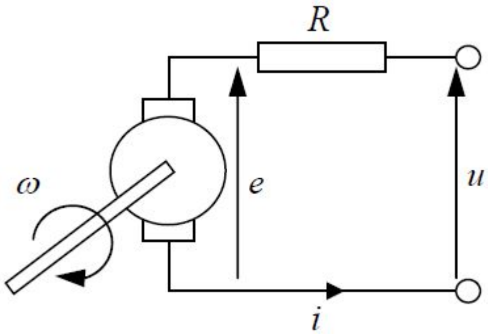
Теория Автоматического Управления
Часть 2

Полулях Антон Иванович, к.т.н., доцент кафедры АД, зам. начальника отдела проектирования систем автоматического управления

3. Модели линейных объектов

- ***3.1. Дифференциальные уравнения***
- Составляя модель объекта на основании физических законов, мы чаще всего получаем систему дифференциальных уравнений первого и второго порядка.
- Модель *двигателя постоянного тока*.



- Вход этого объекта – напряжение якоря *u*(*t*) (в *вольтах*), выход – угол поворота вала θ (*t*) (в *радианах*). Вал двигателя начинает вращаться, когда приложено напряжение питания. Если напряжение не меняется, угловая скорость вращения ω(*t*) (в *радианах в секунду*) остается постоянной, при этом угол θ (*t*) равномерно увеличивается.

3. Модели линейных объектов

- Чем больше напряжение, тем быстрее вращается вал. Если зажать вал рукой (или подключить нагрузку, например, заставить двигатель вращать турбину), скорость вращения постепенно уменьшается до нового значения, при котором вращающий момент двигателя будет равен моменту сопротивления (нагрузки). Пока эти моменты равны, скорость вращения остается постоянной и ее производная равна нулю.
- Угловая скорость вращения ω(*t*) вычисляется как производная от угла поворота вала θ (*t*) , то есть

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

- Соответственно, угол θ (*t*) – это интеграл от угловой скорости.

3. Модели линейных объектов

- В механике уравнение вращательного движения обычно записывают в виде $$J\frac{d\omega(t)}{dt}=M(t)-M_H(t),$$
- где *M* (*t*) – вращающий момент (измеряется в *Н·м*), *M*$_{Н}$ (*t*) – момент нагрузки (возмущение, также в *Н·м*). Буквой *J* обозначен суммарный *момент инерции* якоря и нагрузки (в *кг·м*^{2}). Величина момента инерции говорит о том, насколько легко «разогнать» двигатель (чем больше момент инерции, тем сложнее «разогнать»).
- *M* (*t*) – это электромагнитный момент двигателя, который вычисляется по формуле $M(t)=C_M\cdot\Phi\cdot i(t)$,
- где *C* $_{М}$ – коэффициент, Ф – магнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения (измеряется в *веберах*);

3. Модели линейных объектов

- *i*(*t*) – ток якоря (в *амперах*), который может быть найден из уравнения *u*(*t*) = *e*(*t*) + *R*· *i*(*t*) , где *e*(*t*) – электродвижущая сила (ЭДС) якоря (в *вольтах*) и *R* – сопротивление якорной цепи (в *омах*). В свою очередь, ЭДС рассчитывается через магнитный поток и частоту вращения $e(t) = C_\omega \cdot \Phi \cdot \omega(t)$,- коэффициент.
- Вводя новые постоянные $k_1 = C_M \cdot \Phi$ и $k_2 = C_\omega \cdot \Phi$,исать модель двигателя в виде системы уравнений

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = k_1 \cdot i(t) - M_H(t), \quad e(t) = k_2 \cdot \omega,$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad u(t) = e(t) + R \cdot i(t). \qquad (11)$$

3. Модели линейных объектов

- Часто нам достаточно знать, как будет реагировать объект на заданный входной сигнал (управление).
- При этом его внутреннее устройство нас не очень интересует, то есть мы рассматриваем объект в качестве «черного ящика».
- Подставив второе уравнение из системы (11) в третье, найдем *i*(*t*) и подставим в первое уравнение. Переходя к переменной θ (*t*) , получаем:

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=\frac{k_1}{R}\cdot\left[u(t)-k_2\cdot\frac{d\theta(t)}{dt}\right]-M_H(t)$$

3. Модели линейных объектов

- перенося все члены, зависящие от θ (*t*) , в левую часть равенства

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{k_1k_2}{R}\cdot\frac{d\theta(t)}{dt}=k_2\cdot u(t)-M_H(t)\,. \qquad (12)$$

- Это дифференциальное уравнение второго порядка, связывающее вход *u*(*t*) и нагрузку M_H (*t*) с выходом θ (*t*) . В сравнении с системой (11), все внутренние сигналы исходной модели (*e*(*t*) и *i*(*t*)) были исключены из уравнений. Поэтому уравнение (12) называется **уравнением «вход-выход»**.
- *Порядком модели* называют порядок соответствующего дифференциального уравнения. В данном случае мы получили модель второго порядка

3. Модели линейных объектов

- ***3.2. Модели в пространстве состояний***
- Для того, чтобы было легче исследовать модель объекта, желательно привести ее к некоторому стандартному виду, для которого уже есть готовые общие решения.
- Таким «стандартом» в теории управления считается система дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется ***нормальной формой Коши***.
- Рассмотрим снова модель электродвигателя, считая, что $M_H(t) = 0$ (нагрузки нет). Так как ω(*t*) =θ (*t*) , можно записать (12) в виде системы

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{k_1 k_2}{J R} \cdot \omega(t) + \frac{k_1}{J R} \cdot u(t)$$

3. Модели линейных объектов

- Эта система дифференциальных уравнений первого порядка быть записана в матричной форме:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}(t)\\ \dot{\omega}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{k_1k_2}{J\,R}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\theta(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{k_1}{J\,R}\end{bmatrix}\cdot u(t) \qquad (13)$$

- Значения θ (*t*) и ω(*t*) определяют *состояние* двигателя в момент времени *t* . Это значит, что зная их значения в некоторый момент времени t_0 и входной сигнал *u*(*t*) при всех $t \geq t_0$ можно рассчитать поведение объекта для любого последующего момента.
- При этом предыдущие значения θ (*t*) , ω(*t*) и *u*(*t*) (при $t < t_0$) не играют никакой роли. Поэтому θ (*t*) и ω(*t*) называются ***переменными состояния***
- **- Вектор сос** $\begin{bmatrix}\theta(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}$ **ия**

