

Презентация к лекциям по  
теоретическим основам  
электротехники

# В. 1. Хронология становления и развития науки об электротехнике

<b>1753 г.</b> <b>Ломоносов Михаил Васильевич</b>	Опубликовал первую крупную работу в области электричества «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих»
<b>1789 г.</b> <b>Франклин Бенджамин</b>	Исследовал атмосферное электричество; предложил молниеотвод.
<b>1799 г.</b> <b>Вольта Алессандро</b>	Создал электрохимический источник постоянного тока (вольтов столб); открыл контактную разность потенциалов.
<b>1800 г.</b> <b>Гальвани Луиджи</b>	Обнаружил контактную разность потенциалов при контакте металла с электролитом.
<b>1802 г.</b> <b>Петров Василий Владимирович</b>	Открыл электрическую дугу и указал, что «темный покой довольно ярко освещен быть может»; исследовал химическое действие тока, электропроводность, люминесценцию, электрические явления в газах; опубликовал книгу «Известия о гальвановольтовых опытах» (1803)
<b>1819 г.</b> <b>Эрнстед Ханс Кристиан</b>	Открыл магнитное действие электрического тока.
<b>1820 г.</b> <b>Био Жан Батист, Савар Феликс</b>	Сформулировали закон о магнитном поле электрического тока (Закон Био-Савара)
<b>1820 г.</b> <b>Ампер Андре Мари</b>	Установил закон механического взаимодействия токов, предложил теорию магнетизма и термин «электрический ток» (1827)
<b>1826 г.</b> <b>Ом Георг Симон</b>	Установил закон о связи между силой тока в проводнике и напряжением на его концах, названных его именем (Закон Ома)
<b>1931 г.</b> <b>Фарадей Майкл</b>	Открыл электромагнитную индукцию; установил законы электролиза; ввел понятия электрического и магнитного поля; высказал идею существования электромагнитного поля.
<b>1833 г.</b> <b>Ленц Эмилий Христианович</b>	Установил правило для определения индукционного тока; разработал методы расчета электромагнитов (совместно с Б.С. Якоби); открыл обратимость электрических машин; обосновал (1843) тепловой закон электрического тока (одновременно с Д.П. Джоулем), названный законом Джоуля-Ленца.

<b>1834 г.</b> <b>Якоби Борис Семенович</b>	Изобрел электродвигатель; создал гальванопластику и гальваностегию (1838), телеграфные аппараты; исследовал электромагниты (совместно с Ленцем)
<b>1843 г.</b> <b>Джоуль Джеймс Прескотт</b>	Установил (одновременно с Ленцем) тепловой закон электрического тока, названный законом Джоуля-Ленца.
<b>1847 г.</b> <b>Кирхгоф Густав Роберт</b>	Открыл законы для расчета электрических цепей постоянного и синусоидального тока, названные его именем (первый и второй законы Кирхгофа)
<b>1872 г.</b> <b>Лодыгин Александр Николаевич</b>	Изобрел угольную лампу накаливания (патент, 1874); один из основателей электротермии. Эдисон Томас Альва усовершенствовал лампу накаливания (1879)
<b>1872 г.</b> <b>Столетов Александр Григорьевич</b>	Исследовал Закон Намагничивания железа и газовый разряд; открыл законы фотоэлектрического эффекта (1888)
<b>1873 г.</b> <b>Максвелл Джеймс Клерк</b>	Создал теорию электромагнитного поля (уравнения Максвелла); ввел понятие тока смещения; предсказал существование электромагнитных волн, выдвинул идею электромагнитной природы света («Трактат об электричестве и магнетизме»)
<b>1875 г.</b> <b>Яблочков Павел Николаевич</b>	Изобрел дуговую лампу (Свеча Яблочкова) и трансформатор); положил начало системе электрического освещения (патент, 1876); разрабатывал электрические машины и химические источники тока.
<b>1880 г.</b> <b>Лачинов Дмитрий Александрович</b>	Доказал возможность передачи электроэнергии по проводам на значительные расстояния.
<b>1881 г.</b> <b>Депре Марсель</b>	Обосновал возможность передачи электроэнергии на большие расстояния и построил первую ЛЭП постоянного тока (882) длиной 51 км.
<b>1882 г.</b>	Построена центральная электростанция в Нью-Йорке
<b>1883 г., 1888 г.</b>	Построены электростанции постоянного тока в Петербурге и Москве.
<b>1888 г.</b> <b>Славянов Николай Гаврилович</b>	Разработал сварку металлическим электродом.
<b>1888 г.</b> <b>Доливо-Добровольский Михаил Осипович</b>	Показал оптимальность системы трехфазного тока, создал трехфазный синхронный генератор, а в 1889 и 1890 гг. – двигатели с короткозамкнутым и фазным ротором; в 1891 г. Предложил трехфазный трансформатор, осуществил первую электропередачу трехфазного тока.
<b>1886-1889 гг.</b> <b>Герц Генрих Рудольф</b>	Экспериментально доказал существование электромагнитных волн, подтвердил тождественность основных свойств электромагнитных и световых волн
<b>1895 г.</b> <b>Попов Александр Степанович</b>	Изобрел радиосвязь
<b>1904-1905 гг.</b> <b>Миткевич Владимир Федорович, Круг Карл Адольфович</b>	Начали чтение лекций по «Теории электрических и магнитных явлений» в Петербургском политехническом институте и по «Теории переменных токов» в Московском высшем техническом училище, открыв подготовку инженеров по электротехнике, электротехника выделена в самостоятельную отрасль.
<b>1925 г.</b> <b>Вологдин Валентин Петрович</b>	Создал высокочастотные машинные генераторы и высоковольтные ртутные выпрямители.
<b>1932 г.</b> <b>Шиллинг Павел Львович</b>	Изобрел электромагнитный телеграф.

Как видим, электрические и магнитные явления были известны в глубокой древности. Начало развития науки об электрических и магнитных явлениях принято считать со времени опубликования Гильбертом результатов исследований электрических и магнитных явлений (1600 г.)

Важным этапом в развитии науки об электричестве были исследования атмосферного электричества, выполненные М.В. Ломоносовым совместно с академиком Г.В. Рихманом. Работы М.В. Ломоносова и работы Б. Франклина вскрывают природу атмосферного электричества.

Открытие явления электромагнитной индукции М.Фарадеем (1831 г.) знаменует начало эры электричества. В 1833 г. Э.Х. Ленц формулирует фундаментальный принцип электромагнитной индукции и положение общности и обратимости явлений электромагнитной индукции и воздействия магнитного поля на проводники с током.

Разработка теории электромагнитных явлений Д.К. Максвеллом в «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873 г.) завершает создание классической теории электромагнетизма.

Опыты Г. Герца (1887-1889 гг.), Работы П.И. Лебедева (1895 г.) и изобретение радио А.С. Поповым (1895 г.) экспериментально подтверждают выводы теории о распространенности электромагнитных волн.

Этим заканчивается начальный период развития классической теории электромагнитных явлений.

Академиком В.Ф. Миткевичем в течении ряда лет развивались и углублялись основные положения теории электромагнетизма. Ближайшие ученики В.Ф. Миткевича – П.Л. Калантаров и Л.Р. Нейман создали один из первых учебников по теоретическим основам электротехники. Теория электрических и магнитных явлений и теоретические основы электротехники излагались в книгах А.А. Эйхенвальда, К.А. Круга, К.М. Поливанова и других авторов.

Очень большой вклад внесли русские ученые и в развитие практической электротехники, получившей широкое применение на судах.

## В.2. История развития судовой электротехники.

Электротехнике принадлежит ведущая роль в современном судостроении, т.к. производство, распределение, потребление и преобразование электрической энергии является наиболее удобным и экономичным по сравнению с другими видами энергии.

Впервые электродвигатель был применен для движения катера Б.С. Якоби еще в 1834-35 гг., испытание которого проходило на реке Нева. В 1866 г. Прожектора с дуговыми лампами были применены на пароходах «Ильмень» и «Ижора».

В 1886-87 гг. на судах начинают внедряться электровентиляторы, с 1892 г. – электроприводы рулевых установок, 1893 г. – электроэлеваторы, 1894 г. – внутрисудовая телефонная связь, 1895-97 гг. – электрифицированные грузовые лебедки, с 1900 г. – электроприводы вспомогательных установок. Наконец в 1903-04 гг. на Сормовском заводе были впервые в мире построены дизель – электроходы «Вандал» и «Сормат».

В 1900-02 гг. На судах Российского флота была в целом закончена электрификация судовых механизмов и систем. Внедрение на судах трехфазного переменного тока стало возможным после создания русским ученым и изобретателем М.О. Доливо-Добровольским в 1889 г. основных элементов трехфазной системы: генератора, двигателя, трансформатора.

# В.3. Структура дисциплины ТОЭ и программа её освоения

Электротехника как наука является областью знаний, которая занимается изучением электрических и магнитных явлений и их теоретическим использованием в различных областях техники.

В результате работы с данным курсом Вы овладеете научными знаниями по основным вопросам электротехники и тем самым обеспечите себе базовую электротехническую подготовку, необходимую для изучения последующих дисциплин.

Учебная дисциплина «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) является базовой для курсантов факультета судовой энергетики, обучающихся по специальности «Эксплуатация судовых энергетических установок» при изучении ими таких электротехнических дисциплин, как «Общая электротехника и электроника», «электрооборудование судов», а также других дисциплин, требующих знания основных законов электротехники.

Следует отметить, что ТОЭ входит отдельным разделом в дисциплину «Общая электротехника и электроника», изучаемую курсантами факультета навигации и связи, арктического факультета, и института Международного транспортного менеджмента.

Предлагаемое учебное пособие состоит из четырех разделов. Каждый раздел содержит контрольные вопросы в виде тестов для самопроверки знаний, а также примеры расчета электрических и магнитных цепей для оказания практической помощи в процессе освоения учебного материала в части решения задач, входящих в контрольные и расчетно-графические работы. Материалы пособия изложены с использованием применяемых в процессе изучения дисциплины терминов и определений.

**Изложенный в пособии учебный материал призван способствовать процессу усвоения знаний в соответствии со следующими требованиями компетенций ПДНВ для судомехаников:**

<b>Код</b>	<b>Результат обучения (компетенция) выпускника ООП</b>
<b>ПСК-13</b>	Знание базовой конфигурации и принципов работы следующего электрического, электронного и контрольного оборудования: Генераторных и распределительных систем; подготовки и пуска генераторов, их параллельного соединения и перехода с одного на другой; электромоторов, включая методологию их пуска; высоковольтных установок; последовательных контрольных цепей и связанных с ними системных устройств.
<b>ПСК-14</b>	Знание базовой конфигурации и принципов работы следующего электрического, электронного и контрольного оборудования: характеристик базовых элементов электронных цепей; схем автоматических и контрольных систем; функций, характеристик и свойств контрольных систем для отдельных механизмов, включая органы управления главной двигательной установкой и автоматические органы управления паровым котлом.
<b>ПСК-16</b>	Знание требований по безопасности для работы с судовыми электрическими системами, включая безопасное отключение электрического оборудования, требуемое для выдачи персоналу разрешения на работу с таким оборудованием.
<b>ПСК-17</b>	Умение осуществлять техническое обслуживание и ремонт оборудования электрических систем, распределительных щитов, электромоторов, генераторов, а также электросистем и оборудования постоянного тока.
<b>ПСК-18</b>	Умение обнаруживать неисправности в электроцепях, устанавливая места неисправностей и меры по предотвращению повреждений.
<b>ПСК-19</b>	Знание конструкции работы электрического контрольно–измерительного оборудования.
<b>ПСК-20</b>	Знание функционирования и рабочих испытаний следующего оборудования и его конфигурации: системы слежения, устройства автоматического управления и защитных устройств.
<b>ПСК-21</b>	Умение читать электрические и простые электронные схемы.

# I Анализ линейных электрических цепей постоянного тока

# 1. Электрическая цепь, электрический ток и напряжение.

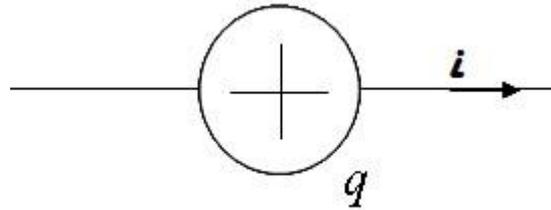
*Опр 1: Электрической цепью называется совокупность соединенных проводами элементов, образующих путь для электрического тока при условии, что электромагнитные процессы могут быть описаны с помощью понятий о токе, электродвижущих сил (ЭДС) и напряжении.*

*Опр 2: Элемент электрической цепи – отдельное устройство, входящее в состав цепи и выполняющее в ней определенную функцию.*

*Опр 3: Схема электрической цепи – это графическое изображение цепи с помощью условных обозначений её элементов и их соединений.*

Опр 4: *Электрический ток проводимости – это упорядоченное движение*

*носителей электрического заряда в веществе или вакууме.*



$$i(t) = dq/dt \text{ [A]}$$

*Математическое выражение для силы тока*

$$q = q_+ + q_-$$

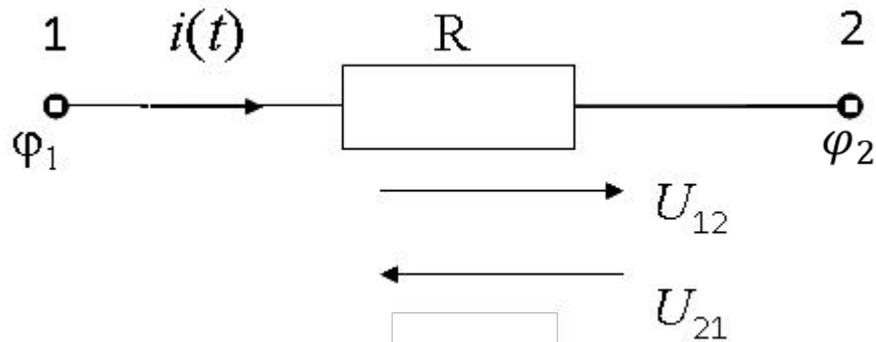
*Дольные и кратные*

$$1 \text{ миллиампер (мА)} = 0,001 \text{ A} = 10^{-3} \text{ A}$$

$$1 \text{ микроампер (мкА)} = 0,000001 \text{ A} = 10^{-6} \text{ A}$$

$$1 \text{ киллоампер (кА)} = 1000 \text{ A} = 10^3 \text{ A}$$

*Рис. 1.1. Обозначение тока, в электрической цепи*



Электрическое напряжение  $U(t)$  – это разность электрических потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  между зажимами 1 и 2 участка цепи R по которому проходит ток  $i(t)$ , т.е.  $U(t) = \varphi_1 - \varphi_2$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$U_{12} = -U_{21}$$

