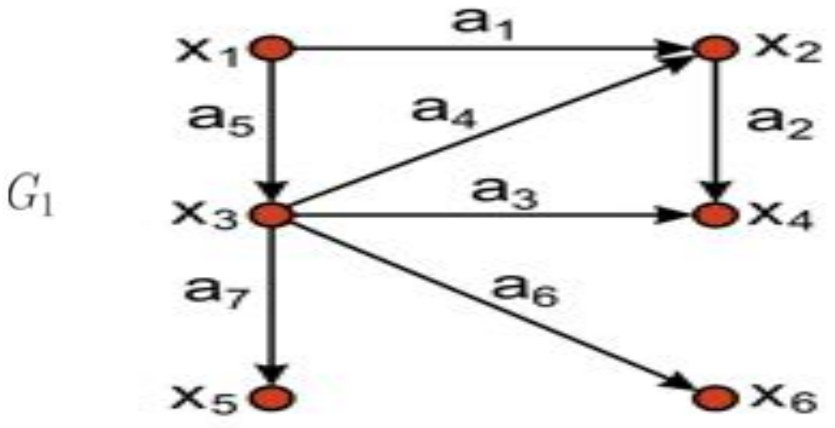
ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

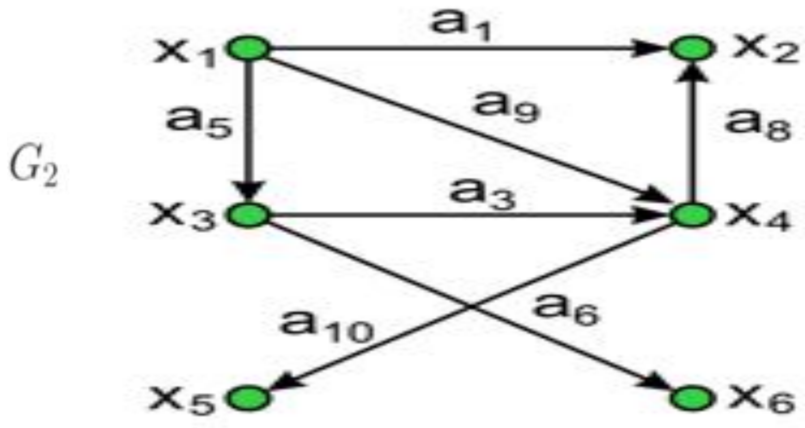
Розглянемо сім операцій над *графами*, три з яких є бінарними, включають два графа, а інші чотири - унарні, тобто визначені на одному графі.



а

$A_1 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						



б

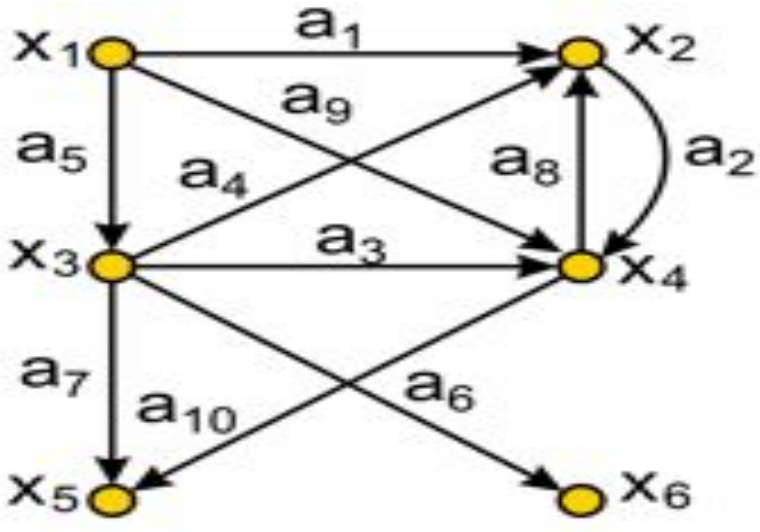
$A_2 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