3. Модели линейных объектов

- В теории управления принято обозначать вектор состояния через *x*(*t*) , вход объекта (сигнал управления) – через *u*(*t*) . Тогда модель (13) может быть записана в виде

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \qquad (14)$$

где $x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 k_2}{J\,R} \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{J\,R} \end{bmatrix}$

- Модель (14) связывает вход *u*(*t*) и вектор состояния *x*(*t*) , поэтому она называется ***моделью вход-состояние*.**
- Полная модель объекта в пространстве состояний содержит еще одно уравнение – уравнение выхода, которое показывает, как формируется выход объекта *y*(*t*) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \qquad (15)$$

3. Модели линейных объектов

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \qquad (15)$$

- Эта модель называется моделью ***вход-состояние-выход***.
- Выходная координата для двигателя постоянного тока – это угол поворота вала:

$$y(t) = \theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t),$$

- так что $C = [1\ 0]$ и $D = 0$. Если же в качестве выхода принять угловую скорость, то $C = [0\ 1]$.
- С помощью модели (15), изменяя матрицы C и D, можно принять за выход любую линейную комбинацию переменных состояния и входа. Во многих практических задачах выход – это одна или несколько переменных состояния, которые мы можем измерить.

3. Модели линейных объектов

- Поскольку момент инерции *J* , сопротивление якоря *R* и коэффициенты 1 *k* и 2 *k* не зависят от времени, матрицы *A* , *B* , *C* и *D* в модели (15) – постоянные. Такие объекты называются ***стационарными***, в отличие от ***нестационарных*** объектов, параметры которых изменяются во времени.
- Запись моделей в единой форме (15) позволяет отвлечься от смысла переменных состояния и исследовать системы разной природы стандартными методами, которые хорошо разработаны и реализованы в современных компьютерных программах.
- Покажем, как уравнения вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \qquad (15)$$

- могут быть решены и чем удобна именно такая форма записи.

3. Модели линейных объектов

- Предположим, что мы знаем начальные условия, то есть вектор состояния *x*(0) при *t* = 0 . Вспомним, что знание *x*(0) и входа *u*(*t*) при всех *t* > 0 дает возможность однозначно определить дальнейшее поведение этого объекта.
- Первое уравнение в (15) позволяет найти производную, то есть, скорость изменения вектора состояния *x*(*t*) в любой момент времени. Будем считать, что при 0 ≤ *t* ≤ Δ*t* , где Δ*t* – малый интервал времени, эта производная не меняется. Тогда значение вектора состояния при *t* = Δ*t* приближенно определяется формулой
- то есть, его $x(\Delta t) \approx x(0) + \dot{x}(0) \cdot \Delta t = x(0) + \left[A \cdot x(0) + B \cdot u(0)\right] \cdot \Delta t$, управления *u*(Δ*t*) , находим выход системы в тот же момент

$$y(\Delta t) \approx C \cdot x(\Delta t) + D \cdot u(\Delta t).$$

3. Модели линейных объектов

- Эту методику можно применять и дальше, в конце второго интервала получаем

$$x(2\cdot\Delta t)\approx x(\Delta t)+\dot{x}(\Delta t)\cdot\Delta t=x(\Delta t)+\left[A\cdot x(\Delta t)+B\cdot u(\Delta t)\right]\cdot\Delta t\ ,$$

$$y(2\cdot\Delta t)\approx C\cdot x(2\cdot\Delta t)+D\cdot u(2\cdot\Delta t)\ .$$

- Таким образом, можно (приближенно) рассчитать выход системы при всех $t > 0$. Конечно, точность будет тем выше, чем меньше Δt , однако объем вычислений при этом также увеличится.
- Этот метод приближенного решения дифференциальных уравнения называется *методом Эйлера*.
- Так как мы не делали никаких предположений о постоянных матрицах A , B , C и D, его (как и другие, более совершенные методы) можно использовать без изменений для решения любых уравнений вида (15).

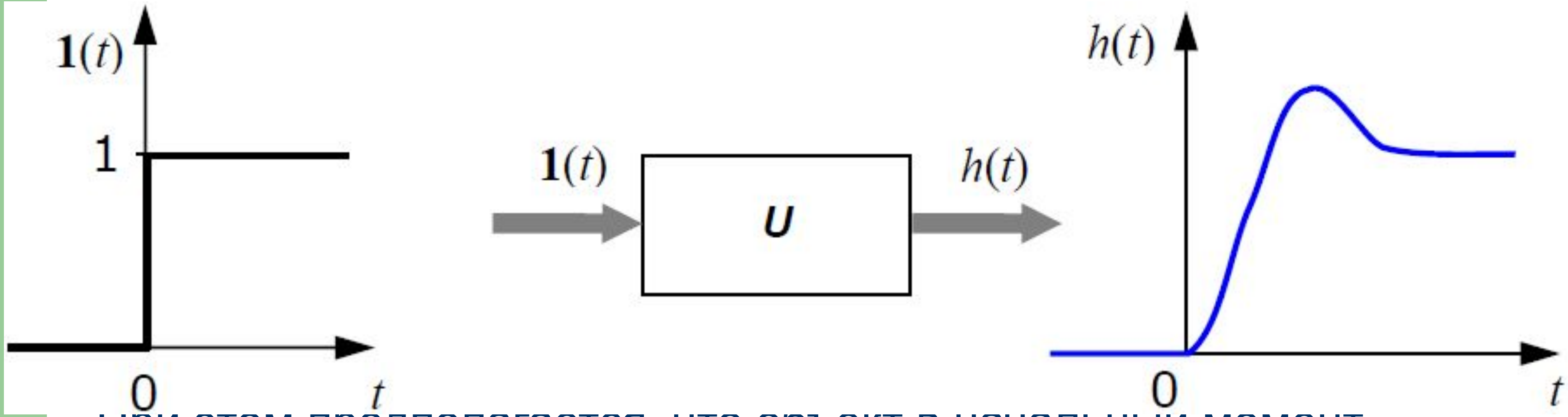
3. Модели линейных объектов

- ***3.3. Переходная функция***
- Один из методов построения моделей «вход-выход» – определение реакции объекта на некоторый стандартный сигнал.
- Один из простейших сигналов – так называемый «единичный скачок» («единичный ступенчатый сигнал»), то есть мгновенное изменение входного сигнала с 0 до 1 в момент $t = 0$.
- Формально этот сигнал определяется так:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

3. Модели линейных объектов

- Реакция объекта на единичный скачок называется **переходной функцией** и обозначается *h*(*t*):



- При этом предполагается, что объект в начальный момент находится в состоянии покоя, то есть, имеет *нулевые начальные условия*. Это значит, что все его переменные состояния равны нулю и внутренняя энергия также нулевая.