Дольные и кратные единицы

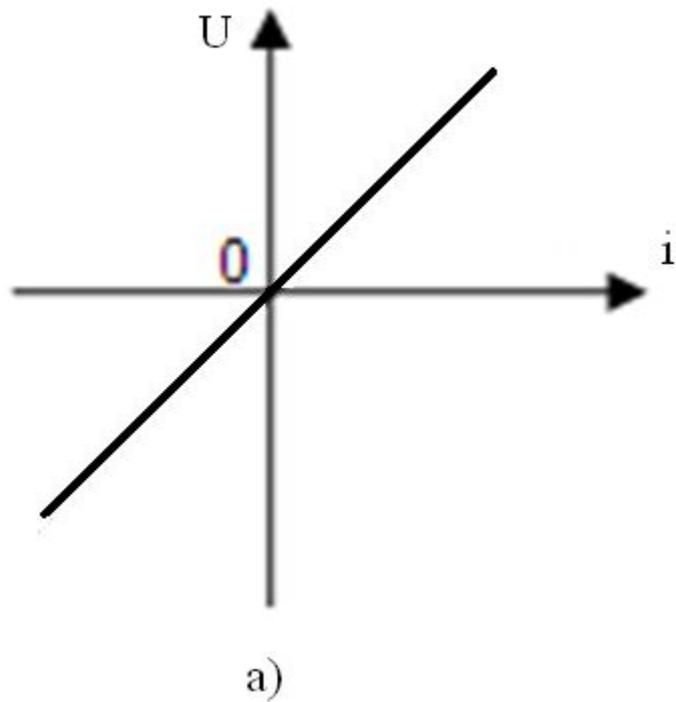
$$1 \text{ милливольт (мВ)} = 0,001\text{В} = 10^{-3}\text{В};$$

$$1 \text{ микровольт (мкВ)} = 0,000001\text{В} = 10^{-6}\text{В};$$

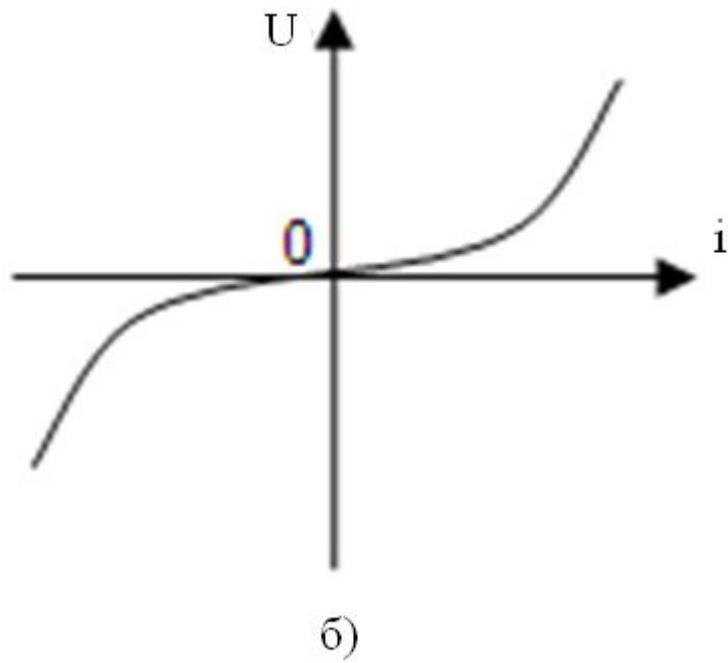
$$1 \text{ киловольт (кВ)} = 1000\text{В} = 10^3\text{В}$$

*Рис. 1.1. Обозначение потенциалов и напряжения в электрической цепи*

## 2. Элементы электрической цепи.



*Рис. 1.2. Вольтамперная характеристика линейного (а) элемента электрической цепи*



*1.2. Вольтамперная характеристика нелинейного (б) элемента электрической цепи*

$$U = R \cdot I \quad R = \frac{U}{I}, \text{ Ом}$$

$$R = \frac{\rho l}{S}, \text{ Ом}$$

$l$  – длина проводника, [м];

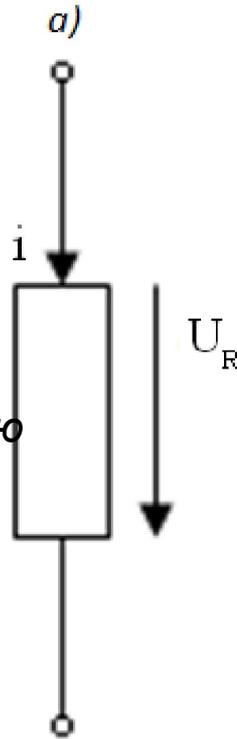
$\rho$  – удельное сопротивление;

$S$  – сечение [мм<sup>2</sup>]

Величина обратная сопротивлению называется - проводимостью

$$G = 1/R = \frac{I}{U} \quad \left[ \frac{1}{\text{Ом}} \right]$$

$$\rho = \frac{RS}{l}, \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$$



Величина обратная  $\rho$  - называется удельной проводимостью

Пассивные электрические элементы – это элементы, в которых рассеивается или накапливается энергия

Сопротивление ( $R, r$ ) – элемент цепи, в котором происходит необратимое преобразование электрической энергии в тепловую, а напряжение на его зажимах и ток через него связаны пропорциональной зависимостью

Рис. 1.3. Постоянные пассивные элементы: резистор (а).

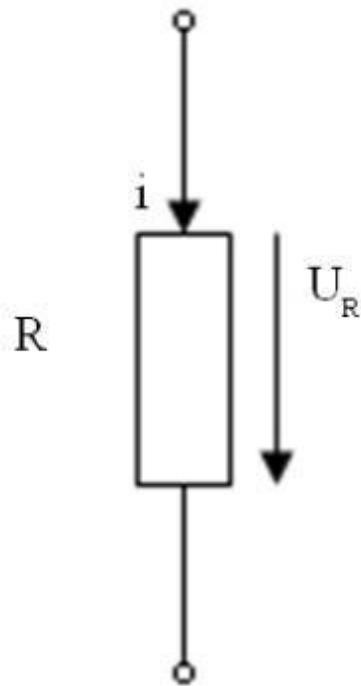
Электрическое сопротивление зависит от температуры. Эта зависимость характеризуется температурным коэффициентом сопротивления  $\alpha$ . Для металлов он положителен (сопротивление увеличивается с нагреванием), для растворов и угля — отрицателен (сопротивление уменьшается с нагревом).

$$\alpha_{\text{м,ал}} = 0,004 \text{ (при } t_{\text{ос}} = 20^\circ\text{C)}$$

$$\rho_{\text{сер}} = 0,016; \rho_{\text{м}} = 0,01786;$$

$$\rho_{\text{ал}} = 0,0286;$$

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha(t_2^\circ - t_1^\circ)]$$



Дольные  
единицы

1 миллиом (мОм) = 0.001 Ом =  $10^{-3}$  Ом

1 килоом (кОм) = 1000 Ом =  $10^3$  Ом

1 мегаом (МОм) = 1000000 Ом =  $10^6$  Ом

*Рис. 1.3. Постоянные пассивные элементы: резистор.  
Дольные и кратные единицы*

$$U_L = L(di/dt)$$

$$\Psi = w \Phi$$

$$L = \frac{\Psi}{i}, \text{Гн}$$

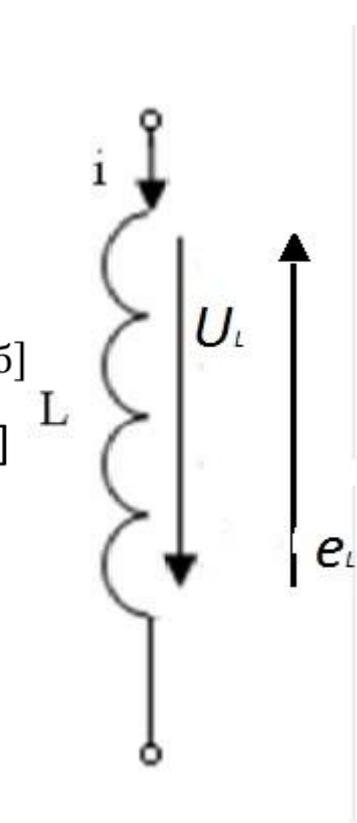
$$\Psi = Li$$

$\psi$  (пси) – потокосцепление, [Вб]

$\Phi$  – магнитный поток, [Вб]

$L$  – индуктивность, [Гн]

$W$  – количество витков



Дольные  
единицы  
 $L > 0$

Миллигенри (мГн) =  $10^{-3}$  Гн

Микрогенри (мкГн) =  $10^{-6}$  Гн

$$e_L = -d\Psi/dt$$

$$e_L = -L di/dt$$

$$U_L = -e_L = L di/dt$$

$e_L$  - ЭДС самоиндукции

Индуктивность – элемент цепи, в магнитном поле которого происходит обратимое накопление энергии, а напряжение на его зажимах и ток через него, связаны через производную.

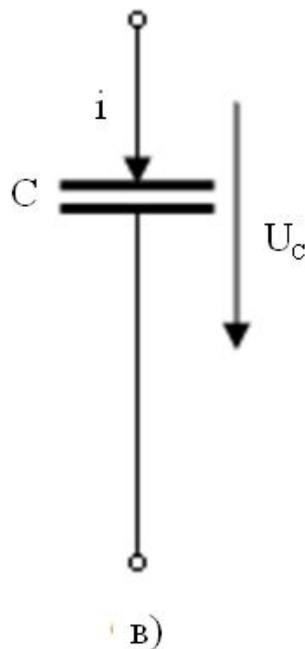
Рис. 1.3. Постоянные пассивные элементы: катушка индуктивности

Емкость  $C$  – это элемент цепи, в электрическом поле которого происходит обратимое накопление энергии, а напряжение на его зажимах и ток через него связаны через интегрирование.

$$U_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

$$q = C \cdot U_c$$

$$C, \Phi = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}}$$



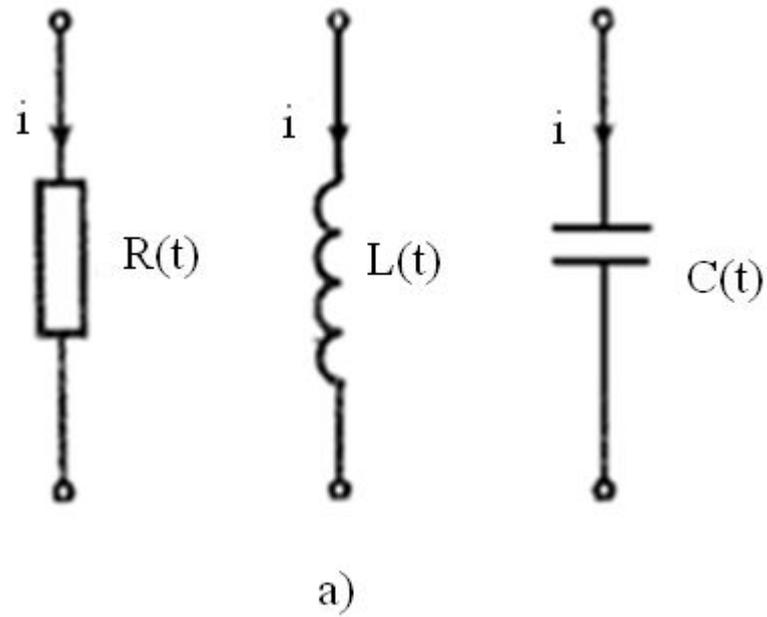
Дольные  
единицы

$$1 \text{ микрофарада (мкФ)} = 10^{-6} \Phi$$

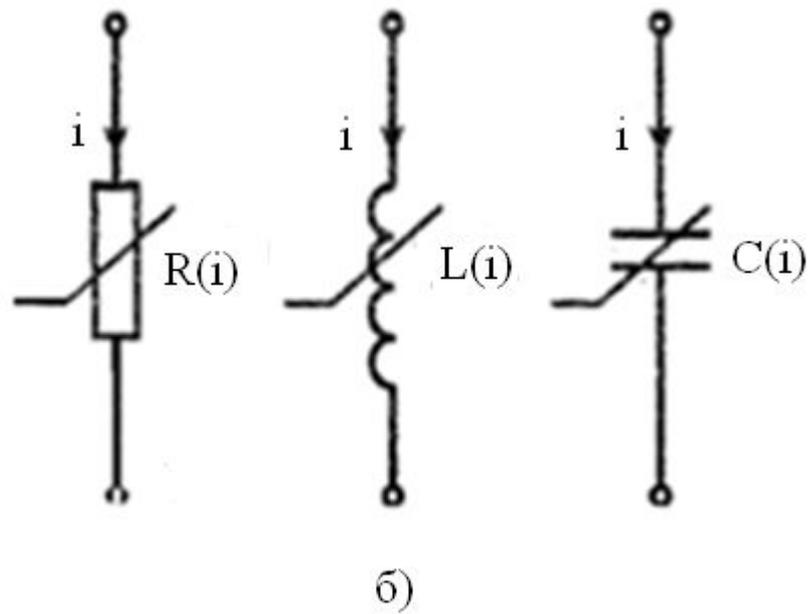
$$1 \text{ нанофарада (нФ)} = 10^{-9} \Phi$$

$$1 \text{ пикофарада (пФ)} = 10^{-12} \Phi$$

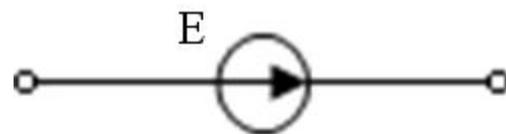
Рис. 1.3. Постоянные пассивные элементы: конденсатор (в)



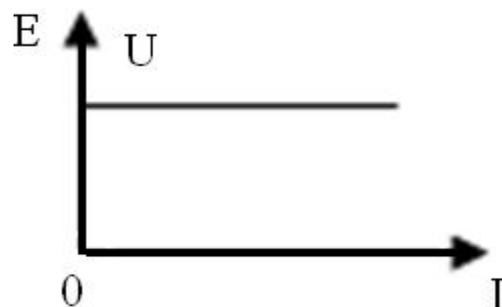
*Рис. 1.4. Пассивные элементы: с переменными параметрами (а)*



*Рис. 1.4. Пассивные элементы: нелинейные (б)*



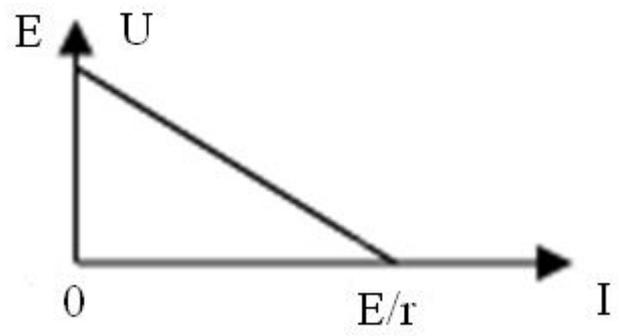
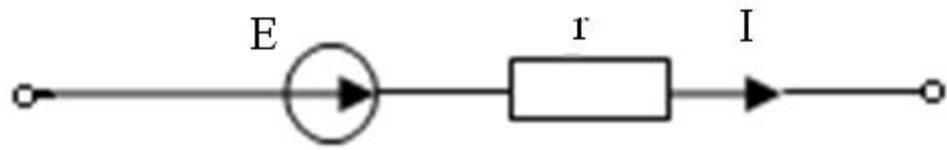
$$r = 0$$



a)

*Идеальным источником ЭДС называется такой источник электрической энергии, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока, т.е. внутреннее сопротивление  $r=0$ . Поэтому при замыкании идеального источника ЭДС через него протекает бесконечно большой ток короткого замыкания.*

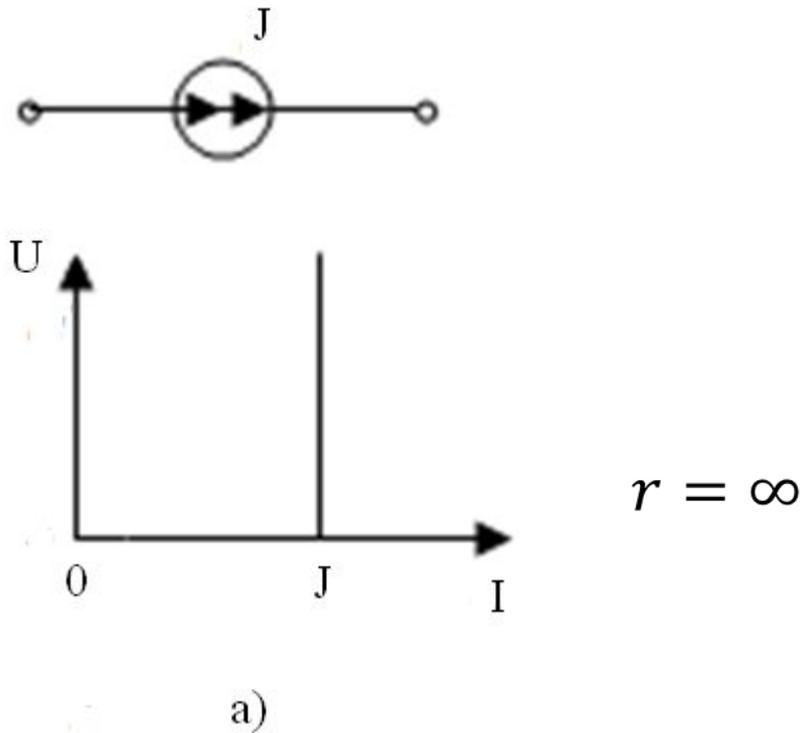
*Рис. 1.5. Источники ЭДС: идеальный (a)*



$$r > 0$$

б)

