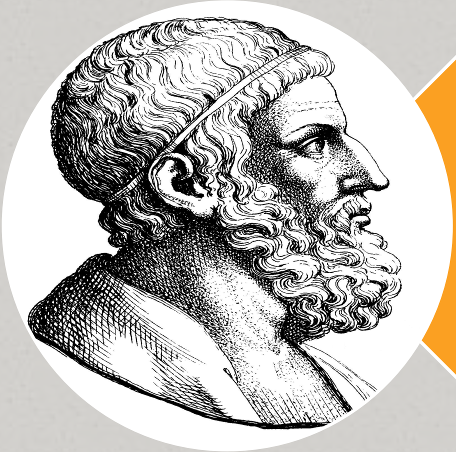
Тема: *«Использование определенного интеграла при решении экономических задач»*

Немного истории

История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур.

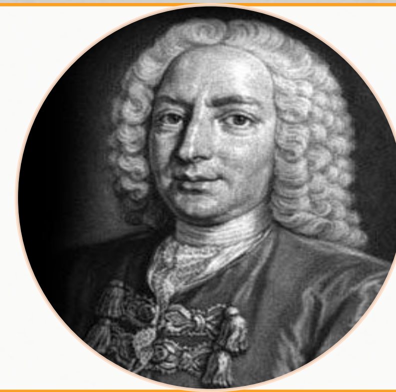
Задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции называли задачи на вычисление площадей. Необходимость в специальном термине объясняется тем, что в античное время еще не были достаточно развиты привычные для нас представления о действительных числах. Поэтому и задачи на нахождение площадей приходилось формулировать, например, так: «Построить квадрат, равновеликий данному кругу».

Многие достижения математиков древней Греции в решении задач о нахождении квадратур (площадей) и кубатур (объемов) тел связаны с применением метода исчерпывания, предложенным Евдоксом Книдским (ок.408 – ок.355 гг.до н.э.)



Метод Евдокса был усовершенствован Архимедом (ок.287 – 212 гг.до н.э.). Его идеи, связанные с вычислением площадей и объемов тел, решением задач механики, по существу, предвосхищают открытие математического анализа и интегрального исчисления, сделанное почти 2000 лет спустя.

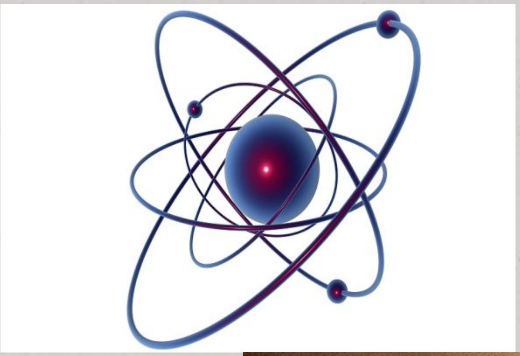
Символ интеграла введен Лейбницем (1675г.) Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма).

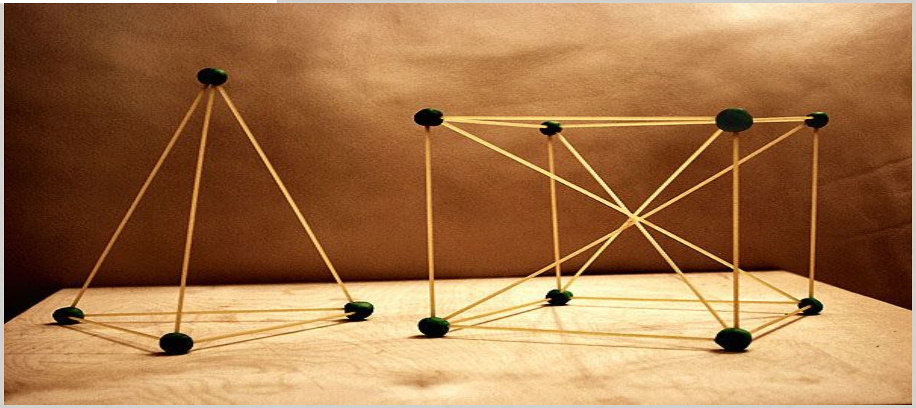


Само слово «интеграл» придумал Я.Бернулли (1690г.). Вероятно, оно происходит от латинского integero («приводить в прежнее состояние, восстанавливать»).

В ходе переписки Я. Бернулли и Г. Лейбниц согласились с предложением Я. Бернулли. Тогда же в 1696г. появилось и название новой ветви математики - интегральное исчисление (calculus integralis), которое ввел Я. Бернулли.