3. Модели линейных объектов

- Если начальные условия ненулевые, то для построения сигнала выхода при любом входе нужно использовать дифференциальные уравнения объекта или модель в пространстве состояний.
- Это значит, что переходная характеристика дает меньше информации, чем исходные уравнения.
- Пусть модель объекта задана дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\cdot x(t)\,, \qquad (16)$$

- где *k* – безразмерный коэффициент, а *T* – некоторая постоянная, которая имеет размерность времени (измеряется в *секундах*).

3. Модели линейных объектов

- Найдем переходную характеристику этого звена. Решая уравнение (16) при $x(t) = 1$ ($t > 0$), получаем

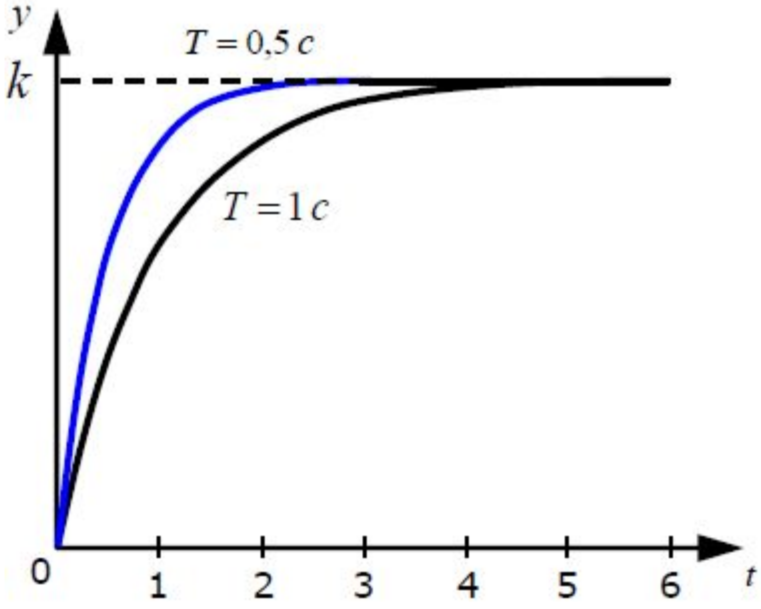
$$y(t) = k + C_1 \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right),$$

- где постоянная C_1 должна определяться из начальных условий. Поскольку нас интересует переходная характеристика, начальные условия считаем нулевыми, то есть $y(0) = 0$, что дает $C_1 = -k$ и поэтому

$$h(t) = y(t) = k\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]. \qquad (17)$$

3. Модели линейных объектов

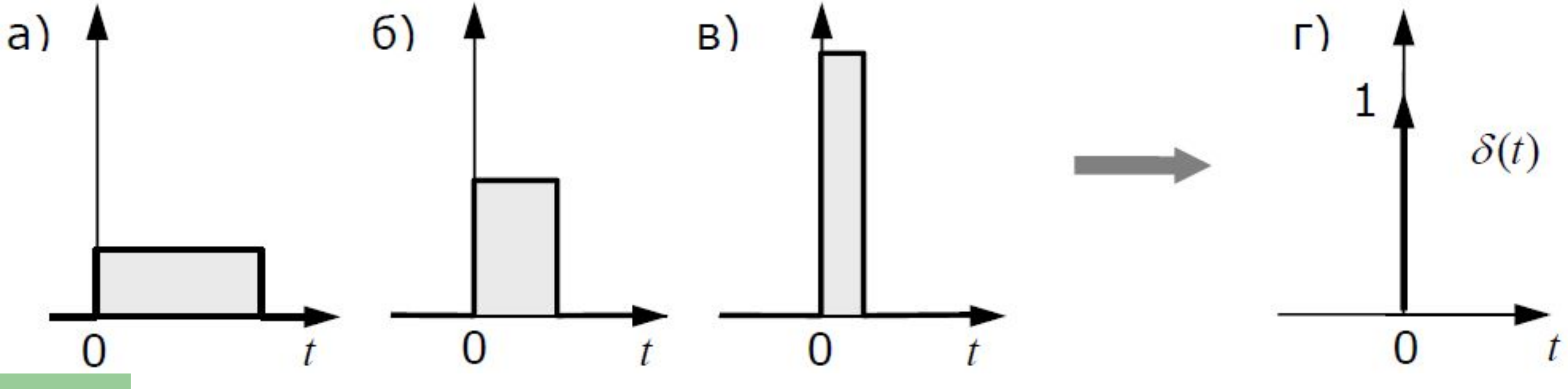
- На рисунке показаны переходные характеристики (17) при различных значениях параметра *T*, который называется **постоянной времени** звена:
- Видно, что при увеличении *T* выход *y* медленнее достигает установившегося значения, равного *k* , то есть постоянная времени характеризует *инерционность* звена (16).
- Чем больше постоянная времени, чем медленнее реагирует объект на управление и тем больше усилий нужно для того, чтобы перевести его в новое состояние.



- ступенчатый сигнал легко получить на практике. **Эксперимент!**

3. Модели линейных объектов

- ***3.4. Импульсная характеристика (весовая функция)***
- В качестве тестового сигнала можно, в принципе, использовать любой сигнал. Например, можно изучать реакцию системы на прямоугольный импульс. Вопрос в том, чтобы определить некоторый стандартный вид этого импульса. На рисунках а)-в) показаны три импульса, имеющих одинаковые площади. Для простоты будем считать, что эта площадь равна единице.