Рис. 1.5. Источники ЭДС: реальный (б)



*Идеальный источник тока – это источник электрической энергии, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах, при этом внутреннее сопротивление  $r = \infty$ . В идеальном источнике тока напряжение на его зажимах в режиме холостого хода (при разомкнутых зажимах) достигает бесконечно большого значения*

*Рис. 1.6. Источники тока: идеальный (а)*

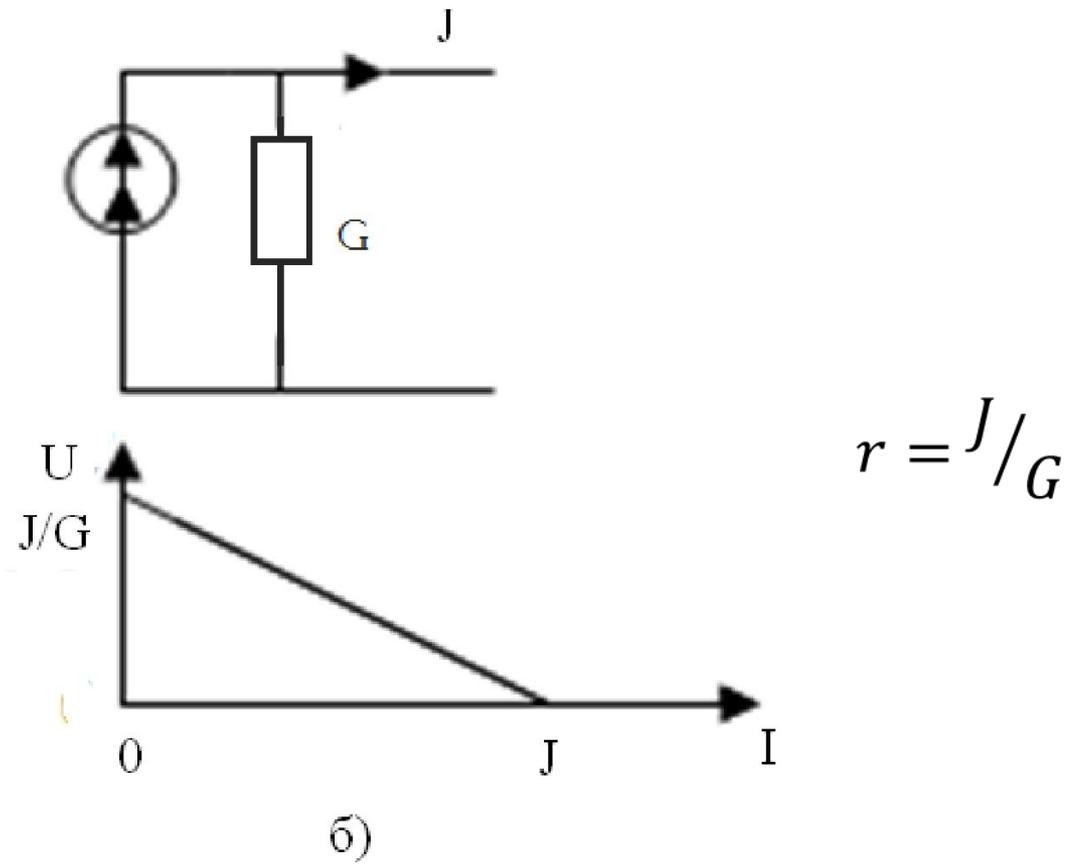


Рис. 1.6. Источники тока: реальный (б)

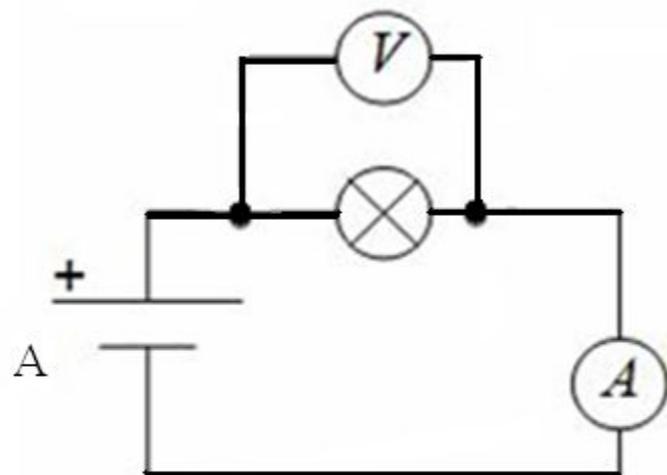
### 3. Топологические характеристики электрических цепей постоянного тока.

*Опр 6: Схема замещения электрической цепи состоит из совокупности различных идеализированных элементов, выбранных так, чтобы можно было с заданным или необходимым приближением описать процессы в цепи.*

*Ветвь – участок электрической цепи между двумя узлами, представляющий один элемент или последовательное соединение нескольких элементов, через которые протекает один и тот же ток.*

*Узел электрической цепи – это место соединения не менее трех ветвей, на схеме обозначаемое точкой.*

*Контур электрической цепи – это любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям.*



a)

*Рис. 1.7. Принципиальная схема (a)*

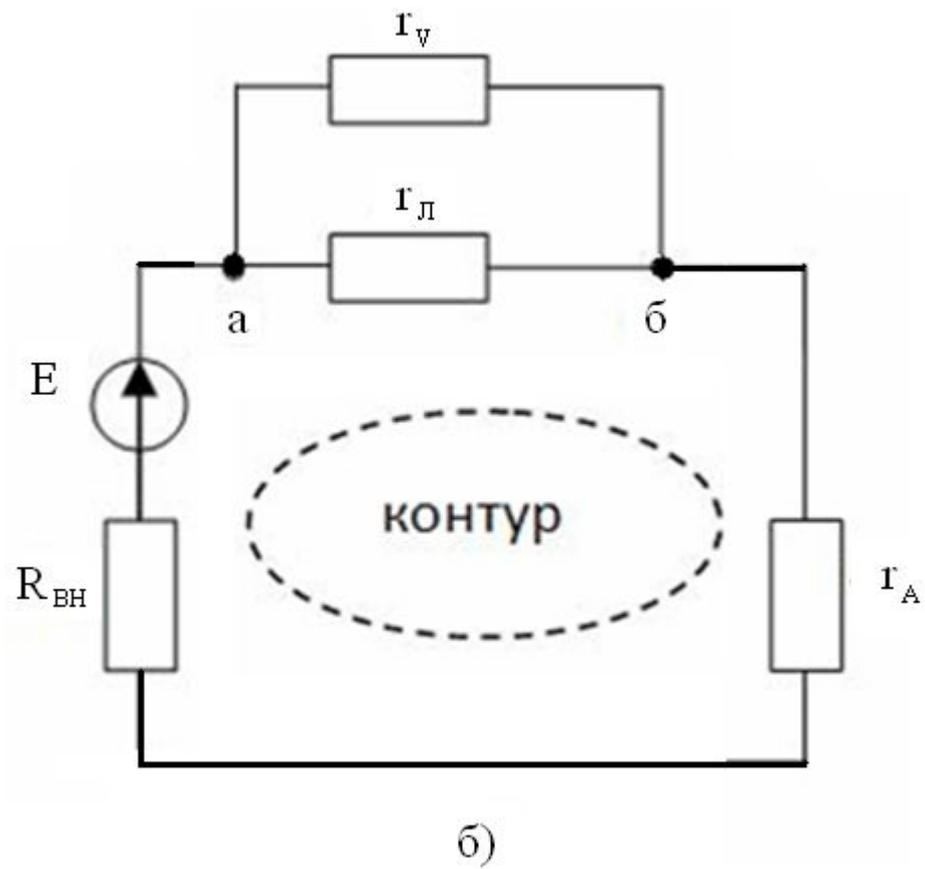


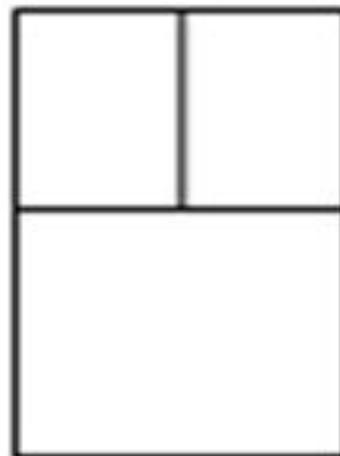
Рис. 1.7. Схема замещения (б)



1)



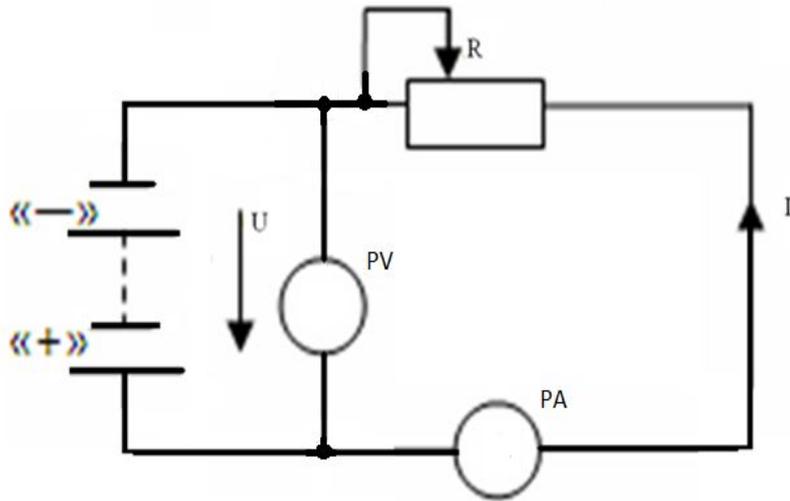
2)



3)

*Рис. 1.8. Структурные схемы трех электрических цепей.*

## 4. Законы электрической цепи постоянного тока.

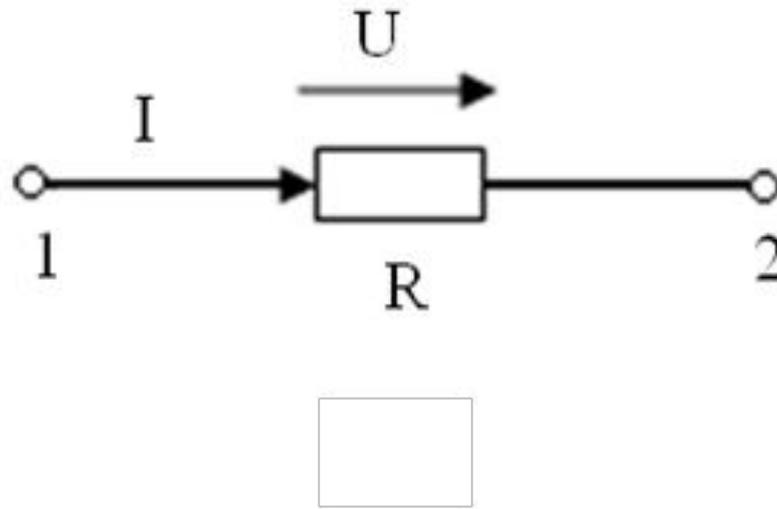


*Рис. 1.9. Опытная установка, состоящая из источника регулируемого напряжения, переменного резистора, амперметра и вольтметра*

$$I = U/R, A$$

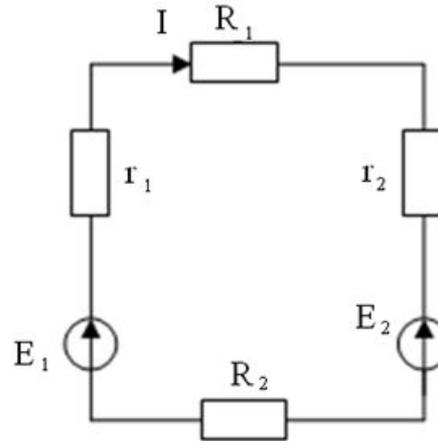
$$I = G \cdot U$$

$$G = 1/R, \text{См}$$



*Согласно закону Ома для участка цепи без источника ЭДС ток  $I$  на участке цепи 1-2 равен отношению напряжения  $U$  на этом участке к сопротивлению  $R$  этого участка*

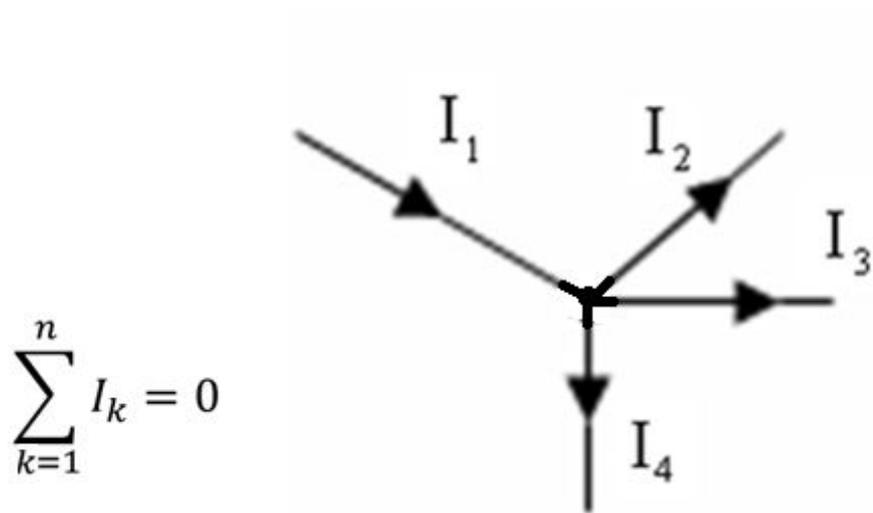
*Рис. 1.10. Закон Ома для участка цепи без источника ЭДС*



$I = \frac{\sum E_k}{\sum R_k + \sum r_k}$ , где ток в неразветвленной замкнутой цепи равен отношению алгебраической суммы ЭДС к сумме всех сопротивлений цепи.

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2}.$$

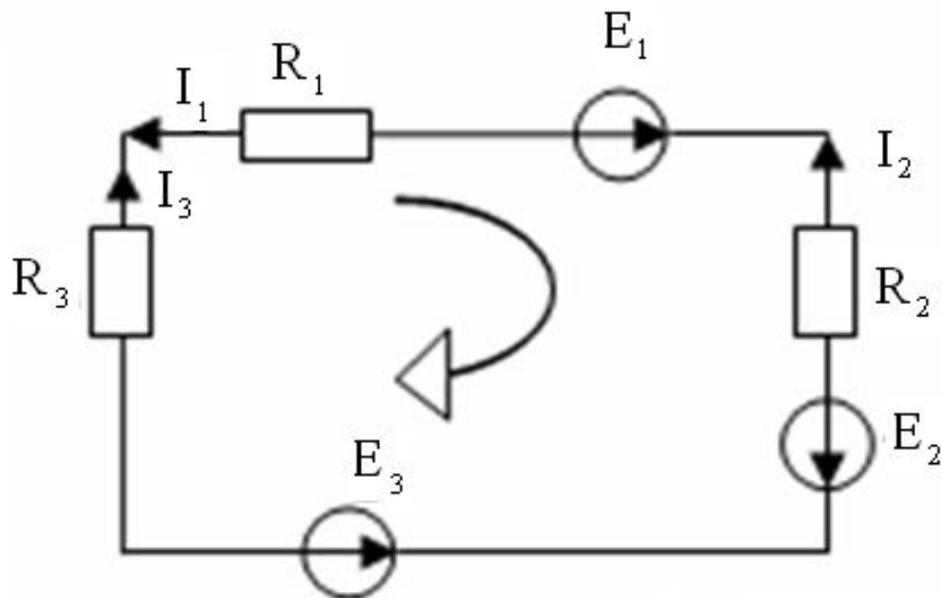
*Рис. 1.10. Закон Ома для замкнутой цепи с источниками ЭДС*



$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0 \quad \text{или} \quad I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

*Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю*

*Рис. 1.11. Первый закон Кирхгофа*



*Алгебраическая сумма ЭДС, действующих в любом контуре разветвленной электрической цепи, равна алгебраической сумме падений напряжений на всех активных сопротивлениях этого контура.*

$$\sum_{l=1}^L E_L = \sum_{k=1}^R R_k I_k$$

$$E_1 + E_2 - E_3 = -R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3$$

*Рис. 1.11. Второй закон Кирхгофа*

5. Энергия (работа) электрического тока.  
Тепловой эффект. Закон Джоуля-Ленца.