Об'єднання графів G_1 і G_2, що позначається як $G_1 \cup G_2$ редставляє такий граф

$$G_3 = (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

що множина його вершин є об'єднанням X_1 і X_2, а множина ребер - об'єднанням A_1 і A_2. Граф G_3, отриманий операцією об'єднання графів G_1 і G2, показаний на рис. 2.1, д, а його матриця суміжності - на рис. 2.1, е. Матриця суміжності результуючого графа отримана операцією поелементного логічного додавання матриць суміжності вихідних графів G_1 і G_2



д

$A_3=$

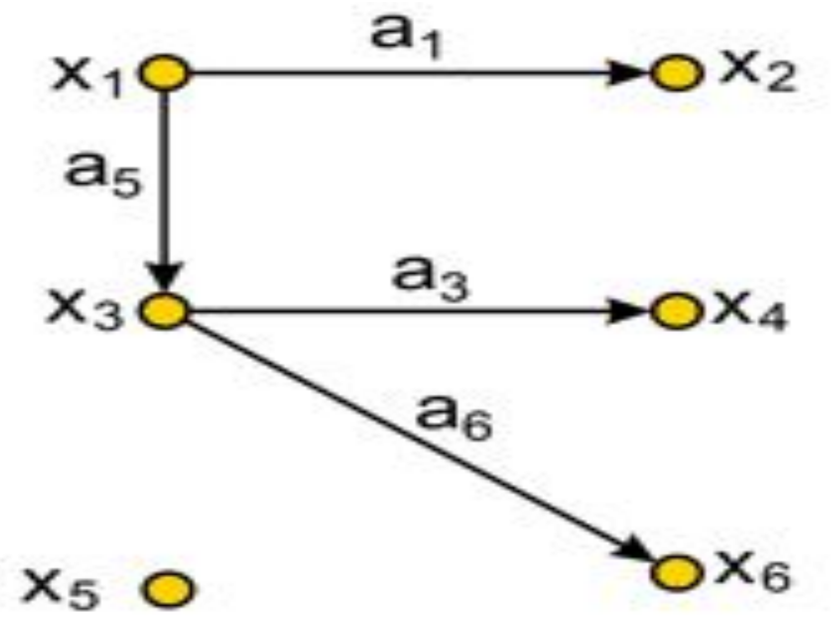
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

е

Перетин графів G_1 і G_2, що позначається як $G_1 \cap G_2$ вляє собою граф

$$G_4 = (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$$

Таким чином, множина вершин графа G_4 складається з вершин, присутніх одночасно в G_1 і G_2. Операція перетину графів показана на рис. 2.2, в, а результуюча матриця суміжності отримана опера $G_1 \cap G_2$ елементного логічного множення матриць суміжності вихідних графів G_1 і G_2. показана на рис. 2.2.г.



в

$A_3 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2						
x_3				1		1
x_4						
x_5						
x_6						

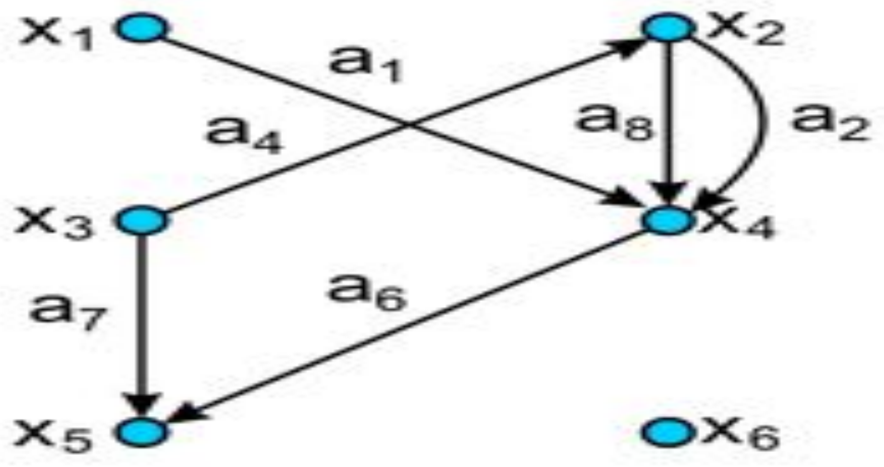
г

Кільцева сума двох графів G1 і G2, що позначається як $G_1 \oplus G_2$ляє собою граф G5, породжений на множині ребер $A_1 \oplus A_2$ими словами, граф G5 не має ізольованих вершин і складається тільки з ребер, присутніх або в G1, або в G2, але не в обох одночасно. Кільцева сума графів G1 і G2 показана на рис. 2.2, д, а результуюча матриця суміжності отримана операцією поелементного логічного додавання за mod 2 матриць суміжності вихідних графів G1 і G2 показана на рис. 2.2.е.