3. Модели линейных объектов

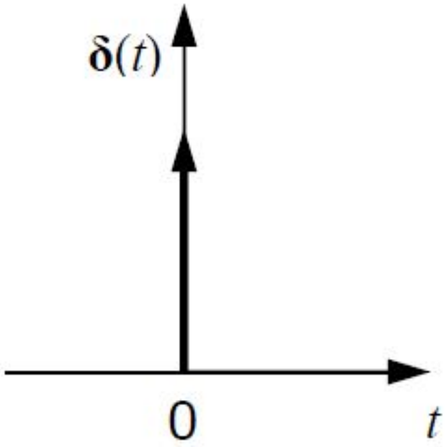
- Что будет, если мы будем уменьшать ширину импульса, сохраняя его площадь?
- Очевидно, что высота импульса будет расти и в пределе (когда ширина стремится к нулю) станет бесконечной.
- Таким образом, мы получили еще один классический тестовый сигнал – *единичный импульс* или *дельта-функцию Дирака* δ (*t*) . Это идеальный (невозможный в реальной жизни) сигнал, который равен нулю во всех точках, кроме *t* = 0 , где он уходит к бесконечность, причем его площадь (интеграл по всей оси времени) равен единице:

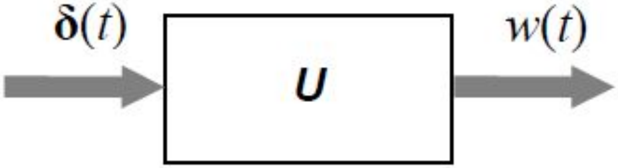
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

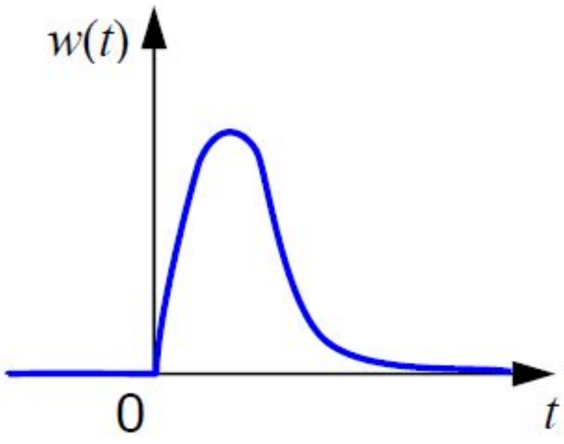
- Поскольку бесконечный импульс невозможно нарисовать, на графике он изображается стрелкой, высота которой равна единице

3. Модели линейных объектов

- Иногда определяют дельта-функцию как производную от единичного ступенчатого сигнала **1**(t) . Действительно, эта производная равна нулю при всех значениях t , кроме нуля, где она обращается в бесконечность.
- Реакция системы на единичный импульс (дельта-функцию) называется **импульсной характеристикой** и обозначается $w(t)$:



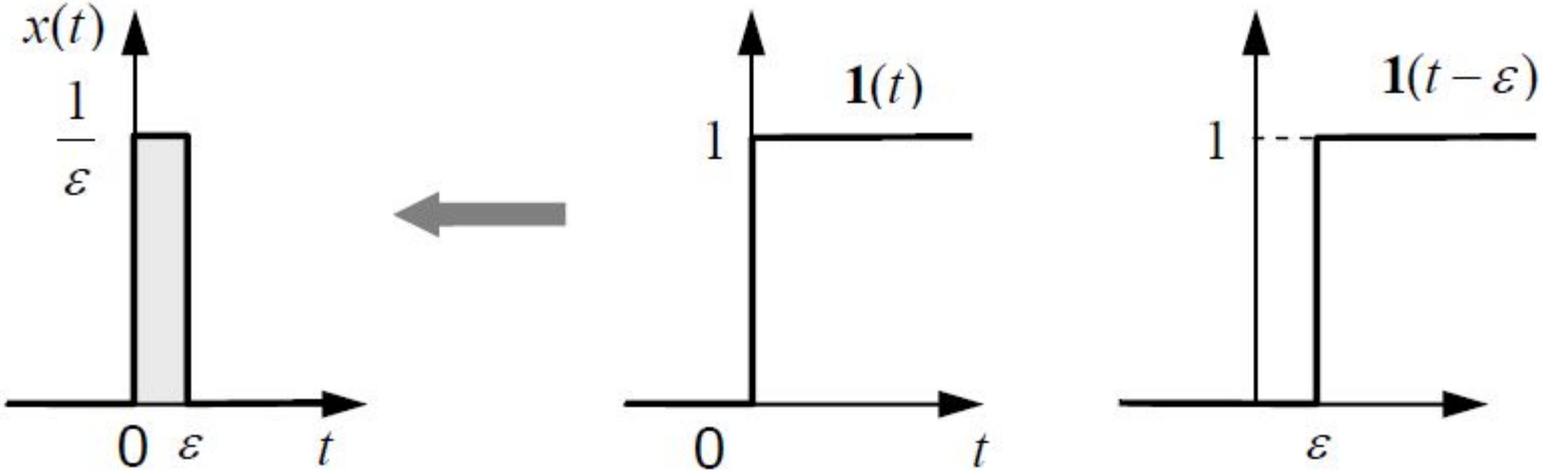




3. Модели линейных объектов

- Импульсная характеристика, так же, как и переходная характеристика, определяется при нулевых начальных условиях, то есть, объект должен находиться в состоянии покоя.
- Рассматривая дельта-функцию как предельный случай прямоугольного сигнала единичной площади, можно найти связь между переходной функцией и импульсной характеристикой.
- Пусть ширина прямоугольного импульса равна ε , а высота – 1/ε . Такой импульс можно представить в виде разности двух ступенчатых сигналов $$x(t) = \frac{1}{\varepsilon}[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\varepsilon)],$$
- где **1**(*t* −ε) – это единичный ступенчатый сигнал, который приходит в момент *t* = ε , то есть, смещен по времени на ε (см. рисунок далее).