Мощность цепи постоянного тока

$$P = UI = RI^2 = GU^2, \text{ Вт}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт} \\ 1 \text{ мВт} = 10^6, \text{ Вт} \end{array} \right. \text{ - Кратные единицы}$$

$P = EI$  – мощность источника ЭДС

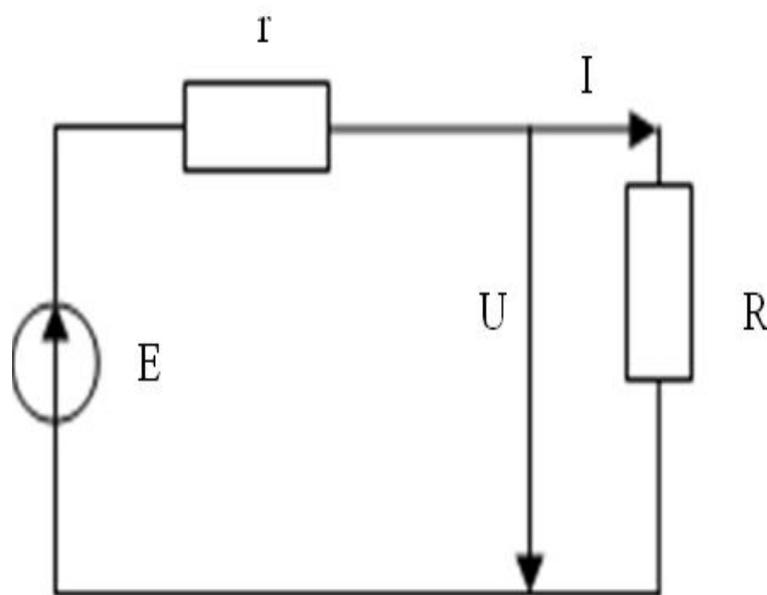
$$\sum_{i=1}^n E_i I_i = \sum_{k=1}^m R_k I_k^2$$

Согласно закону сохранения энергии алгебраическая сумма мощностей, отдаваемых всеми источниками энергии,  $E_i$  в цепи равна сумме мощностей, потребляемых в её элементах  $R_k$  приемниками

$W = Pt$ , Дж Энергия электрического

$EI = rI^2 + RI^2$  **уравнение баланса мощностей для приведенной цепи**, где:  $EI$  – мощность источника ЭДС;  $rI^2$  – Мощность потери на внутреннем сопротивл.  $r$ ;  $RI^2$  – Мощность потребляемой нагрузкой

Рис. 1.12. Мощность  $P$  и энергия  $W$  цепи постоянного тока на примере цепи с источником ЭДС ( $E-r$ ) и потребителем энергии  $R$ , закон Джоуля-Ленца.



$$Q = I^2 Rt, \text{ Дж}$$

Закон Джоуля – Ленца. Представив  $I = \frac{U}{R}$ , получим другие формы этого закона

$$Q = UIt = Pt, = W, \text{ Дж}$$

$$0,24I^2 Rt \text{ т. е: } 1 \text{ Дж} = 0,24 \text{ кал.}$$

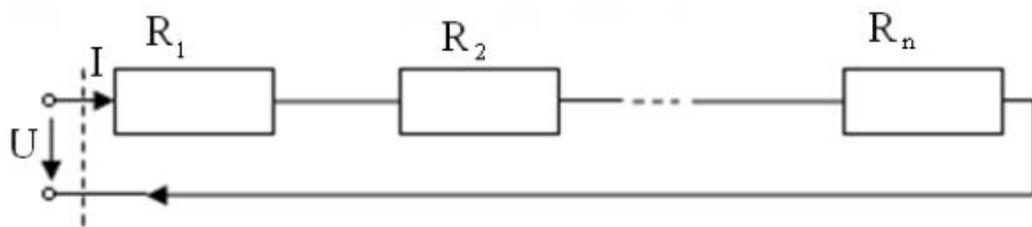
$$1 \text{ Вт} \cdot \text{с} = 1 \text{ Дж.} \\ 1 \text{ кВт} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

## 6. Расчет простых цепей постоянного тока. Эквивалентные преобразования схем электрических цепей.

*К простым электрическим цепям относятся неразветвленные цепи и такие разветвленные цепи, у которых один или несколько источников ЭДС расположены в одной ветви.*

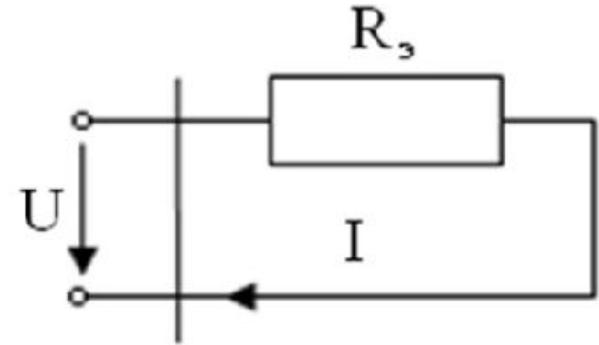
*Определение 7. Эквивалентным называют такие преобразования части схемы электрических цепей, при которых токи и напряжения в не преобразуемой ее части остаются работоспособными.*

Преобразование схем с  
последовательным, параллельным и  
смешанным соединением сопротивлений.



a)

$$U = R_3 I$$



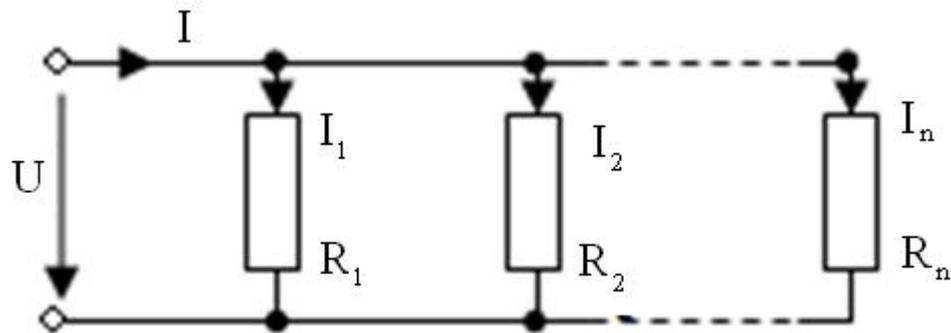
б)

При последовательном соединении сопротивлений эквивалентное сопротивление равно сумме всех сопротивлений цепи, что подтверждается вторым законом Кирхгофа

$$U = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = I \sum_{k=1}^n R_k$$

-По второму  
закону  
Кирхгофа

*Рис. 1.13. Последовательное соединение резисторов (а) и его представление эквивалентным сопротивлением (б)*



$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n = I_1 R_1 = I_2 R_2 = \dots = I_n R_n$$

Параллельным соединением сопротивлений называется такое, при котором к двум точкам электрической цепи присоединено несколько сопротивлений, образующих разветвление, состоящее из параллельных ветвей.

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad \text{- По первому закону}$$

Кирхгофа

$$\frac{U}{R_3} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \dots + \frac{U_n}{R_n} \rightarrow \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_3 = G_1 + G_2 + \dots + G_n,$$

Т.е. при параллельном соединении эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей отдельных ветвей

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Для двух параллельных сопротивлений

Рис. 1.14. Параллельное соединение резисторов

Дано

$$R_1 = r_1 = 2 \text{ Ом}; R_2 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 1 \text{ Ом} \quad E = 60 \text{ В}$$

$$R_4 = 3 \text{ Ом}$$

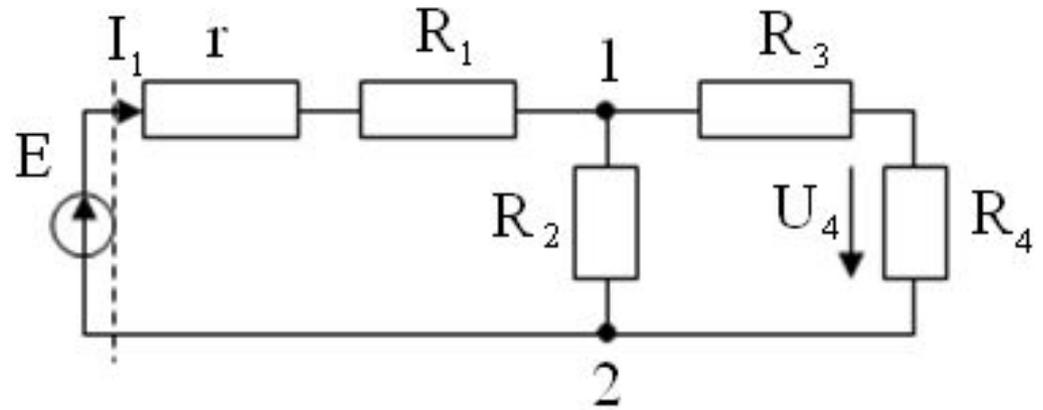
Найти:  $U_4$  на  $R_4$  — ?

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 4 \text{ Ом};$$

$$R_{2,3,4} = \frac{R_2 \cdot R_{3,4}}{R_2 + R_{3,4}} = 2 \text{ Ом}$$

$$R_{\Sigma} = R_1 + r + R_{2,3,4} = 6 \text{ Ом}$$

$$I = \frac{E}{R_{\Sigma}} = 10 \text{ А};$$



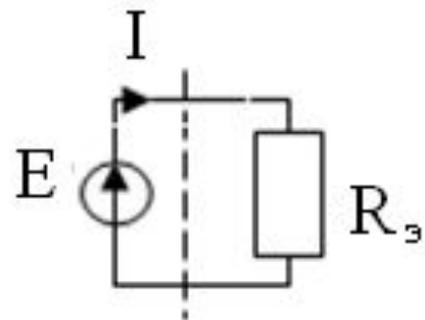
a)

$$U_{1,2} = I \cdot R_{2,3,4} = 20 \text{ В}$$

$$I_{34} = \frac{U_{12}}{R_{34}} = 5 \text{ А}.$$

$$U_4 = I_{34} \cdot R_4 = 15 \text{ В}.$$

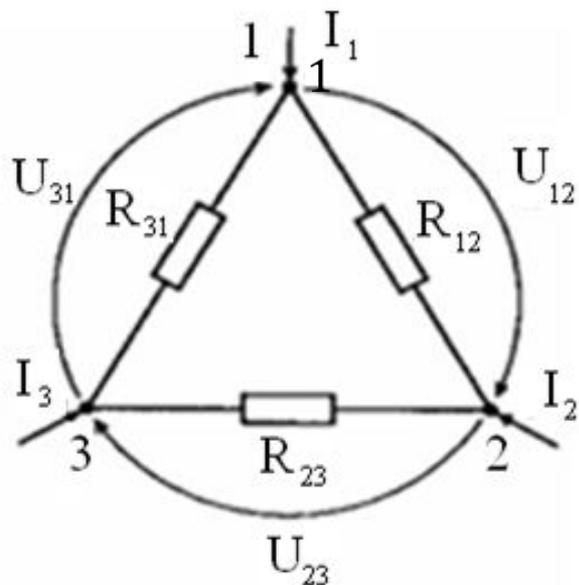
Рис. 1.15. Смешанное соединение резисторов (а) и его эквивалентное представление (б)



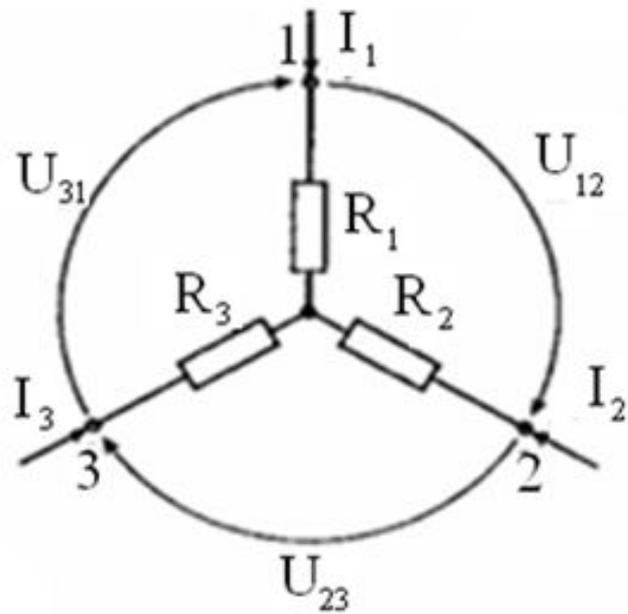
б)

*Рис. 1.15. Смешанное соединение резисторов (а)  
и его эквивалентное представление (б)*

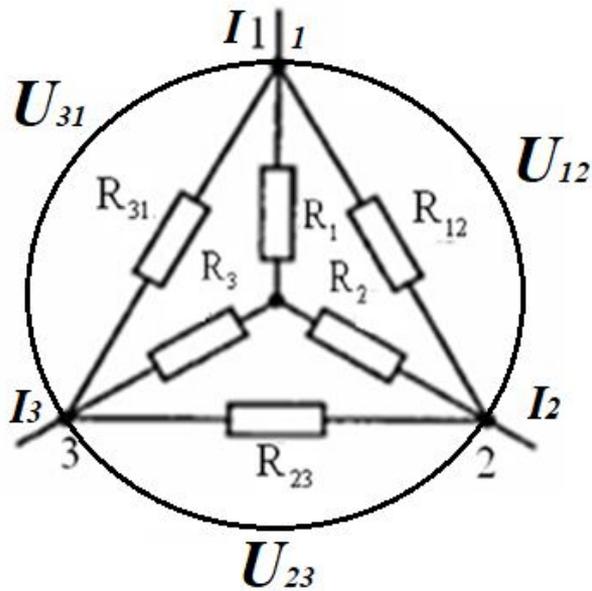
Преобразование треугольника  
сопротивлений в звезду и наоборот.



*Рис. 1.16. Треугольник сопротивлений*



*Рис. 1.16. Звезда резисторов*



$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Сопротивление луча звезды равно  
произведению сопротивлений  
прилегающих сторон  
треугольника,

деленному на сумму сопротивлений трех сторон  
треугольника

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

Сопротивление стороны треугольника равно сумме  
сопротивлений прилегающих лучей звезды и их  
произведения разделенного на сопротивление треть  
луча.