Легко переконатися в тому, що три розглянуті операції комутативні тобто,

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1, G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1, G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$$

і багатомісних, тобто $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup \ldots, G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap \ldots$
... і так далі.



д

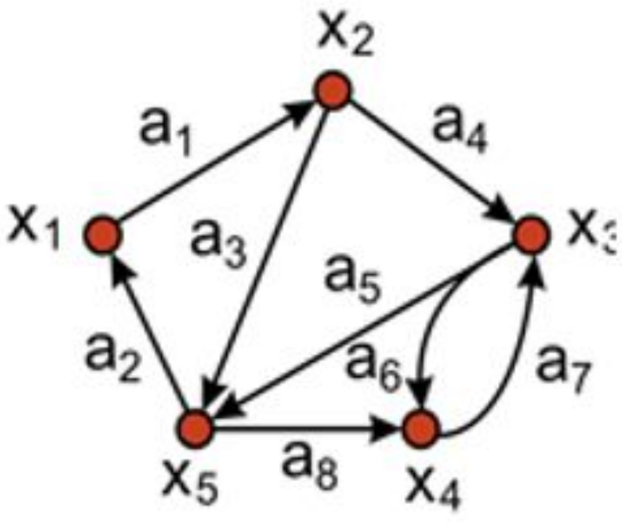
$A_3=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1				1		
x_2				1		
x_3		1			1	
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

е

Розглянемо унарні операції на графі.

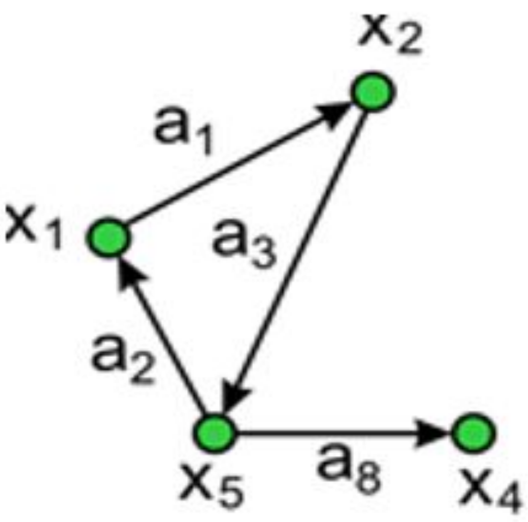
Видалення вершини. Якщо x_i -вершина графа G = (X, A), то G-x_i -порожденний підграф графа G на множині вершин X-x_i, тобто G-x_i є графом, отриманим після видалення з графа G вершини x_i і всіх ребер, інцидентних цій вершині. Видалення вершини x_3 показано на рис. 2.3, б (для початкового графа, зображеного на рис. 2.3, а). Матриця суміжності початкового графа представлена на таблиці 2.1а). Результуюча матриця суміжності графа після виконання операції видалення вершини виходить шляхом видалення відповідного і - го стовпця і і -ої рядки з вихідної x_i матриці і "стискання" матриці по вертикалі і горизонталі починаючи з (i + 1)-го стовпця і (i + 1)-го рядка (таблиця 2.1б). Надалі елементи графа можуть бути перепознані.



а

Таблиця 2.1а.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		1			
x_2			1		1
x_3				1	1
x_4			1		
x_5	1			1	