3. Модели линейных объектов



- Так как для линейных систем справедлив принцип суперпозиции, сигнал на выходе будет равен разности реакций системы на входы **1**(*t*) и **1**(*t* −ε) , умноженной на коэффициент 1/ε . Учитывая, что реакция на сигнал **1**(*t*) – это переходная функция *h*(*t*) , получаем

$$y(t) = \frac{1}{\varepsilon}[h(t) - h(t-\varepsilon)].$$

3. Модели линейных объектов

- Переходя к пределу при ε →0, находим, что импульсная характеристика

$$w(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h(t)-h(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{dh(t)}{dt},$$

- как оказывается, равна производной от переходной функции. Наоборот, переходная функция – это интеграл от импульсной характеристики на интервале от 0 до *t*:

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)\,d\tau$$

- Дифференцируя переходную характеристику (17) звена первого порядка, получаем соответствующую импульсную характеристику:

$$w(t) = \frac{d}{dt}\left(k\left[1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]\right) = \frac{k}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

3. Модели линейных объектов

- Другое название импульсной характеристики – *весовая функция*. Это название связано с тем, что для произвольного входного сигнала *x*(*t*) выход системы *y*(*t*) при нулевых начальных условиях вычисляется как интеграл:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,w(t-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau$$

- Здесь функция *w*(*t*) как бы «взвешивает» входной сигнал *x*(*t*) в подынтегральном выражении. Заметим, что импульсная характеристика дает неполную информацию об объекте, поскольку не учитывает ненулевые начальные условия.
- В отличие от ступенчатого сигнала, мгновенный импульс бесконечной величины невозможно получить на реальном устройстве, поэтому снять импульсную характеристику системы, строго говоря, экспериментально не удается.

3. Модели линейных объектов

- ***3.5. Передаточная функция***
- Выходной сигнал системы можно представить как результат действия некоторого оператора на ее вход. Для линейных моделей такой оператор можно записать следующим образом.
- Пусть модель объекта задана линейным дифференциальным уравнением второго порядка, связывающим вход $x(t)$ и выход $y(t)$:

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \quad (18)$$

- где a (i = 0,1) i и b (i = 0,1,2) i – постоянные.

3. Модели линейных объектов

- Введем *оператор дифференцирования* $p = \frac{d}{dt}$, который действует на сигнал *x*(*t*) по

$$p\ x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- запись *p x*(*t*) обозначает *не умножение* оператора *p* на *x*(*t*) , а *действие* этого оператора, то есть дифференцирование *x*(*t*).
- Теперь запишем производные сигналов *x*(*t*) и *y*(*t*) по времени в операторной форме

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = py(t),\ \ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = p^2y(t),\ \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = px(t)\,.$$

- Подставляя эти выражения в (18), получим

$$b_2p^2y(t) + b_1py(t) + b_0y(t) = a_1px(t) + a_0x(t)\,. \qquad (19)$$

3. Модели линейных объектов

- Можно формально вынести за скобки *y*(*t*) в левой части равенства (19) и *x*(*t*) в правой части:

$$(b_2p^2+b_1p+b_0)\ y(t)=(a_1p+a_0)\ x(t)\,. \qquad (20)$$

- Левая часть (20) означает, что оператор $b_2p^2+b_1p+b_0$ действует на сигнал *y*(*t*) , а в правой части оператор (a_1p+a_0 действует на сигнал *x*(*t*) . «Разделив» (условно, конечно) обе части (20) на оператор 2 $b_2p^2+b_1p+b_0$ связь выхода и входа можно записать в виде

$$y(t)=\frac{a_1p+a_0}{b_2p^2+b_1p+b_0}x(t)=W(p)\,x(t)\,, \qquad (21)$$

- где запись *W*(*p*) *x*(*t*) означает не умножение, а действие сложного оператора

$$W(p)=\frac{a_1p+a_0}{b_2p^2+b_1p+b_0}\,. \qquad (22)$$

на сигнал *x*(*t*) .

3. Модели линейных объектов

- Формула $y(t) = W(p)\,x(t)$ – это не что иное, как символическая запись уравнения (18), которую удобно использовать.
- Функция $W(p)$ называется **передаточной функцией** объекта, который описывается уравнением (18). Она полностью описывает связи между выходом и входом объекта при нулевых начальных условиях, но не учитывает его внутреннее устройство.
- Часто передаточной функцией называют функцию $W(\lambda)$, которая получается из (22) в результате замены оператора p на некоторую независимую переменную λ . Эта функция представляет собой отношение двух полиномов (многочленов) от λ.

3. Модели линейных объектов

- Передаточная функция *W*(λ) называется **правильной**, если степень ее числителя *не больше*, чем степень знаменателя; **строго правильной**, если степень числителя *меньше* степени знаменателя; **неправильной**, если степень числителя *больше*, чем степень знаменателя.
- Функция $\frac{1}{\lambda+1}$ - строго правильная и одновременно правильная;
- $\frac{\lambda}{\lambda+1}$ – правильная, но нестрого правильная (иногда такие функции называют *бtypравильными*), а
- $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}$ – неправильная.

3. Модели линейных объектов

- **Нулями** передаточной функции называются корни ее числителя, а **полюсами** – корни знаменателя.
- Например, функция $W(\lambda) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda + 2}$
- имеет нуль в точке $\lambda = 1$ и два полюса в точках $\lambda = -1$ и $\lambda = -2$.

3. Модели линейных объектов

- ***3.6. Преобразование Лапласа***
- *3.6.1. Что такое преобразование Лапласа?*
- Одна из первых задач, которые были поставлены в теории управления – вычисление выхода системы при известном входе.
- Для ее решения нужно решать дифференциальные уравнения.
- Чтобы упростить процедуру, математики придумали преобразование, которое позволило заменить решение дифференциальных уравнений алгебраическими вычислениями, то есть, операциями с полиномами (многочленами) и рациональными функциями.

3. Модели линейных объектов

- Для функции *f* (*t*) вводится **преобразование Лапласа**, которое обозначается как **L**{ *f* (*t*)}:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt\,. \qquad (23)$$

- Функция *F*(*s*) называется *изображением* для функции *f* (*t*) (оригинала). Здесь *s* – это комплексная переменная, которая выбирается так, чтобы интеграл (23) сходился
- **Обратное преобразование Лапласа L**$^{-1}${*F*(*s*)} позволяет вычислить оригинал *f* (*t*) по известному изображению *F*(*s*) :

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds\,, \qquad (24)$$

- где $j=\sqrt{-1}$,а постоянная σ выбирается так, чтобы интеграл сходился

3. Модели линейных объектов

- На практике вместо интеграла (24) чаще всего используют готовые таблицы, по которым можно сразу определить изображение по оригиналу и наоборот. Например, изображения по Лапласу для дельта-функции, единичного скачка и функции e^{-at} равны, соответственно

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1, \quad \mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\}=\frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at}\}=\frac{1}{s+a}. \qquad (25)$$