Рис. 1.16. Треугольник и звезда резисторов  
и их совместное изображение.

$$R_1 + R_2 = R_{12} \frac{R_{23} + R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 + R_3 = R_{23} \frac{R_{31} + R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 + R_1 = R_{31} \frac{R_{12} + R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Дано

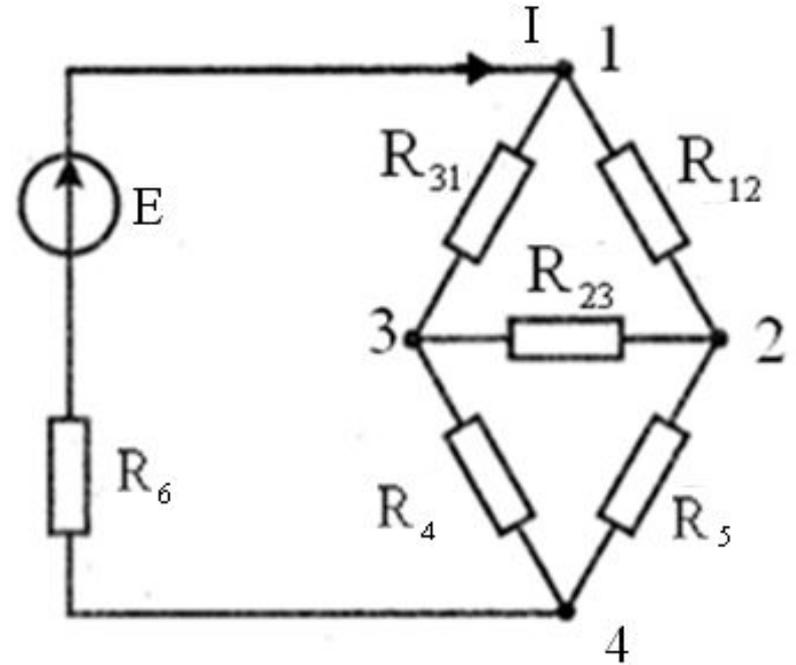
$$R_{23}=R_{31}=12 \text{ Ом}; R_4=5,5 \text{ Ом}; E=30 \text{ В}$$

$$R_{12}=8 \text{ Ом}; R_5=7 \text{ Ом}; R_6=2 \text{ Ом}$$

---

$$I = ?$$

Для решения задачи преобразуем  
треугольник 1-2-3 в звезду.

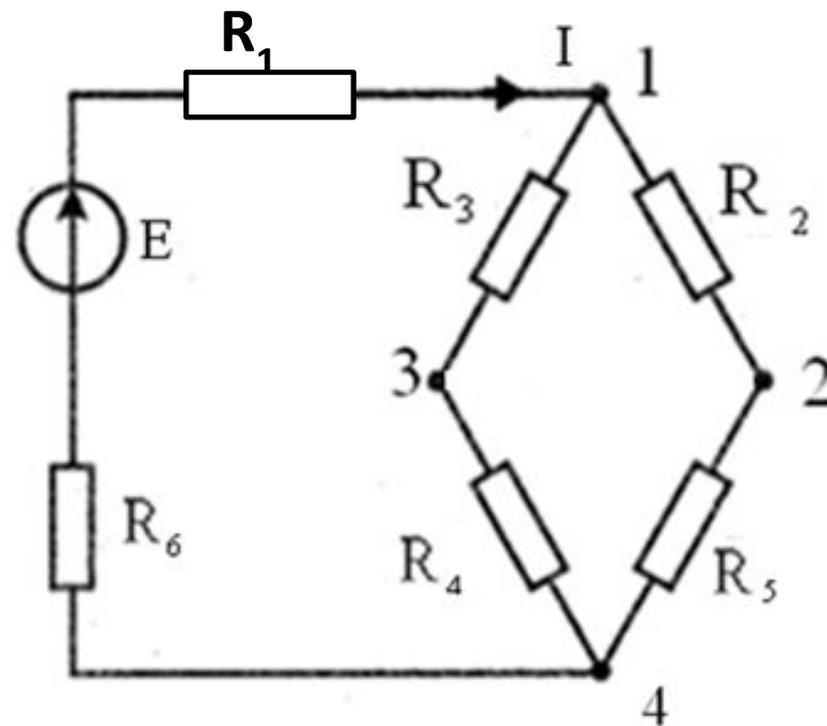


*Рис. 1.17. Пример эквивалентного преобразования  
треугольника сопротивлений в звезду.*

$$R_1 = R_2 = 30 \text{ M}; R_3 = 4,5 \text{ Ом}$$

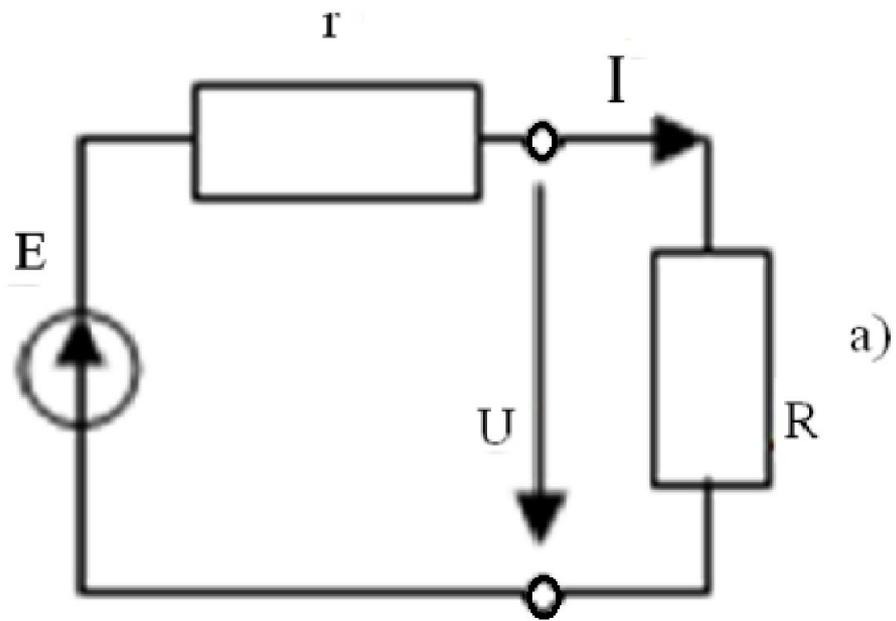
$$R_{14} = R_1 + \frac{(R_2 + R_5) \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 8 \text{ Ом};$$

$$I = E / (R_6 + R_{14})$$



Эквивалентное представление мостовой схемы резисторов

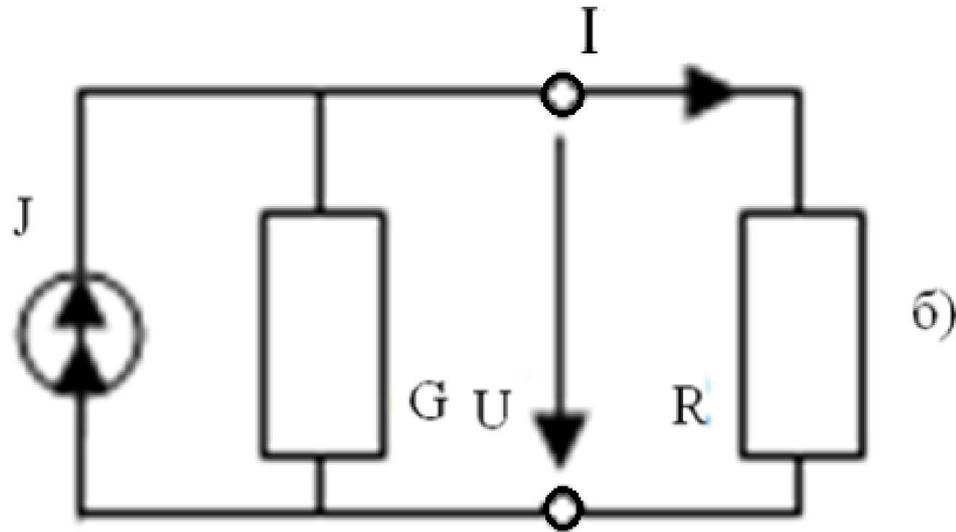
# Преобразование схем с источником ЭДС и тока.



$$U = E - rI;$$

$$I = \frac{E}{r} - \frac{U}{r}$$

*Рис. 1.18. Электрическая схема с источником ЭДС (а) и ее эквивалентное представление с источником тока (б)*



$$I = J - GU, \quad U = J/G - I/G$$

$$J = E/r \text{ и } G = 1/r, \quad E = J/G \text{ и } r = 1/G$$

Условия эквивалентности

*Рис. 1.18. Электрическая схема с источником ЭДС (а) и ее эквивалентное представление с источником тока (б)*

$$E_1 = 6 \text{ В}, E_2 = 3 \text{ В}$$
$$r_1 = r_2 = R = 10 \text{ Ом}$$

---

$I = ?$

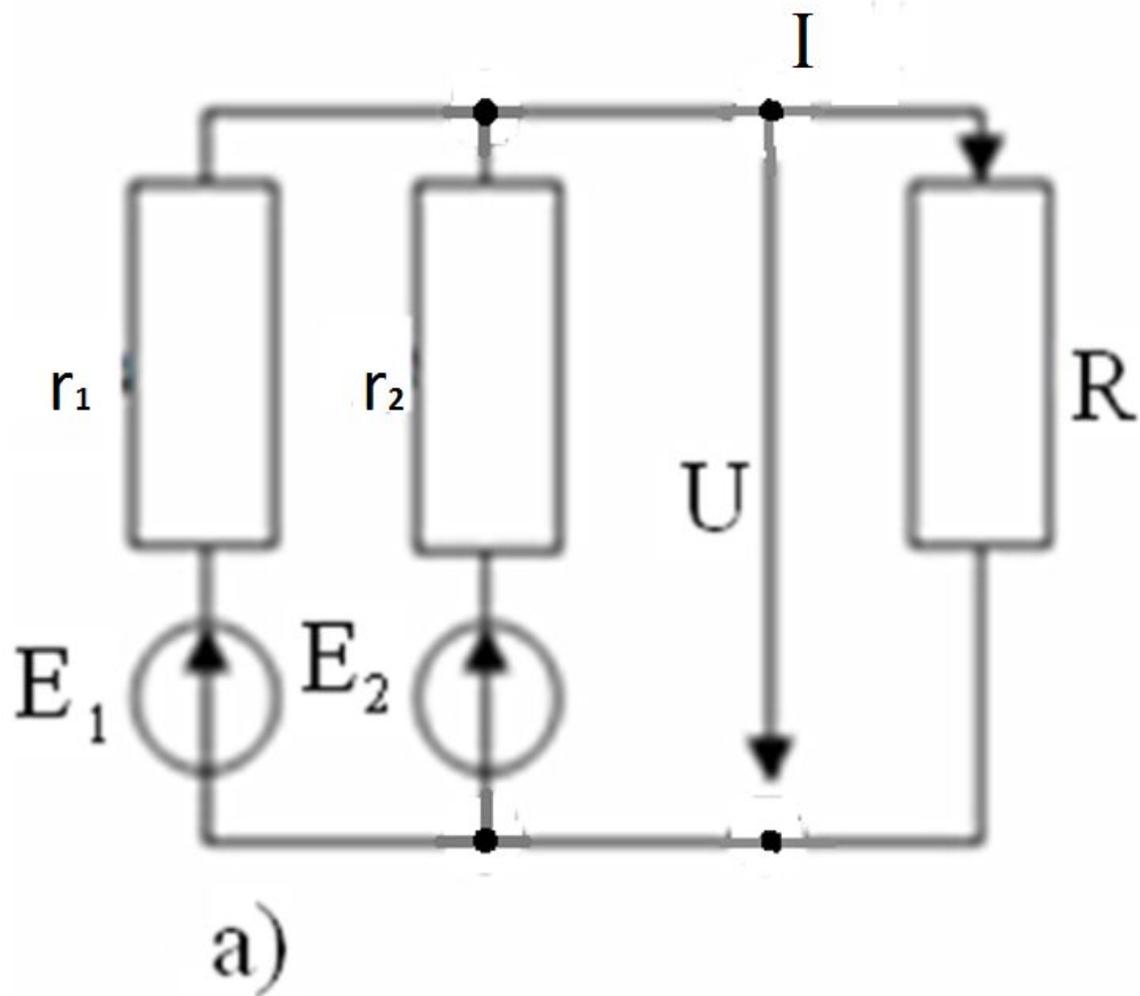
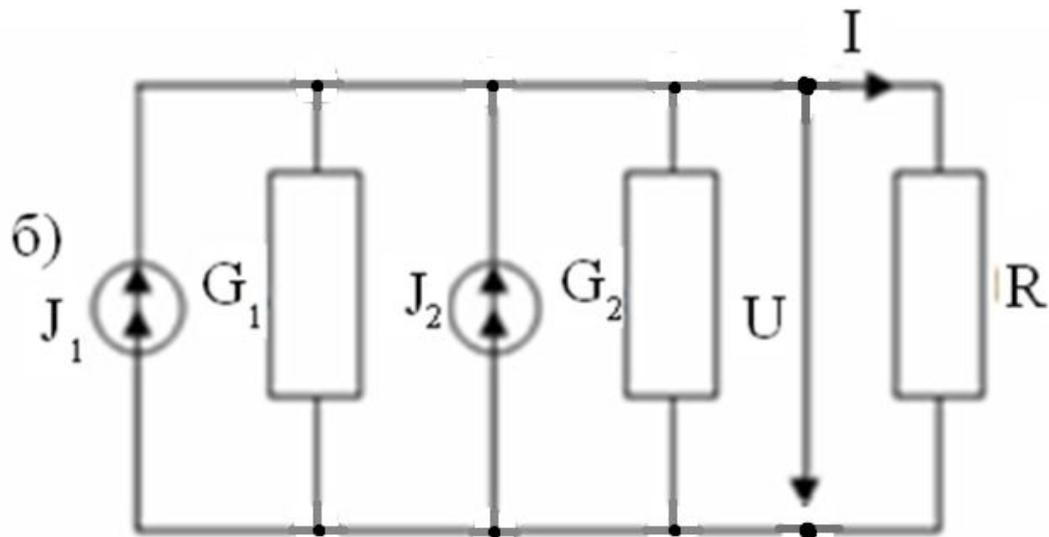


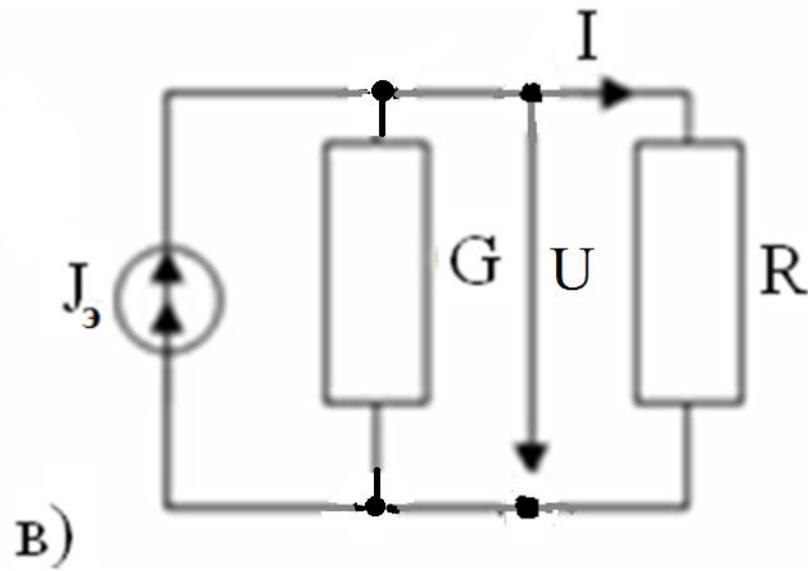
Рис. 1.19. Пример Эквивалентного преобразования (б, в) электрической цепи с несколькими источниками ЭДС (а) в цепь с одним источником (г)



$$J_1 = \frac{E_1}{r_1} = 0,6 \text{ A}; G_1 = \frac{1}{r_1} = 0,1 \text{ См}$$

$$J_2 = \frac{E_2}{r_2} = 0,3 \text{ A}; G_2 = \frac{1}{r_2} = 0,1 \text{ См}$$

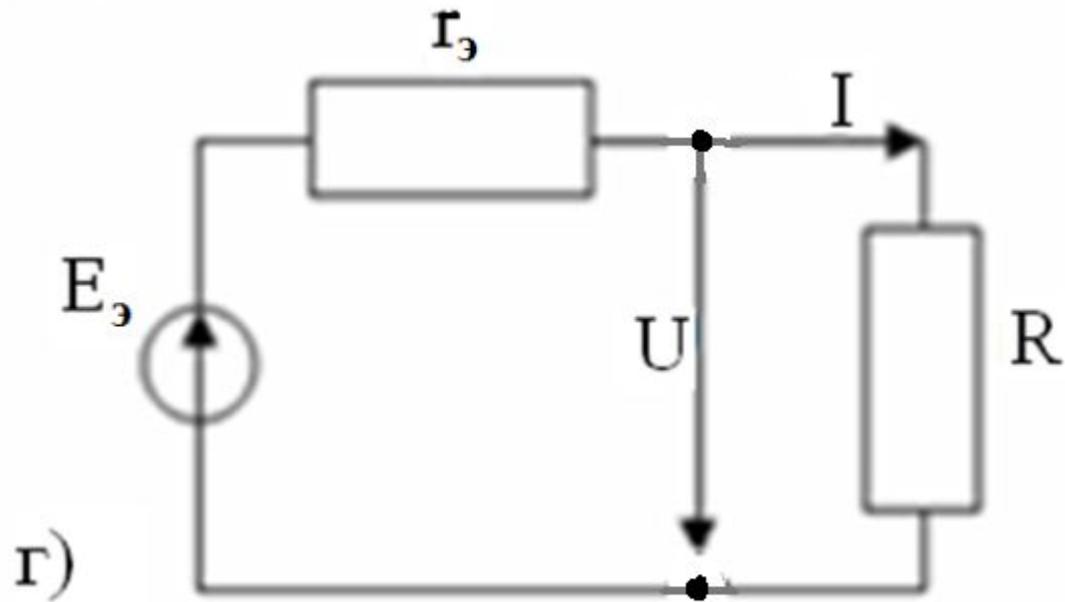
*Рис. 1.19. Пример Эквивалентного преобразования (б, в) электрической цепи с несколькими источниками ЭДС (а) в цепь с одним источником (г)*



$$J_3 = J_1 + J_2 = 0,9 \text{ A}$$

$$G_3 = G_1 + G_2 = 0,2 \text{ См}$$

*Рис. 1.19. Эквивалентное преобразование (б, в) электрической цепи с несколькими источниками ЭДС (а) в цепь с одним источником (г)*