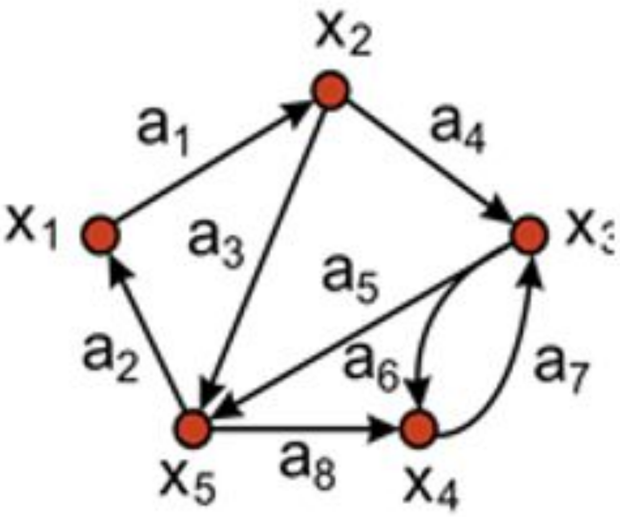


б

Таблиця 2.1б.

	x_1	x_2	x_4	x_5
x_1		1		
x_2				1
x_4				
x_5	1		1	

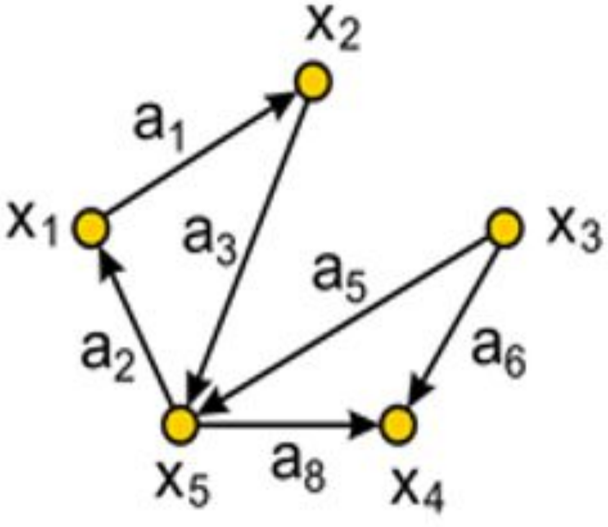
Видалення ребра або видалення дуги. Якщо a_i - дуга графа G = (X, A), то G- a_i - підграф графа G, що утворився після видалення з G дуги a_i. Зауважимо, що кінцеві вершини дуги a_i будуть збережені. Видалення з графа множини вершин або дуг визначається як послідовне видалення певних вершин або дуг. Видалення дуг a_4 і a_7 показано на рис. 2.3, в. Результуюча матриця суміжності графа після виконання операції видалення дуги a_i отримана шляхом видалення відповідних елементів з початкової матриці (таблиця 2.1в).



а

Таблиця 2.1а.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		1			
x_2			1		1
x_3				1	1
x_4			1		
x_5	1			1	

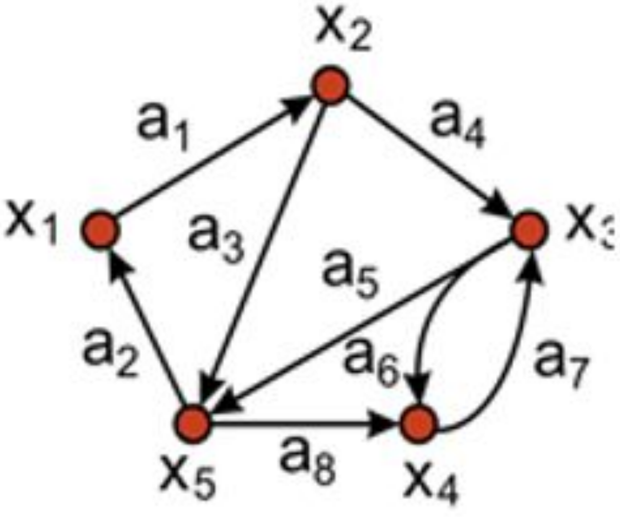


в

Таблиця 2.1в.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		1			
x_2					1
x_3				1	1
x_4					
x_5	1			1	