- *3.6.2. Свойства преобразования Лапласа*
- Используя (23) и (24), легко доказать, что принцип суперпозиции выполняется как для прямого, так и для обратного преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\}, \qquad (26)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}. \qquad (27)$$

3. Модели линейных объектов

- Во-вторых, изображение для производной функции *f* (*t*) равно

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \cdot F(s) - f(0),$$

- где *F*(*s*) – изображение функции *f* (*t*) , и *f* (0) – ее значение при *t* = 0.
- П*ри нулевых начальных условиях* изображение производной равно изображению самой функции, умноженному на *s*.
- Аналогично для построения изображения *i* -ой производной нужно умножить изображение функции на s^i (это также справедливо только при нулевых начальных условиях).
- Кроме того, с помощью преобразование Лапласа можно сразу найти **начальное и конечное значения** функции-оригинала (при *t* = 0 и *t* →∞), не вычисляя самого оригинала:

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s), \qquad f(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s). \qquad (28)$$

3. Модели линейных объектов

- *3.6.3. Снова передаточная функция*
- Рассмотрим снова уравнение (18):

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \qquad (29)$$

- Применим к левой и правой частям преобразование Лапласа, считая, что все начальные условия нулевые. Получается *уравнение в изображениях*, связывающее преобразования Лапласа входа *X* (*s*) и выхода *Y*(*s*) :

$$b_2 \cdot s^2 Y(s) + b_1 \cdot sY(s) + b_0 \cdot Y(s) = a_1 \cdot sX(s) + a_0 \cdot X(s)$$

- Можно вынести за скобки *Y*(*s*) в левой части и *X* (*s*) в правой части:

$$(b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \cdot Y(s) = (a_1 s + a_0) \cdot X(s) \, .$$

3. Модели линейных объектов

- Разделив обе части этого равенства на $b_2s^2+b_1s+b_0$ получим:

$$Y(s)=\frac{a_1s+a_0}{b_2s^2+b_1s+b_0}\cdot X(s)=W(s)\cdot X(s),\quad \text{где } W(s)=\frac{a_1s+a_0}{b_2s^2+b_1s+b_0}. \qquad (30)$$

- Сравнение (22) и (30) показывает, что *W*(*s*) – это *передаточная функция* объекта, записанная в виде функции от комплексной переменной *s* , а не от оператора дифференцирования *p* , как в (22).
- Таким образом, при нулевых начальных условиях *изображение выхода линейного объекта вычисляется как произведение его передаточной функции на изображение входного сигнала*.
- Из (30) следует и другой важный вывод: ***передаточная функция равна отношению изображений по Лапласу выхода и входа при нулевых начальных условиях***.

3. Модели линейных объектов

- *3.6.4. Пример*
- Рассмотрим пример использования преобразования Лапласа для вычисления выхода системы при известном входном сигнале. Пусть объект управления описывается уравнением первого порядка (16):

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\cdot x(t)$$

- и на его вход поступает единичный ступенчатый сигнал $x(t) = \mathbf{1}(t)$. Требуется найти сигнал выхода $y(t)$, который в данном случае представляет собой переходную характеристику.

3. Модели линейных объектов

- Решим эту задачу с помощью передаточных функций и изображений сигналов по Лапласу. Чтобы найти изображение выхода по формуле (30), нужно знать изображение входного сигнала $X(s)$ и передаточную функцию звена $W(s)$.
- Изображение входа находим по табличным данным, а передаточную функцию – из (31), повторяя приведенные выше рассуждения:

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

- Теперь находим изображение выхода

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{Ts+1} = \frac{k}{s} - \frac{kT}{Ts+1}$$

3. Модели линейных объектов

- и представляем его в виде суммы элементарных дробей:

$$Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k}{s + 1/T}$$

- Используя принцип суперпозиции для изображений (27), вычисляем оригинал – сигнал выхода:

$$y(t) = k \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - k \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1/T}\right\}$$

- Обратные преобразования Лапласа находим по таблице (25):

$$y(t) = k - k \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad \text{при } t > 0,$$

- что совпадает с (17). Таким способом можно вычислять реакцию системы на известный входной сигнал без прямого решения дифференциального уравнения.

3. Модели линейных объектов

- Применяя формулы (28) для вычисления начального и конечного значений сигнала выхода *y*(*t*) :

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot Y(s)\,, \qquad y(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s)$$

- При ступенчатом входном сигнале с изображением $X(s) = 1/s$ получаем

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} W(s)\,, \qquad y(\infty) = W(0)\,.$$

- Таким образом, для рассмотренного выше примера

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{k}{Ts+1} = 0\,, \qquad y(\infty) = W(0) = k\,.$$

- Значение *W*(0) называют **статическим коэффициентом усиления** звена, поскольку он показывает, во сколько раз усиливается постоянный сигнал.

3. Модели линейных объектов

- ***3.7. Передаточная функция и пространство состояний***
- Используя преобразование Лапласа, можно построить передаточную функцию для модели объекта в пространстве состояний

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

- Напомним, что здесь *u*(*t*) , *y*(*t*) и *x*(*t*) обозначают соответственно вход, выход и вектор состояния объекта. Преобразуя левые и правые части каждого уравнения по Лапласу (переходя к изображениям сигналов по Лапласу при нулевых начальных условиях), получаем

$$\begin{aligned} s \cdot X(s) &= A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ Y(s) &= C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \end{aligned} \qquad (32)$$

3. Модели линейных объектов

- В первом уравнении перенесем все члены, зависящие от $X(s)$, в левую часть: $(s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s)$,
- где **I** обозначает *единичную матрицу,* у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули. Умножая обе части последнего равенства на $(s \cdot \mathbf{I} - A)^{-1}$, получим выражение для $X(s)$: $X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$
- которое при подстановке во второе уравнение в (32) дает

$$Y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s) = \left[C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D\right] \cdot U(s)$$

- Чтобы определить передаточную функцию, найдем отношение изображений выхода и входа:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D. \qquad (33)$$

3. Модели линейных объектов

- Обратный переход, от передаточной функции к модели в пространстве состояний, более сложен и неоднозначен. Дело в том, что каждой передаточной функции соответствует бесчисленное множество моделей в пространстве состояний. Одну из них можно найти следующим образом. Для передаточной функции

$$W(s) = d + \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0},$$

- где *d*, a_i (*i* = 0,1,2) и b_i (*i* = 0,1,2) – постоянные коэффициенты, модель в пространстве состояний задается матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D = d. \qquad (34)$$

3. Модели линейных объектов

- При увеличении порядка передаточной функции (степени ее знаменателя), эти матрицы расширяются.
- В нижней строке матрицы *A* записываются коэффициенты знаменателя с обратным знаком, над главной диагональю – единицы, а остальные элементы – нули.
- В матрице *B* только самый последний элемент – единица, а остальные – нули.
- Наконец, матрица *C* строится из коэффициентов числителя передаточной функции.
- Отметим, что модель, заданную *неправильной* передаточной функцией (у которой степень числителя *больше* степени знаменателя) **нельзя** представить в пространстве состояний.