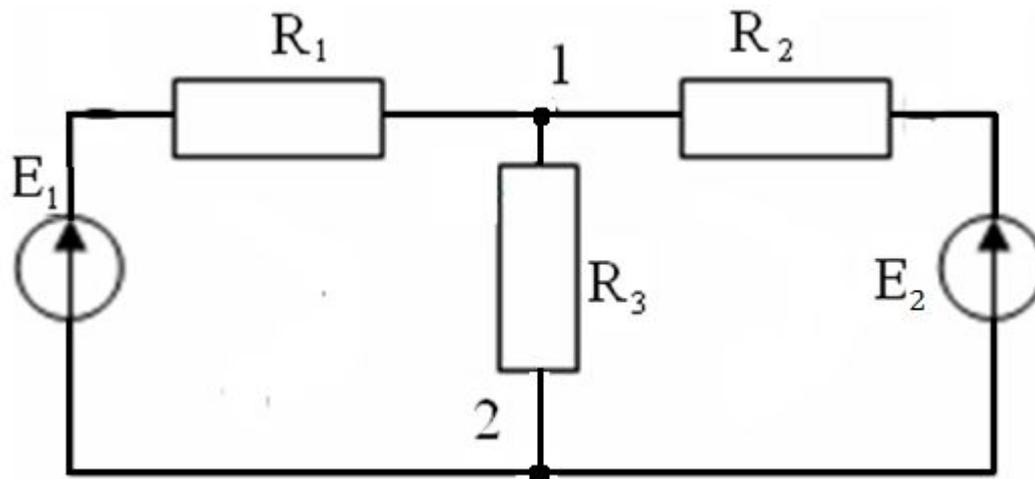
$$E_3 = J_3 / G_3 = 4,5 \text{ В}; \quad r_3 = 1 / G_3 = 5 \text{ Ом.}$$

$$I = \frac{E_3}{r_3 + R} = 0,3 \text{ А}$$

*Рис. 1.19. Эквивалентное преобразование (б, в) электрической цепи с несколькими источниками ЭДС (а) в цепь с одним источником (г)*

# 7. Методы анализа сложных электрических цепей постоянного тока.

## 7.1 Расчет сложных цепей постоянного тока по законам Кирхгофа.



$$n = b - (y - 1)$$

$b$  – количество ветвей, равная количеству искомым токов  
 $y$  – количество узлов;  
 $y-1$  – количество уравнений по первому закону Кирхгофа  
 $n$  – количество уравнений по второму закону Кирхгофа

*Рис. 1.20. Электрическая цепь с числом узлов  $y = 2$   
 и количеством ветвей  $b = 3$*

$$E_1 = 50 \text{ В}; E_2 = 10 \text{ В}$$

$$r_1 = 0,4 \text{ Ом}; r_2 = 1,0 \text{ Ом}$$

$$R_1 = 3 \text{ Ом}; R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$$

$$I_1; I_2; I_3 - ?$$

Решени

е

В схеме  $\gamma=2$ ;  $b=3$ . Следовательно по первому закону Кирхгофа  
Надо составить  $(\gamma-1)$  уравнений, то есть одно уравнение,  
а по второму два уравнения. Обозначим стрелками токи в ветвях,  
Выберем два независимых контура и укажем стрелками  
направление

их обхода. Составляем одно уравнение по первому закону

Кирхгофа для

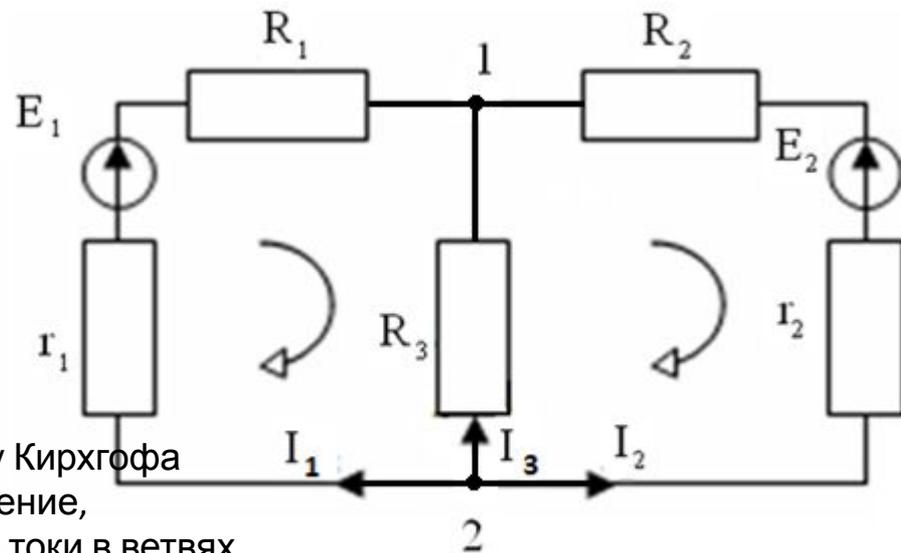
первого узла и два уравнения по второму закону:

$$n = b - (\gamma - 1) = 2$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$(R_1 + r_1)I_1 - R_3I_3 = E_1$$

$$-(R_2 + r_2)I_2 + R_3I_3 = -E_2$$



Перепишем эти уравнения с учетом исходных  
данных:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$3,4I_1 - 2I_3 = 50$$

$$-3I_2 + 2I_3 = -10$$

$$I_1 = 10 \text{ А}; I_2 = -2 \text{ А}; I_3 = -8 \text{ А.}$$

При решении через  $I_3$

Получим  $I_1=10\text{А}$ ;

$I_2=-2\text{А}$ ;  $I_3=-8\text{А}$

Направление тока в  $I_2$  и  $I_3$

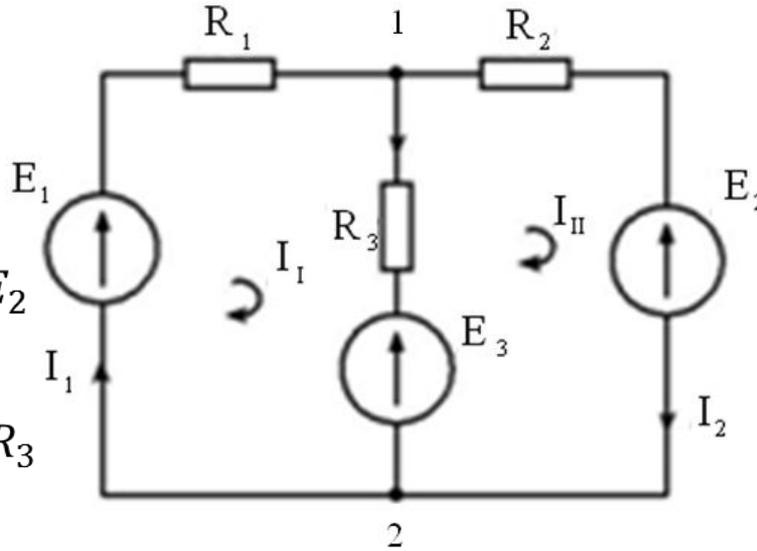
На схеме изменяем

на противоположные

Рис. 1.21. Пример расчета разветвленной цепи с помощью уравнений Кирхгофа.

## 7.2 Расчет электрических цепей методом контурных токов.

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\
 R_1 I_1 + R_3 I_3 &= E_1 - E_3 \\
 R_2 I_2 - R_3 I_3 &= E_3 - E_2 \\
 (R_1 + R_3) I_1 - R_3 I_2 &= E_1 - E_3 \\
 -R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 &= E_3 - E_2 \\
 I_3 &= I_1 - I_2 \\
 R_{11} &= R_1 + R_3; \quad R_{22} = R_2 + R_3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 R_{12} &= R_{21} = -R_3 \\
 E_I &= E_1 - E_3 \\
 E_{II} &= E_3 - E_2 \\
 R_{11} I_I + R_{12} I_{II} &= E_I \\
 R_{21} I_I + R_{22} I_{II} &= E_{II}
 \end{aligned}$$

*Рис. 1.22* Схема к расчету цепей методом контурных токов.

Дано:  $E_1 = 6\text{ В}$ ;  $E_3 = 3\text{ В}$ ;  
 $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \text{Ом}$

$I_1, I_2, I_3 - ?$

$$R_{11} = R_1 + R_2 = 2\ \text{Ом}$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 = 2\ \text{Ом}$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_3 = 1\ \text{Ом}$$

$$E_I = E_1 = 6\ \text{В}$$

$$E_{II} = -E_3 = -3\ \text{В}$$

$$R_{II}I_I + R_{12}I_{II} = E_I$$

$$R_{21}I_I + R_{22}I_{II} = E_{II}$$

$$I_I = 3\text{ А}; I_2 = I_{II} = 0$$

$$I_1 = I_I = 3\text{ А}; I_2 = I_{II} = 0$$

$$I_3 = I_I - I_{II} = 3\text{ А}$$

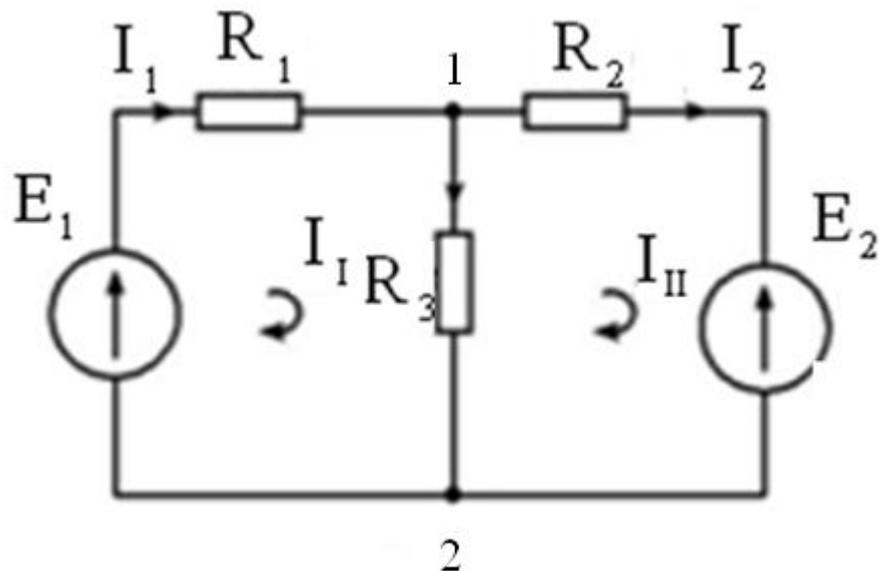


Рис. 1.23. Пример расчета электрической цепи методом контурных токов.

## 7.3 Расчет электрических цепей методом наложения (суперпозиции)

Дано:  $E_1 = 50\text{В}$ ;  $E_2 = 10\text{В}$   
 $r_1 = 0,4\ \Omega$ ;  $r_2 = 1\ \Omega$ ;  $R_1 = 3\ \Omega$   
 $R_2 = R_3 = 2\ \Omega$

$I_2 - ?$

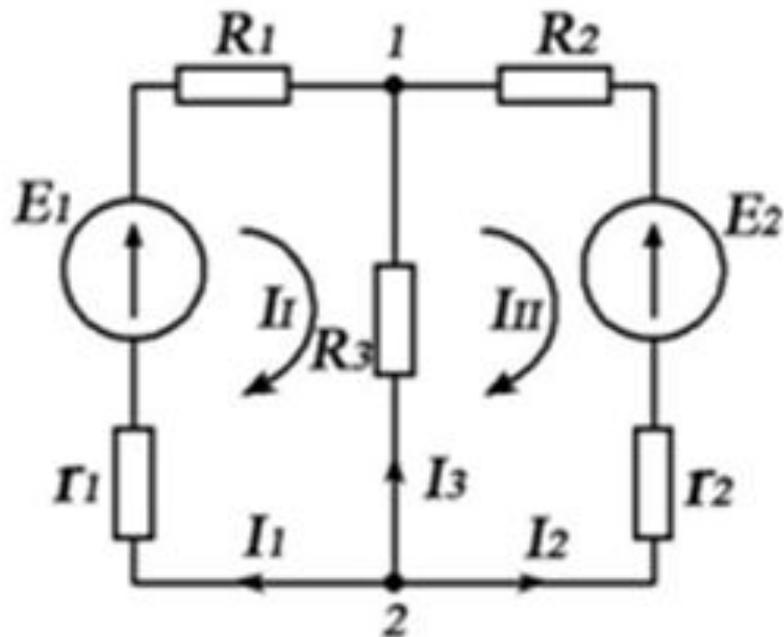


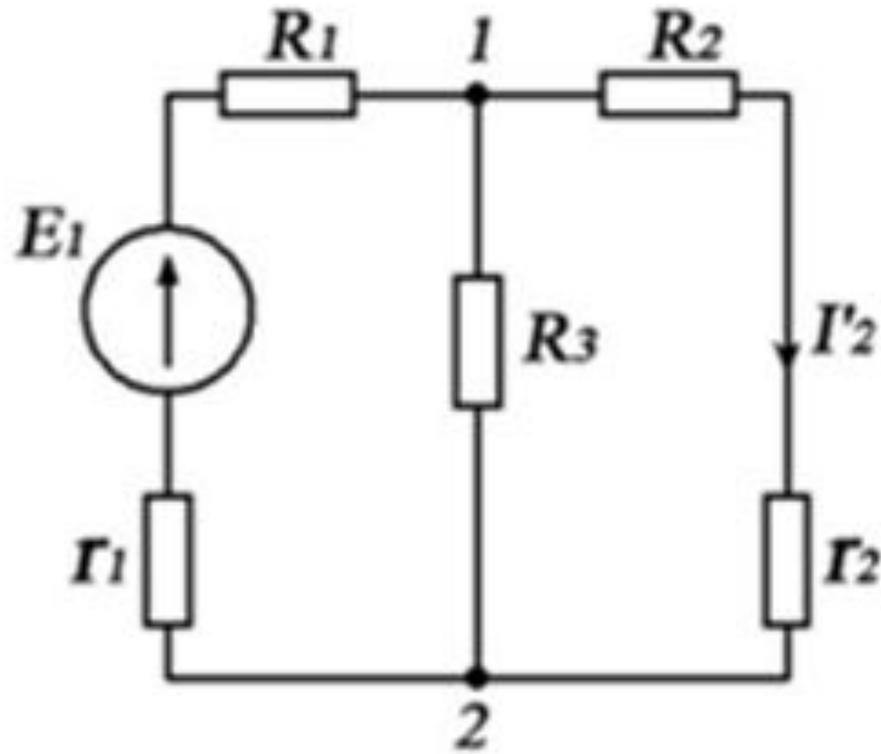
Рис. 1.24. Пример расчета электрической цепи методом наложения (суперпозиции).

