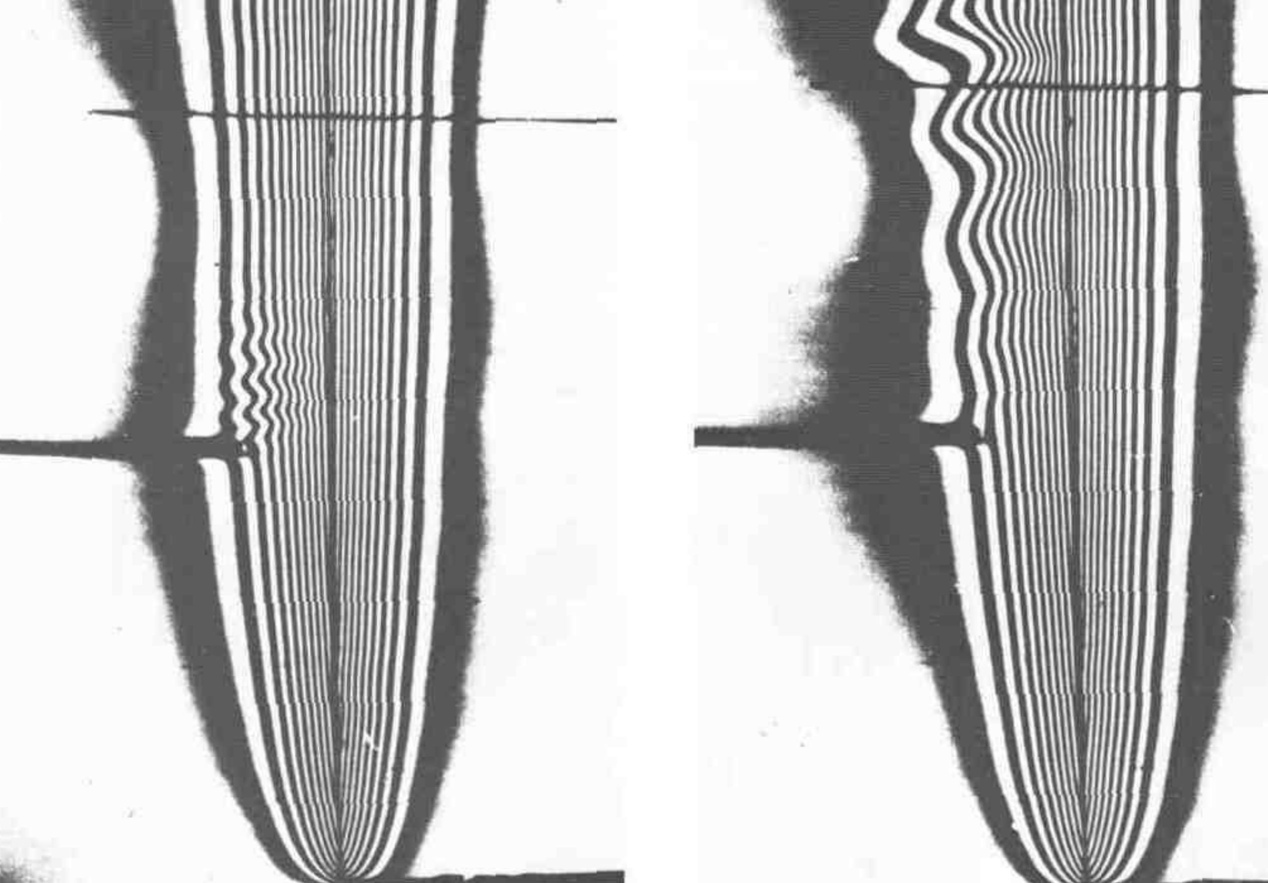


Фото из «Альбома течений жидкости и газа» М. Ван-Дайка

Неустойчивость конвекции от вертикальной пластинки. *Колеблющаяся лента помещена в ламинарный свободно-конвективный пограничный слой на нагреваемой электрическим током фольге в атмосфере азота при давлении 16 атм. Интерферограммы, растянутые по ширине в шесть раз, демонстрируют возмущения, затухающие на левом снимке при частоте 11,5 Гц и усиливающиеся на правом снимке при частоте 3 Гц в согласии с линейной теорией устойчивости. [Polymeropoulos, Gebhart, 1967]*