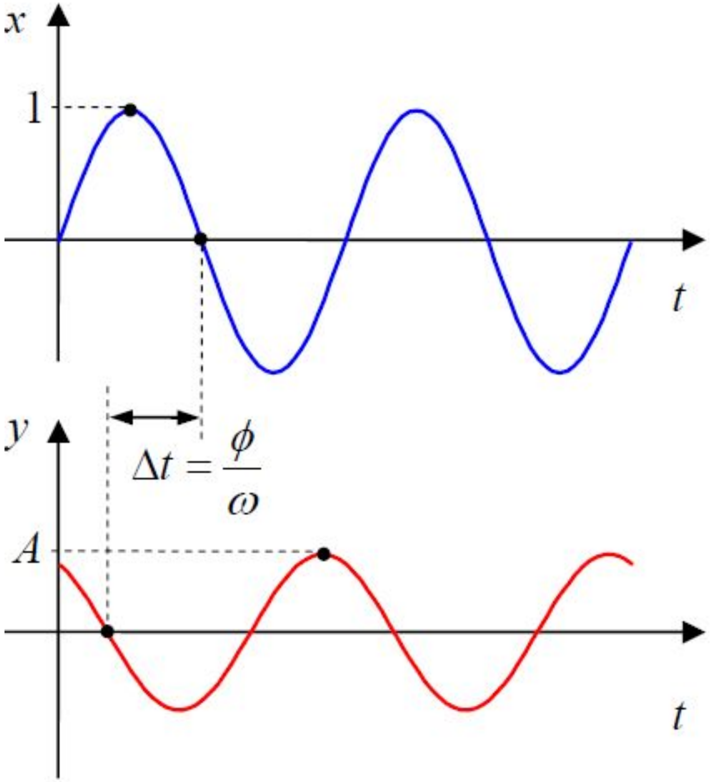
3. Модели линейных объектов

- ***3.8. Частотные характеристики***
- Еще один популярный эталонный сигнал – гармонический (синус, косинус), например:

$$x(t) = \sin \omega t \,,$$

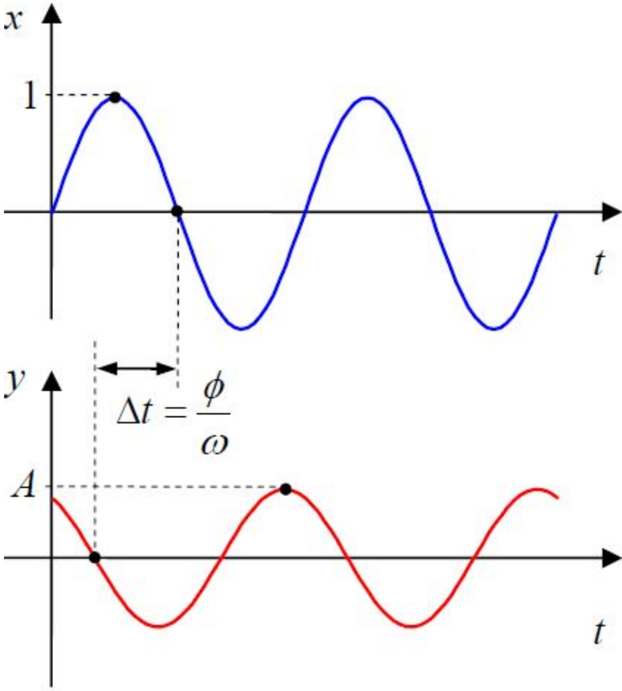
- где ω – угловая частота (в радианах в секунду). Можно показать, что при таком входе на выходе линейной системы в установившемся режиме (при больших *t*) будет синус той же частоты, но с другой амплитудой *A* и сдвигом фазы φ :

$$y(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega t + \phi(\omega))$$



3. Модели линейных объектов

- Для каждой частоты входного сигнала будет своя амплитуда и свой сдвиг фазы. Чтобы определить по графику фазовый сдвиг φ , нужно найти расстояние Δ*t* по оси времени между соответствующими точками синусоид (например, точками пересечения с осью *t* или вершинами). Если Δ*t* умножить на частоту ω , получаем сдвиг фазы φ (в радианах).
- На рисунке показан случай φ > 0 (опережение по фазе), когда выход сдвинут «влево» по оси времени относительно входа, то есть, «идет раньше» входного.



3. Модели линейных объектов

- Зная передаточную функцию системы *W*(*s*) , можно вычислить амплитуду и сдвиг фазы по формулам

$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|, \qquad \phi(\omega)=\arg W(j\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}W(j\omega)}{\operatorname{Re}W(j\omega)}$$

- Запись *W*(*j*ω) означает, что в передаточную функцию *W*(*s*) подставляется чисто мнимое число
- *s* = *j*ω , где *j* = √−1 . Для каждой частоты ω значение *W*(*j*ω) = *P* + *jQ* – это некоторое комплексное число, имеющее амплитуду

$$\left|W(j\omega)\right|=\sqrt{P^2+Q^2} \text{ и фазу } \arg W(j\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}$$

- Функция *W*(*j*ω) называется **частотной характеристикой** звена, поскольку она характеризует выход системы при гармонических сигналах разной частоты.