$$E_2 = 0$$

$$U_{1,2} = \frac{E_1 \frac{R_3(R_2 + r_2)}{R_3 + R_2 + r_2}}{R_1 + r_2 + \frac{R_3(R_2 + r_2)}{R_3 + R_2 + r_2}}$$

Частичный ток:

$$I'_2 = \frac{U_{12}}{R_2 + r_2} \approx 4,33A$$



*Рис. 1.25. Пример расчета электрической цепи методом наложения (суперпозиции).*

$$E_1 = 0$$

Частичный ток:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + r_2 + \frac{R_3(R_1 + r_1)}{R_3 + R_2 + r_1}} \approx 2,33A$$

Действительный ток:

$$I_2 = I_2' - I_2'' = 2A$$

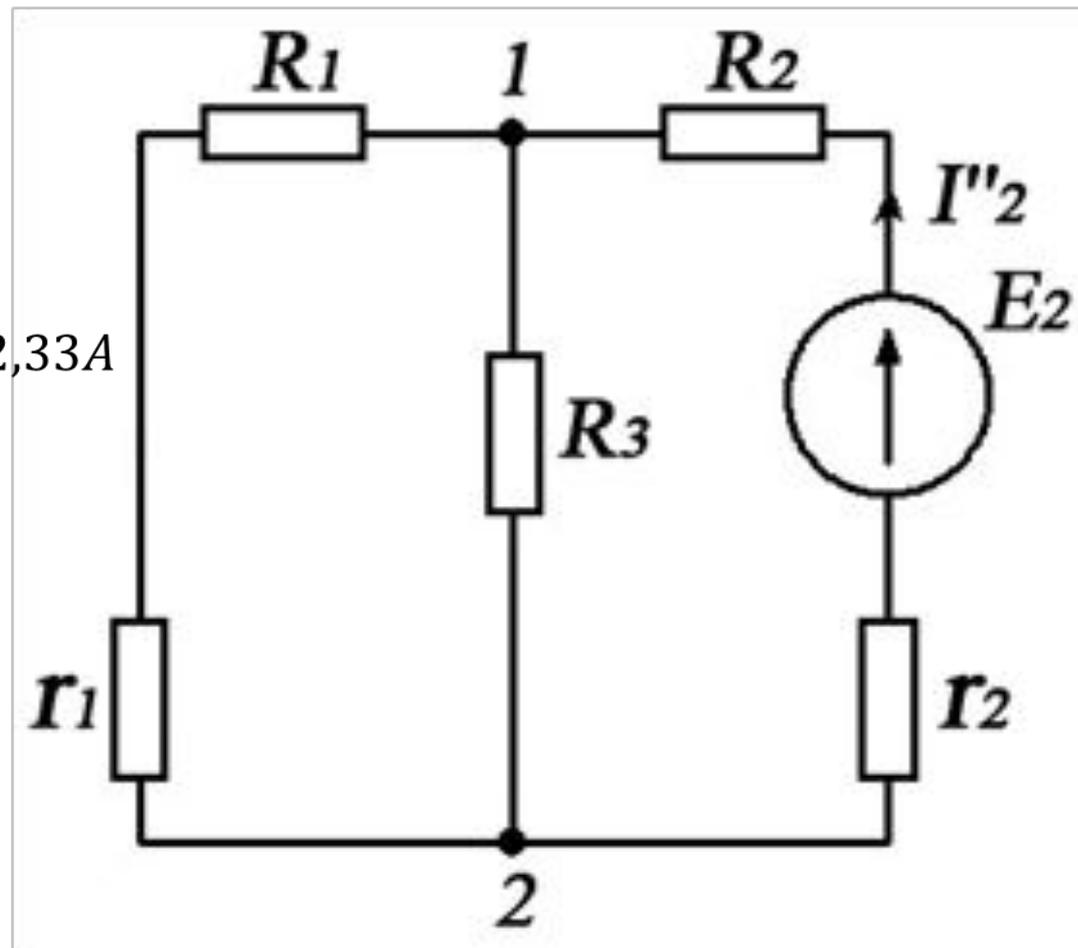


Рис. 1.26. Пример расчета электрической цепи методом наложения (суперпозиции).

## 7.4 Расчет цепей методом узловых потенциалов (напряжений).

$$\tilde{\mathcal{I}}_1 = I_1 + I_3 = (\varphi_1 - \varphi_0)G_1 + (\varphi_1 - \varphi_2)G_3$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_2 = I_2 - I_3 = (\varphi_1 - \varphi_0)G_2 - (\varphi_1 - \varphi_2)G_3$$

$$G_1 = 1/R_1; G_2 = 1/R_2; G_3 = 1/R_3$$

$$\varphi_1 = 0$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_1 = (G_1 + G_3)\varphi_1 - G_3\varphi_2$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_2 = -G_3\varphi_2 + (G_2 + G_3)\varphi_3$$

$$G_{11} = G_1 + G_3;$$

$$G_{22} = G_2 + G_3;$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_3$$

$$G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 = \tilde{\mathcal{I}}_1;$$

$$G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 = \tilde{\mathcal{I}}_2$$

При  $N + 1$  узлов:

$$G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + \dots + G_{1n}\varphi_n = \tilde{\mathcal{I}}_1;$$

$$G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + \dots + G_{2n}\varphi_n = \tilde{\mathcal{I}}_2$$

$$G_{n1}\varphi_1 + G_{n2}\varphi_2 + \dots + G_{nn}\varphi_n = \tilde{\mathcal{I}}_n$$

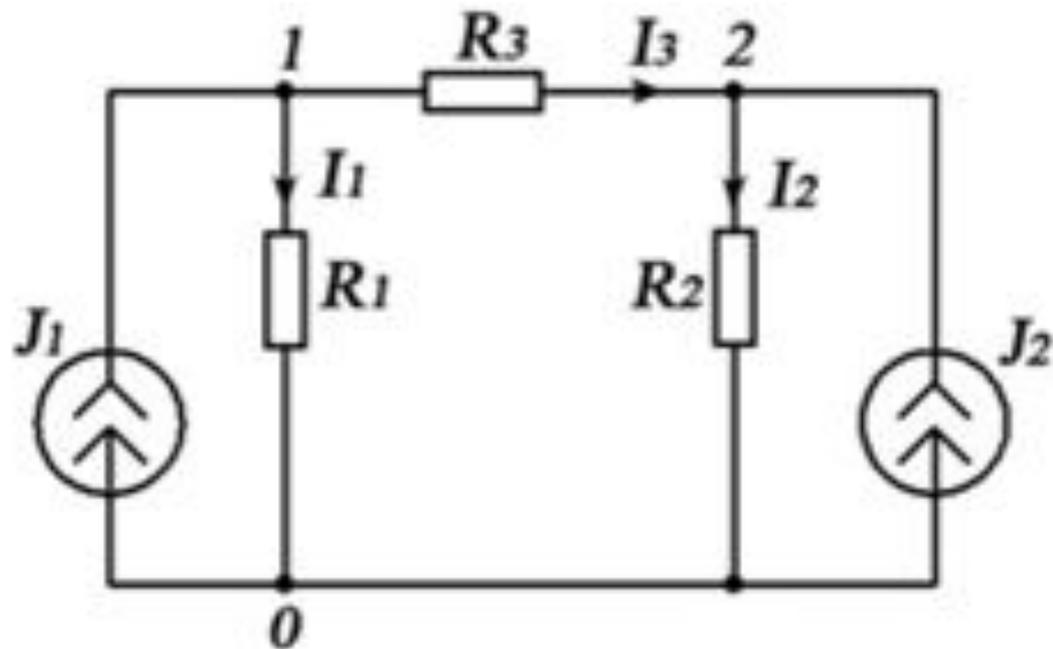


Рис. 1.27 Схема к расчету цепей методом узловых потенциалов.

Дано:  $E_1 = 50 \text{ В}$ ;  $E_2 = 10 \text{ В}$ ;  
 $r_1 = 0,4 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$

$I_1, I_2, I_3 - ?$

$$\mathfrak{T}_1 = G_1 E_1 + G_2 E_2 - \frac{E_1}{(r_1 + R_1)} + \frac{E_2}{(r_2 + R_2)} = 18 \text{ А}$$

$$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{(r_1 + R_1)} +$$

$$+ \frac{1}{(r_2 + R_2)} + \frac{1}{R_3} \approx 1,13 \text{ Ом}$$

$$G_{11} \varphi_1 = \mathfrak{T}_1; \varphi = 16 \text{ В}$$

$$I_1 = \frac{(-\varphi_1 + E_1)}{(r_1 + R_1)} = 10 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{(\varphi_1 - E_2)}{(r_2 + R_2)} = 2 \text{ А}$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1}{R_3} = 8 \text{ А}$$

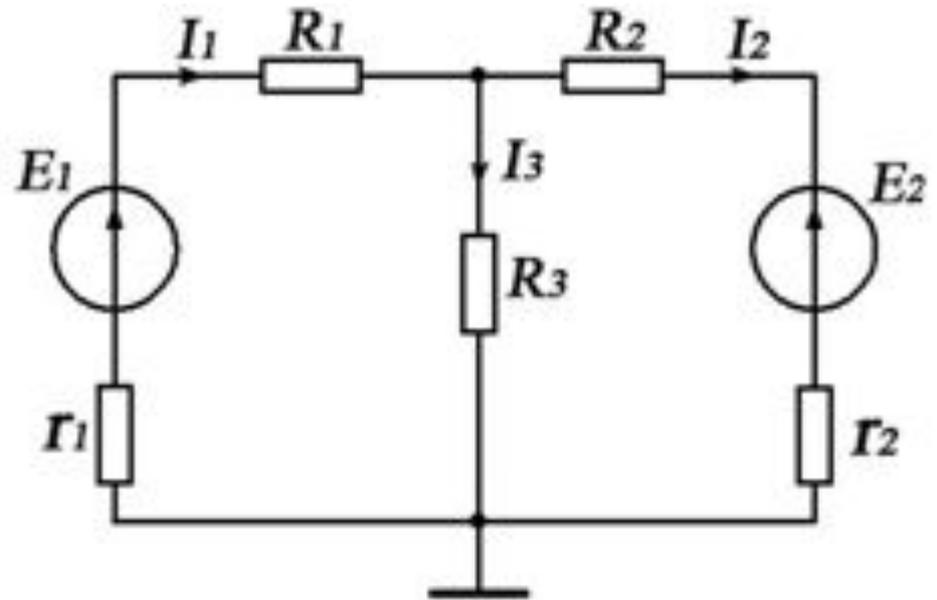
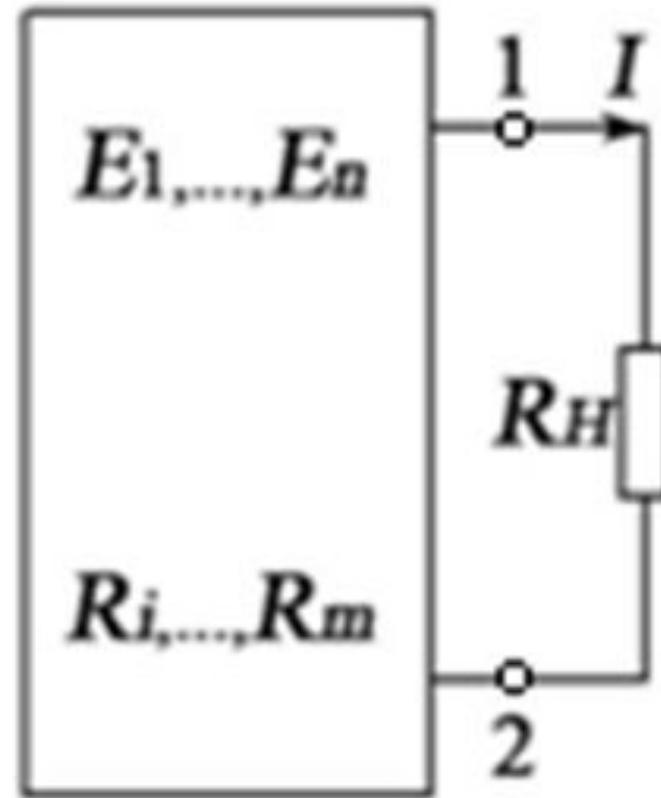


Рис. 1.28. Пример расчета цепи методом узловых потенциалов

## 7.5 Расчет цепей методом эквивалентного генератора.

$$E_{\text{э}} = (U_{1,2})_0; R_{\text{э}} = (R_{1,2})_0$$



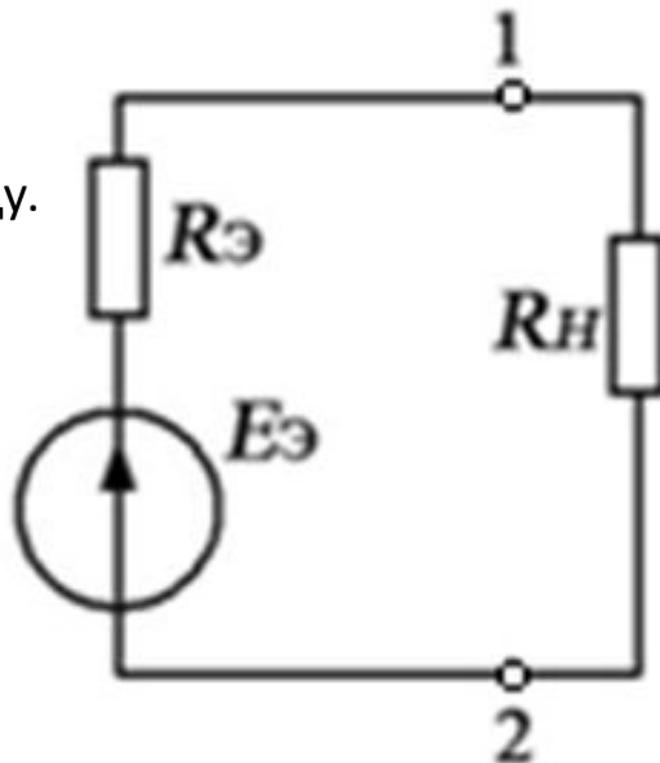
а)

Рис. 1.29. Представление сложной электрической цепи (а)  
по методу эквивалентного генератора (б)

$$(U_{12})_0; R_э = (R_{1,2})_0 -$$

—напряжение и сопротивление между мочками 1 – 2 на холостом ходу.

Векторы исходных токов и результат их сложения показан на рис. 1.11 б. Здесь длина суммарного вектора равна амплитуде общего тока, а угол наклона к полярной оси  $P$  есть начальная фаза  $\psi_i$  общего тока.