Свободная конвекция от горизонтального цилиндра. *Круговой цилиндр диаметром 6 см и длиной 60 см равномерно нагрет до температуры, превышающей температуру окружающего воздуха на 9ºС, что дает число Грасгофа, равное 30000. Интерферограмма демонстрирует тепловые пограничные слои, сливающиеся сверху и создающие стационарный ламинарный факел, аналогичный показанному на слайде 20 предыдущей лекции. Фото U. Grigull, W. Hauf*

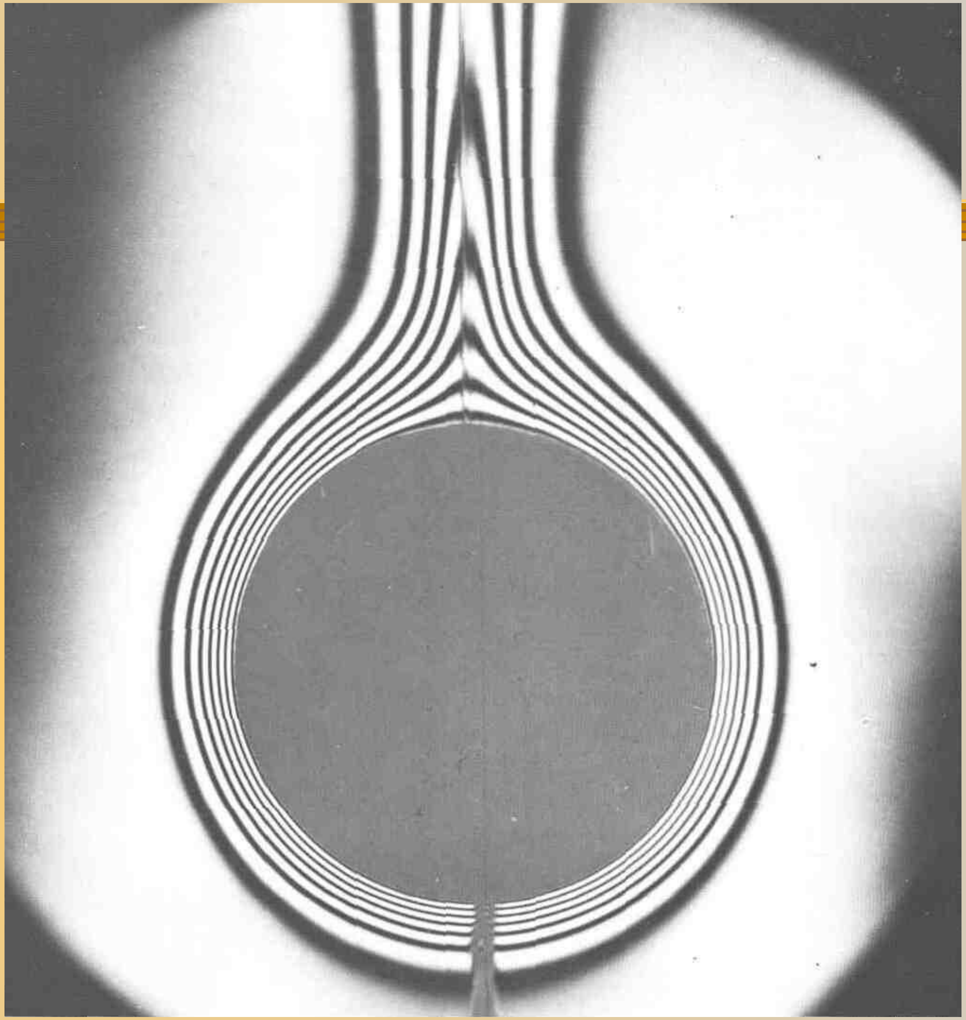


Фото из «Альбома течений жидкости и газа» М. Ван-Дайка

Пограничные слои, образующиеся при нагревании и сливающиеся в верхней части цилиндра. *Частицы пластика, освещаемые в воде, демонстрируют структуру линий тока в условиях, когда ламинарные свободно-конвективные пограничные слои с обеих сторон цилиндра соединяются и образуют факел. Отрыва в потоке, по-видимому, не происходит. [Pera, Gebhart, 1972]*

Фото из «Альбома течений жидкости и газа» М. Ван-Дайка

Фото
из «Альбома
течений
жидкости
и газа»
М. Ван-Дайка

Свободная конвекция от трех горизонтальных цилиндров.
Интерферограмма демонстрирует ламинарные конвективные факелы в воздухе, отходящие от каждого из двух нагретых цилиндров и обволакивающие тепловой пограничный слой третьего цилиндра, расположенного выше. [Eckert, Soehngen, 1948]