3. Модели линейных объектов

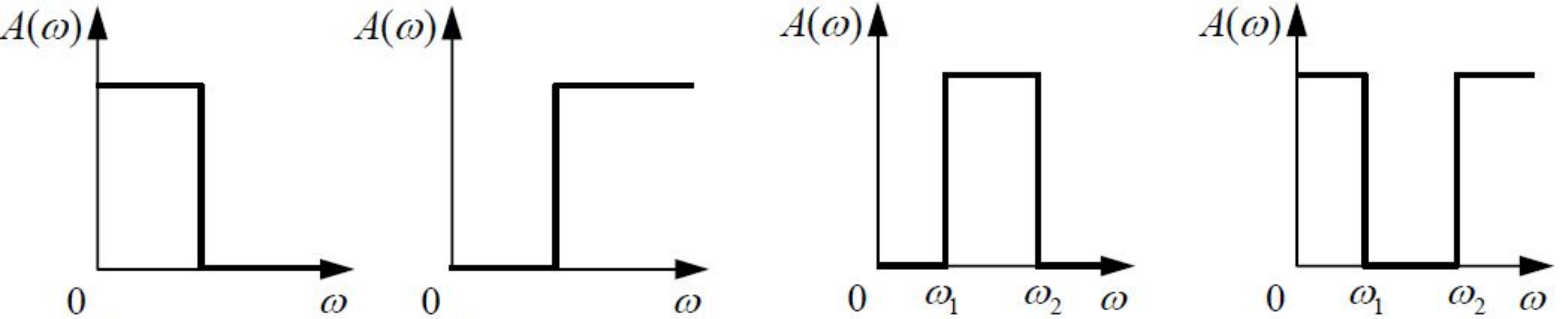
- Зависимости $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ (вещественная и мнимая части $W(j\omega)$) – это *вещественная и мнимая частотные характеристики.*
- Функции $A(\omega)$ и φ (ω) (они для каждой частоты принимают вещественные значения) называются соответственно **амплитудной** и **фазовой частотными характеристиками** (АЧХ и ФЧХ).
- Амплитудная частотная характеристика – это коэффициент усиления гармонического сигнала.
- Если на какой-то частоте ω значение $A(\omega) > 1$, входной сигнал усиливается, если $A(\omega) < 1$, то вход данной частоты ослабляется.

3. Модели линейных объектов

- По форме АЧХ различают несколько основных типов звеньев:
- 1) *фильтр низких частот* – пропускает низкочастотные сигналы примерно с одинаковым коэффициентом усиления, блокирует высокочастотные шумы и помехи;
- 2) *фильтр высоких частот* – пропускает высокочастотные сигналы, блокирует сигналы низкой частоты;
- 3) *полосовой фильтр* – пропускает только сигналы с частотами в полосе от ω1 до ω2 ;
- 4) *полосовой режекторный фильтр* – блокирует только сигналы с частотами в полосе от ω1 до ω2, остальные пропускает.

3. Модели линейных объектов

- На рисунке показаны амплитудные частотные характеристики идеальных фильтров этих четырех типов:



фильтр низких частот

фильтр высоких частот

полосовой фильтр

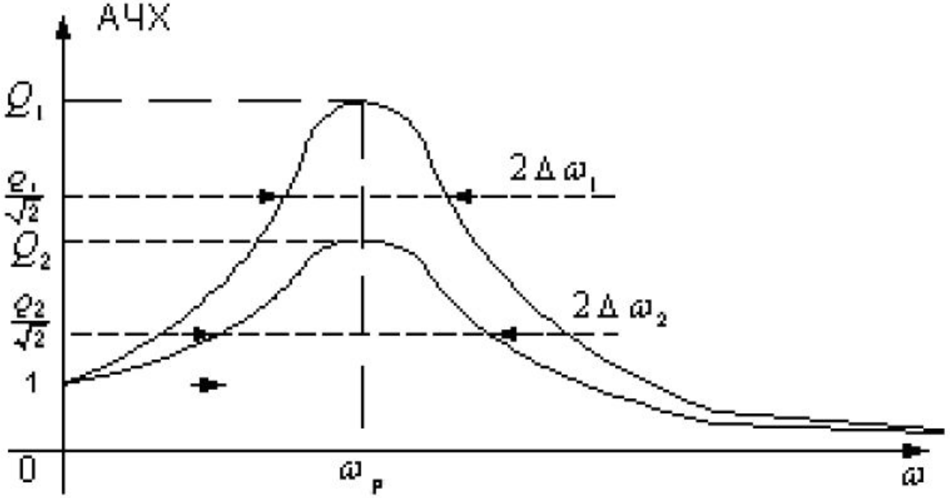
полосовой режекторный фильтр

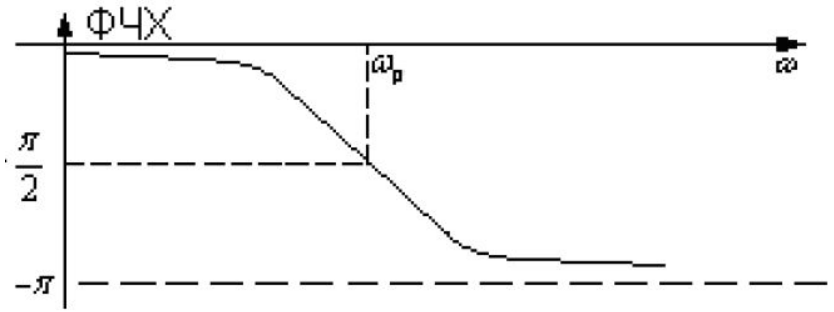
- В радиотехнике используется понятие *полосы пропускания* – это ширина полосы частот, в которой значение АЧХ больше, чем 1/√ 2 от ее максимального значения.

3. Модели линейных объектов

- Частотные характеристики во многих случаях можно снять экспериментально. Если объект *устойчивый,* на его вход подается гармонический сигнал (36) и записывается сигнал *y*(*t*) на выходе.
- Определив амплитуду и сдвиг фазы для разных частот, можно построить по точкам амплитудную и фазовую частотные характеристики.

3. Модели линейных объектов





устойчивый объект

3. Модели линейных объектов

- Если объект *неустойчив*, то при подаче на вход синуса амплитуда колебаний на выходе будет неограниченно расти.
- Однако частотную характеристику все равно можно определить экспериментально. Для этого нужно сначала найти какой-нибудь регулятор, который сделает замкнутую систему устойчивой. Затем на вход $r(t)$ подают синусоидальный сигнал и сравнивают сигналы $x(t)$ и $y(t)$ на входе и выходе интересующего нас объекта, определяя для каждой частоты ω «коэффициент усиления» $A(\omega)$ (отношение амплитуд сигналов $x(t)$ и $y(t)$) и сдвиг фазы φ (ω)