В современном мире понятие «определенный интеграл» используется не только в алгебре и математическом анализе, но и в таких дисциплинах, как физика, экономика и геометрия. Более детальному рассмотрению использования этого понятия при решении экономических задач и посвящена
данная работа.

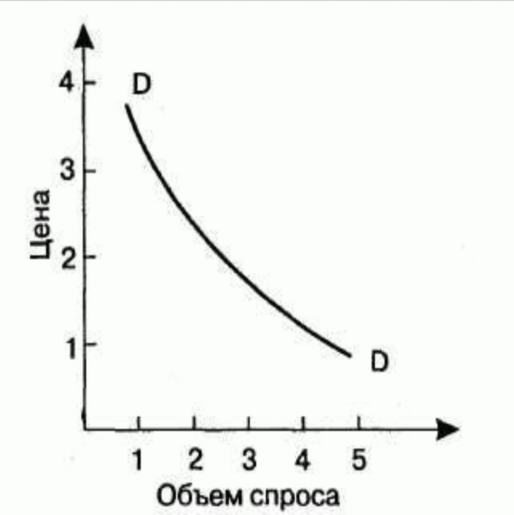




Определенный интеграл в экономике

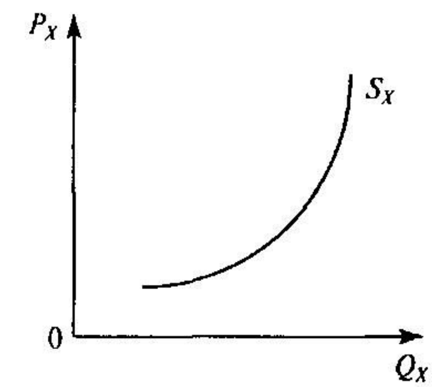
С помощью такого понятия, как «определенный интеграл» можно вычислить потребительский излишек (CS – *consumer`s surplus*). Спрос на данный товар (D–*demand*) – это сложившаяся на определенный момент времени зависимость между ценой товара и объемом его покупки. Спрос на отдельный товар графически изображается в виде кривой с отрицательным наклоном, отражающей взаимосвязь между ценой P (*price*) единицы этого товара и количеством товара Q (*quantity*), которое потребители готовы купить при каждой заданной цене.

Отрицательный наклон кривой спроса имеет очевидное объяснение: чем дороже товар, тем меньше количество товара, которое покупатели готовы купить, и наоборот.



Определенный интеграл в экономике

Аналогично определяется и другое ключевое понятие экономической теории – предложение (S–supply) товара: сложившаяся на определенный Момент времени зависимость между ценой товара и количеством товара, предлагаемого к продаже. Предложение отдельного товара изображается графически в виде кривой с положительным наклоном, отражающей взаимосвязь между ценой единицы этого товара P и количеством товара Q, которое потребители готовы продать при каждой цене.



Кривая предложения

Еще одно понятие, играющее большую роль в моделировании экономических процессов – рыночное равновесие (equilibrium). Состояние равновесия характеризуют такие Цена и количество, при которых объем спроса совпадает с величиной предложения, а графически рыночное равновесие изображается точкой пересечения кривых спроса и предложения.

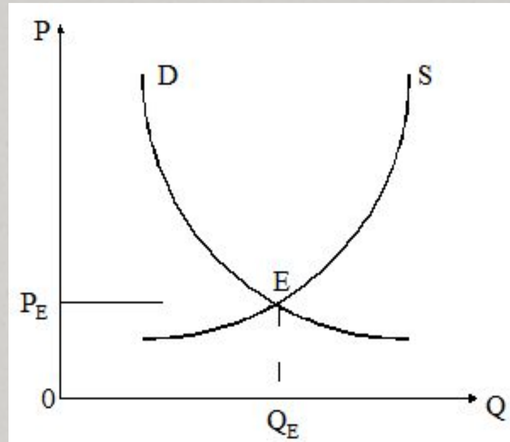


Рис. Рыночное равновесие

Применение определенного интеграла

Перейдем теперь к рассмотрению приложений интегрального анализа для определения потребительского излишка. Допустим, что рыночное равновесие установилось в точке $E_0(P_0; Q_0)$ (кривая предложения на графике отсутствует для удобства дальнейшего анализа, рис.1.1.1.).