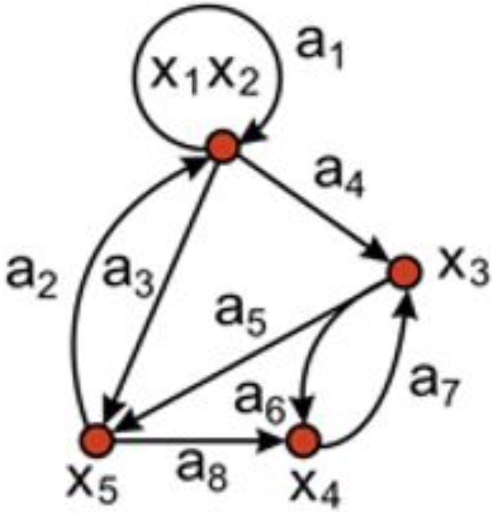
Замикання або ототожнення. Кажуть, що пара вершин x_i і x_j в графі G замикається (або ототожнюється), якщо вони замінюються такою новою вершиною, що всі дуги в графі G, інцидентні x_i і x_j , стають інцидентними новій вершині. Наприклад, результат замикання вершини x_1 і x_2 показаний на рис. 2.3, г для графа G (рис. 2.3, а). Матриця суміжності графа після виконання операції замикання вершин x_i і x_j отримується шляхом поелементного логічного додавання *i*-го і *j*-го стовпців і *i*-го та *j*-го рядків у вихідній матриці і "стискання" матриці по вертикалі і горизонталі (таблиця 2.1г).



а

Таблиця 2.1а.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		1			
x_2			1		1
x_3				1	1
x_4			1		
x_5	1			1	

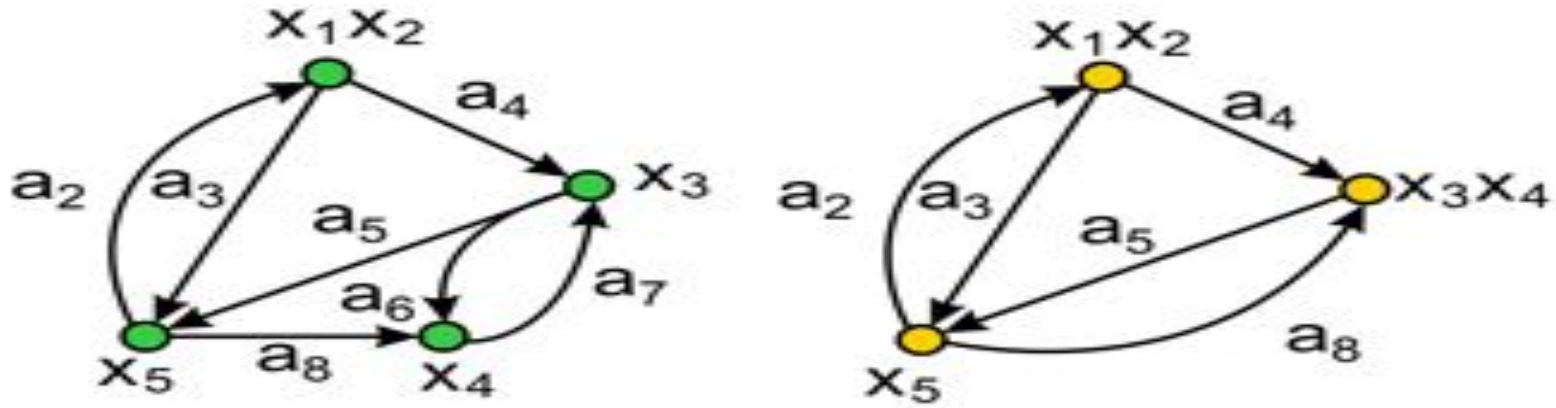


г

Таблиця 2.1г.

	x_{1-2}	x_3	x_4	x_5
x_{1-2}	1	1		1
x_3			1	1
x_4		1		
x_5	1		1	

Стягування. Під стягуванням мають на увазі операцію видалення дуги або ребра і ототожнення його кінцевих вершин. Граф, зображений на рис. 2.3, д отриманий шляхом стягування дуги a_1, а на рис. 2.3, е - стягуванням дуг a_1, a_6 і a_7. Відповідні результуючі матриці суміжності показані в таблицях 2.1д і 2.1е.



д е

Таблица 2.1д.

	X_{1-2}	X_3	X_4	X_5
X_{1-2}		1		1
X_3			1	1
X_4		1		
X_5	1		1	

Таблица 2.1е.

	X_{1-2}	X_{3-4}	X_5
X_{1-2}		1	1
X_3			1
X_5	1	1	