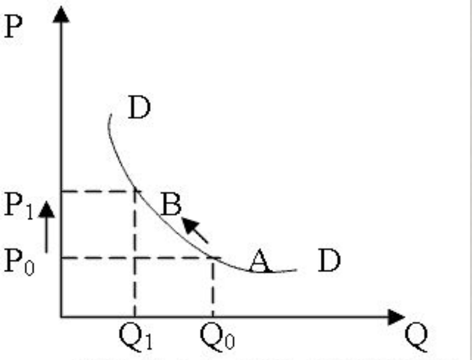


Рис. 1.1.1. Кривая спроса.

Если покупатель приобретает товар в количестве Q_0 по равновесной цене P_0, то общие расходы на покупку такого товара составят P_0Q_0, что составит площадь прямоугольника $OQ_0E_0P_0$.

Но предположим, что товар в количестве Q_0 продается продавцами не сразу, а поступает на рынок небольшими партиями ΔQ. Именно такое допущение вместе с предположением о непрерывности функции спроса и предложения является основным при выводе формулы для расчета потребительского излишка. Стоит отметить, что данное допущение вполне оправдано, потому что такая схема реализации товара довольно распространена на практике и вытекает из цели продавца поддерживать цену на товар как можно выше.

Тогда получим, что сначала предлагается товар в количестве $Q_1 = \Delta Q$, который продается по цене $P_1 = f(Q_1)$. Так как по предположению величина ΔQ мала, то можно считать, что вся первая партия товара реализуется по цене P_1, при этом затраты покупателя на покупку такого количества товара составят $P_1\Delta Q$. Далее на рынок поступает вторая партия товара в том же количестве, которая продается по цене $P_2 = f(Q_2)$, где $Q_2 = Q_1 + \Delta Q$ – общее количество реализованной продукции, а затраты покупателя на покупку второй партии составят $P_2\Delta Q$.

Применение определенного интеграла

Продолжим процесс до тех пор, пока не дойдем до равновесного количества товара $Q_0 = Q_n$. Тогда становится ясно, какой должна быть величина ΔQ для того, чтобы процесс продажи товара закончился в точке Q_0. В результате получим, что цена n-й партии товара

$P = f(Q_n) = f(Q_0) = P_0$, а затраты потребителей на покупку этой последней партии товара составят $P_n \Delta Q$, или площадь прямоугольника S_n.

Таким образом, мы получим, что суммарные затраты потребителей при покупке товара мелкими партиями ΔQ равны:

$$SB = \int_0^{Q0} f(Q)dQ$$

Вспомнив, что каждая точка на кривой спроса $P_i = f(Q_i):(i = 1, 2, ..., k)$ показывает, какую сумму потребитель готов заплатить за покупку дополнительной единицы продукта, получим, что площадь фигуры B соответствует общей денежной сумме, которую потребитель готов потратить на покупку Q_0 единиц товара. Разность между площадью фигуры B и площадью прямоугольника $OQ_0E_0P_0$ есть потребительский излишек при покупке данного товара – превышение общей стоимости, которую потребитель готов уплатить за все единицы товара, над его реальными расходами на их приобретение. Таким образом, потребительский излишек можно посчитать по следующей формуле:

$$CS = \int_0^{Q0} f\,(Q)dQ - P_0Q_0.$$

Применение определенного интеграла

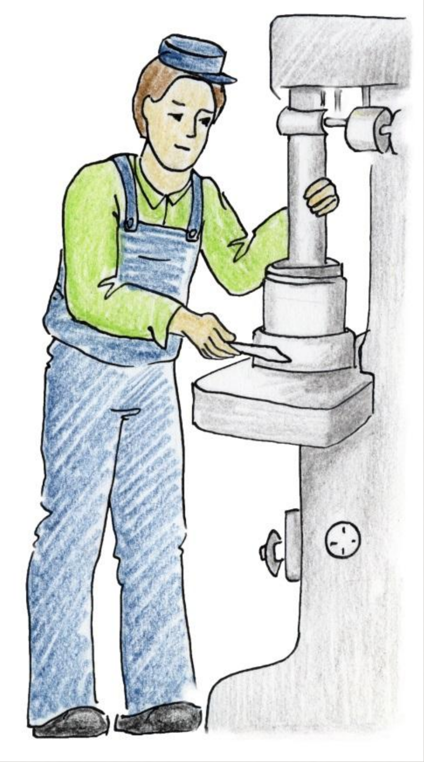
- Вспомнив, что каждая точка на кривой спроса Pi = f(Qi):(i = 1, 2, ..., k) показывает, какую сумму потребитель готов заплатить за покупку дополнительной единицы продукта, получим, что площадь фигуры B соответствует общей денежной сумме, которую потребитель готов потратить на покупку Q_0 единиц товара. Разность между площадью фигуры B и площадью прямоугольника $OQ_0E_0P_0$ есть потребительский излишек при покупке данного товара – превышение общей стоимости, которую потребитель готов уплатить за все единицы товара, над его реальными расходами на их приобретение. Таким образом, потребительский излишек можно посчитать по следующей формуле:

$$CS = \int_0^{Q0} f(Q)dQ - P_0Q_0.$$

Примеры

С помощью определенного интеграла решаются также задачи на определение объема продукции, произведенной за определенный промежуток времени.

Пример. Найти объем продукции, произведенной рабочим за четвертый час рабочего дня, если производительность труда характеризуется следующей функцией: $f(t) = 5 + \frac{3}{1+3t}$



Решение: Если непрерывная функция f(t) характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то V продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2, будет выражаться формулой:

$V = \int_{t1}^{t2} f(t)dt,$

$V = \int_3^4 (5 + \frac{3}{1+3t})dt = 5\int_3^4 dt + 3\int_3^4 \frac{dt}{1+3t} =$

$5t \,|_3^4 + \frac{3}{3}\int_4^4 \frac{d(1+3t)}{1+3t} = [5t + In(3t+1)] \,|_3^4 =$

$20 + \ln 13 - 15 - \ln 10 = 5 + \ln 1{,}3 \sim 5{,}3$ (ед.)

Ответ: за 4-й час рабочий произведет 5 единиц продукции.

Примеры

Еще один аспект применения определенного интеграла – определение объема запаса, накопленного за определенный промежуток времени.

Пример: найти запас товаров в магазине, образуемый за 2 дня, если поступление характеризуется формулой: $f(t) = 25 + 8t$.

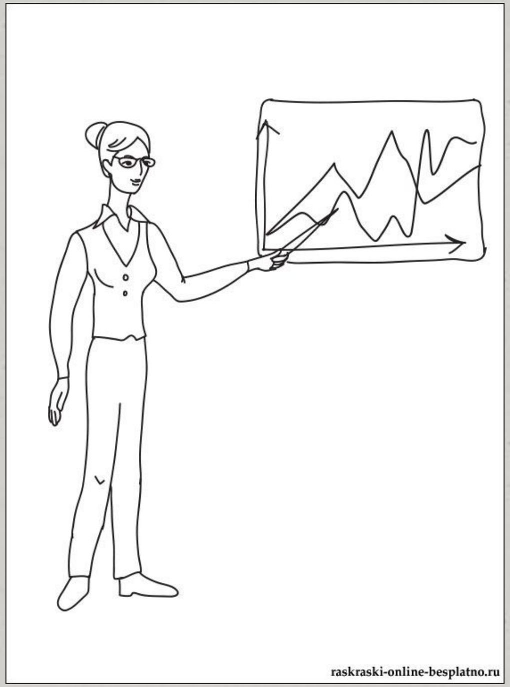
Решение. Аналогично рассуждая, становится понятно, что объем запаса находится как: $V = \int_{t1}^{t2} f\,dt$

с единственной лишь разницей: в качестве t_1 следует принять нуль, так как это позволит рассчитать объем, запасенный не только за второй день, как если бы аналогично вышеописанной задаче мы приняли за t_1 единицу, а именно за все прошедшие дни, в данной случае – за первые 2.

$$V = \int_0^2 (25 + 8t)dt = \left(25t + \frac{8t^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 50 + 16 = 66 \text{ ед.}$$

Ответ: за 2 дня при заданной функции поступления в магазине образуется 66 единиц товара запаса.

Вывод



Таким образом, рассмотренные нами основные способы решения широко применяются на практике.

Экономисты вычисляют в зависимости от различных вариантов налогообложения изменения потребительских излишков, и с учетом необходимого размера налоговых поступлений анализируют полученные результаты, останавливаются на тех вариантах, которые вызывают наименьшее сокращение потребительских выгод.

А при складывании многих отдельных излишков совокупную выгоду измеряет совокупный излишек потребителя, которую приобретают потребители, при покупке товары на рынке. Следовательно, в экономике концепция излишка потребителя имеет огромное значение.

Таким образом, определенный интеграл играет практическую роль при решении экономических задач, так как позволяет найти правильное решение при минимальных затратах времени и сил.