б)

*Рис. 1.29. Представление сложной электрической цепи (а) по методу эквивалентного генератора (б)*

Дано:  $E_1 = 10 \text{ В}$ ;  $E_2 = 2 \text{ В}$ ;  
 $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом}$

$I_2 - ?$

$$(U_{1,2})_0 = E_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} * R_3 = 5 \text{ В}$$

$$(R_{1,2})_0 = R_3 = \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_3} = 0,5 \text{ Ом}$$

$$I_2 = \frac{E_3 - E_2}{R_3 + R_2} = 2 \text{ А}$$

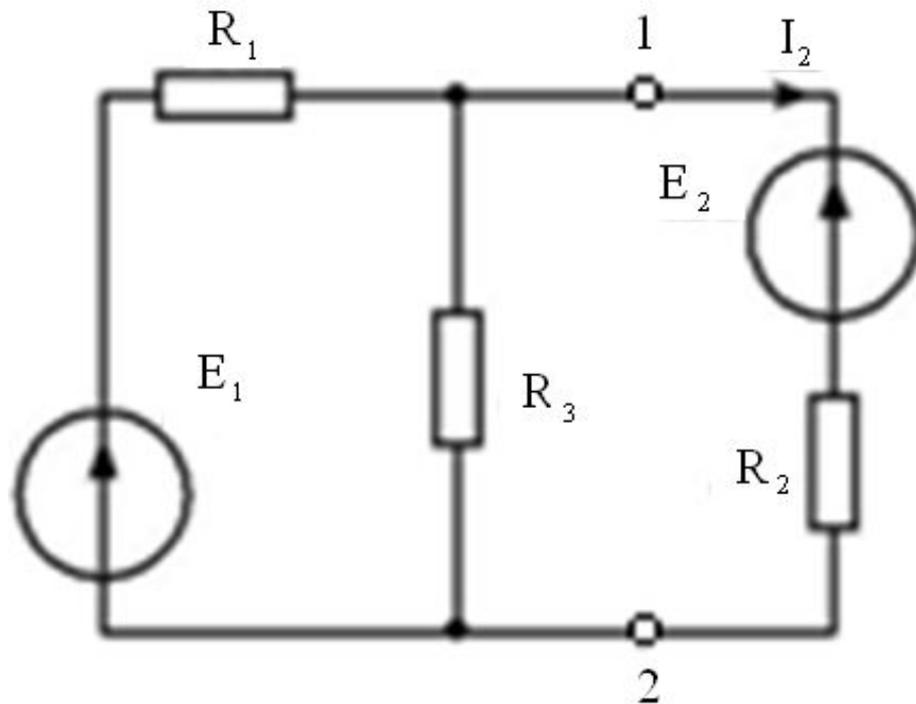


Рис. 1.30. Пример к методу эквивалентного генератора

Дано:  $E_1 = 8 \text{ В}$ ;  $E_2 = 10 \text{ В}$ ;  
 $R_1 = R_5 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 12,5 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 40 \text{ Ом}$   
 $I_2 - ?$

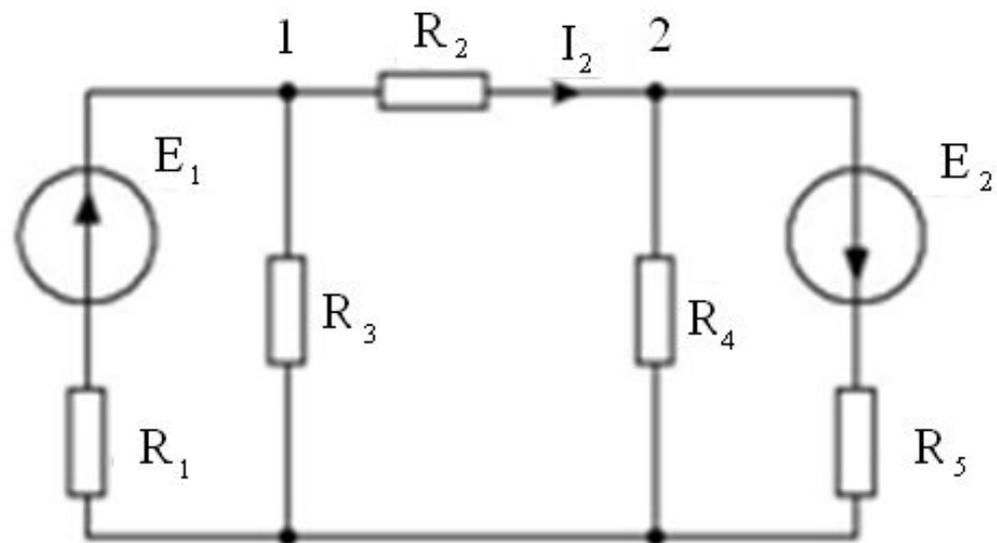


Рис. 1.31 Пример к методу эквивалентного генератора

$$E_3 = (U_{12})_0$$

$$(U_{12})_0 - R_4 I'_2 - R_3 I'_1 = 0$$

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = \frac{8}{40} = 0,2 \text{ A}$$

$$I'_2 = \frac{E_2}{R_4 + R_5} = 0,2 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} (U_{12})_0 &= R_4 I'_2 + R_3 I'_1 = \\ &= 40 * 0,2 + 30 * 0,2 = 14 \text{ B} = E_3 \end{aligned}$$

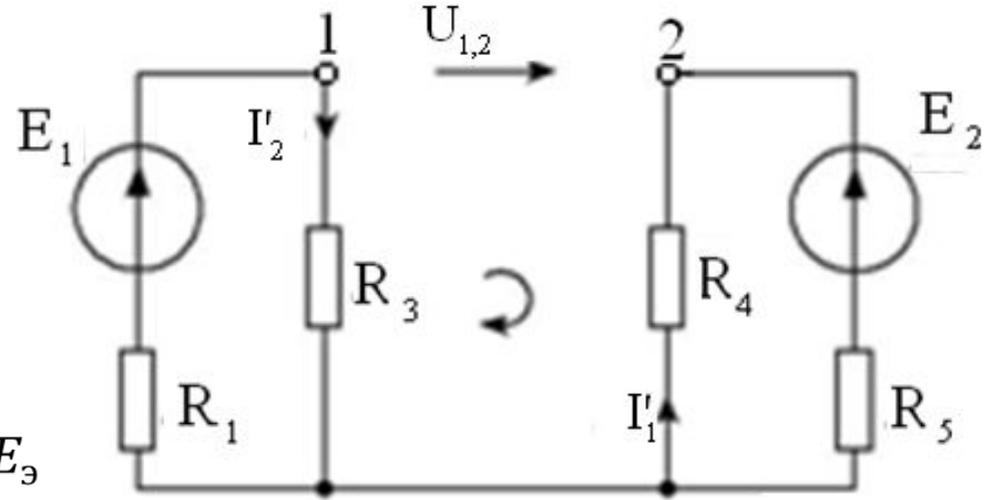
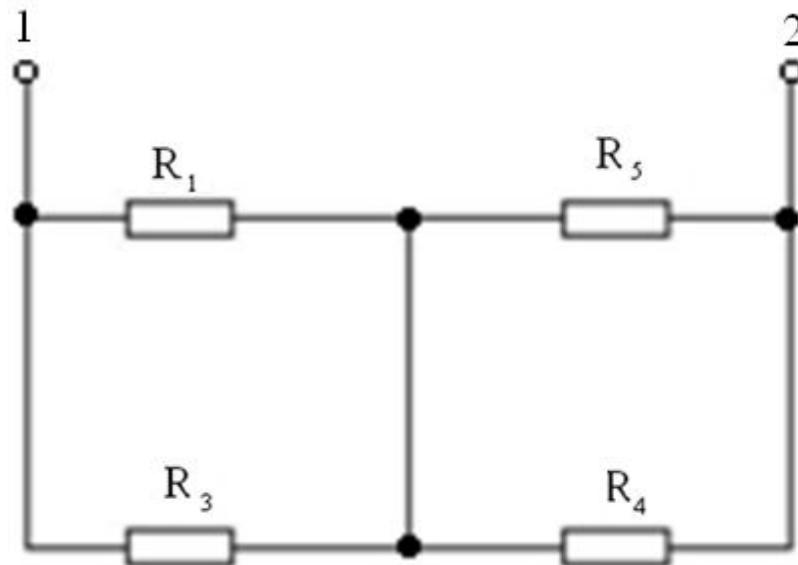


Рис. 1.32. Схема к примеру рис. 1.31

$$R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 15,5 \text{ Ом}$$

$$I'_2 = \frac{E_3}{R_3 + R_4} = 0,5 \text{ A}$$



*Рис. 1.33. Схема к примеру рис. 1.31*

# **Задачи для самоконтроля**

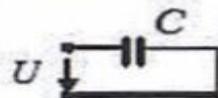
1) Дана структурная схема цепи.



Сколько узлов в данной цепи?

5. 4. 3. 6. 7.  
1. 2. 3. 4. 5.

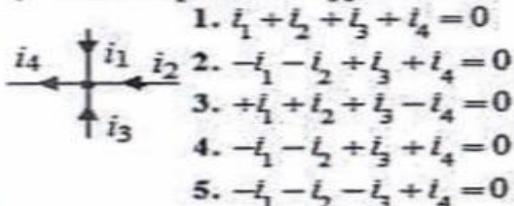
6) Дано:  $q = 0,2 \text{ Кл}$ ,  $C = 1000 \text{ мкФ}$ .



Определите напряжение на конденсаторе  $U \text{ В}$ .

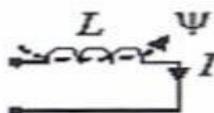
- 100 200 300 400 500  
1. 2. 3. 4. 5.

2) Найдите правильное уравнение:



1.  $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$   
2.  $-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$   
3.  $+i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$   
4.  $-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$   
5.  $-i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0$

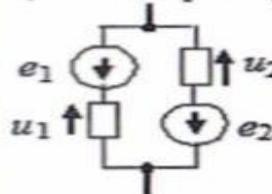
7) Дано:  $L = 10 \text{ мГн}$ ;  $\dot{\psi} = 1 \text{ Вб}$ .



Определите ток в катушке индуктивности  $I \text{ А}$ .

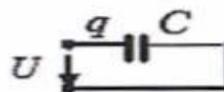
- 400 300 200 100 500  
1. 2. 3. 4. 5.

3) Выберите правильное уравнение:



1.  $-e_1 + e_2 = u_1 - u_2$   
2.  $e_1 + e_2 = -u_1 - u_2$   
3.  $e_1 - e_2 = u_1 + u_2$   
4.  $e_1 - e_2 = u_1 - u_2$   
5.  $e_1 - e_2 = -u_1 - u_2$

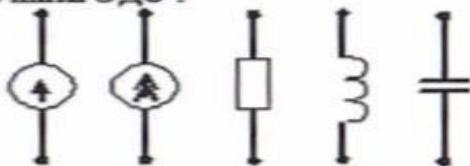
8) Дано:  $W_{\Sigma} = 0,1 \text{ Дж}$ ,  $U = 100 \text{ В}$ .



Определите емкость конденсатора  $C \text{ мкФ}$ .

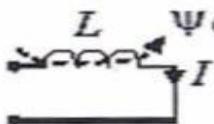
- 60 50 40 30 20  
1. 2. 3. 4. 5.

4) Каково графическое изображение источника ЭДС?



1. 2. 3. 4. 5.

9) Дано:  $W_M = 40 \text{ Дж}$ ;  $I = 20 \text{ А}$ .



Определите индуктивность катушки  $L \text{ Гн}$ .

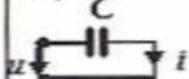
- 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2  
1. 2. 3. 4. 5.

5) По какому соотношению определяется индуктивность цепи?

$Li$       $\frac{q}{u}$       $\frac{Cu^2}{2}$       $\frac{\Psi}{i}$       $\frac{Li^2}{2}$

1. 2. 3. 4. 5.

10) Дан график напряжения  $u(t)$



Каков график тока  $i(t)$ ?

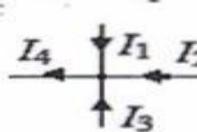


1. 2. 3.

1) Укажите уравнение второго закона Кирхгофа.

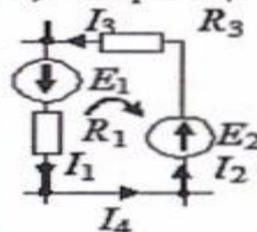
1.  $U = IR$                       3.  $\sum_{m=1}^M E_m I_m = \sum_{n=1}^N U_n I_n$   
 2.  $\sum_{m=1}^M E_m = \sum_{n=1}^N I_n R_n$     4.  $\sum_{k=1}^K I_k = 0$

2) Найдите правильное уравнение:



1.  $I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$   
 2.  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$   
 3.  $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$   
 4.  $-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$   
 5.  $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$

3) Выберите правильное уравнение:



1.  $E_1 - E_2 = I_1 R_1 - I_3 R_3$   
 2.  $E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I_3 R_3$   
 3.  $-E_1 - E_2 = -I_1 R_1 - I_3 R_3$   
 4.  $-E_1 + E_2 = I_1 R_1 + I_3 R_3$   
 5.  $E_1 - E_2 = -I_1 R_1 - I_3 R_3$

4) Дано:  $U = 100$  В;  
 $R = 50$  Ом;  
 $L = 10$  мГн;  
 $C = 100$  мкФ.  
 Определите показания вольтметра, вольт.

- 0    20    30    40    50  
 1.    2.    3.    4.    5.

5) Дано:  $I = 10$  А;  
 $R_1 = 50$  Ом;  
 $R_2 = 20$  Ом.  
 Определите напряжение  $U$  В.

- 100    200    500    700    800  
 1.    2.    3.    4.    5.

6) Дано:  $U = 100$  В;  
 $R = 20$  Ом;  
 $I = 10$  А.  
 Определите ЭДС цепи  $E$  В.

- 20    40    60    80    100  
 1.    2.    3.    4.    5.

7) Дано:  $I = 5$  А;  
 $I_2 = 2$  А;  
 $U = 100$  В.  
 Определите мощность в сопротивлении  $R_1$  в ваттах.

- 100    200    300    400    500  
 1.    2.    3.    4.    5.

8) Дано:  $I_1 = 3$  А;  
 $I_2 = 7$  А.  
 Найдите ток  $I_3$  А.

- 3    -4    4    10    -10  
 1.    2.    3.    4.    5.

9) Дано:  $E_3 = 100$  В;  
 $R_3 = 10$  Ом;  
 $R_4 = 10$  Ом;  
 $R_5 = 10$  Ом;  
 $I_4 = 5$  А;  
 $I_5 = 10$  А.  
 Определите ток  $I_3$  А.

- 1    2    3    4    5  
 1.    2.    3.    4.    5.

10) Сколько уравнений надо составить по законам Кирхгофа для определения токов всех ветвей?

- 2    4    5    6    7  
 1.    2.    3.    4.    5.

# ОТВЕТ Ы

## *Тест 1*

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер ответа	3	3	1	1	4	2	4	5	5	2

## *Тест 2*

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер ответа	2	1	3	1	4	5	3	5	5	3

## II Анализ линейных электрических цепей однофазного переменного синусоидального тока

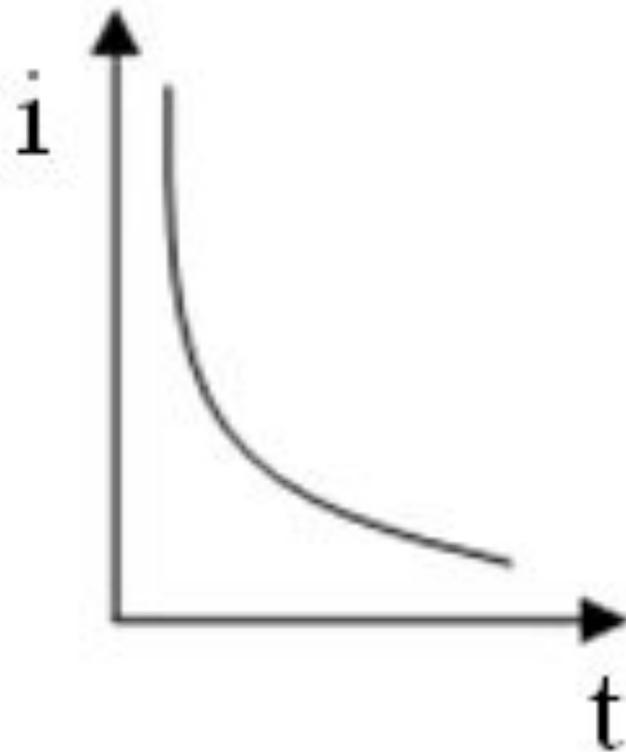
# 1. Получение синусоидального тока и его параметры

-Синусоидальный ток – это периодический ток, изменяющийся во времени по закону

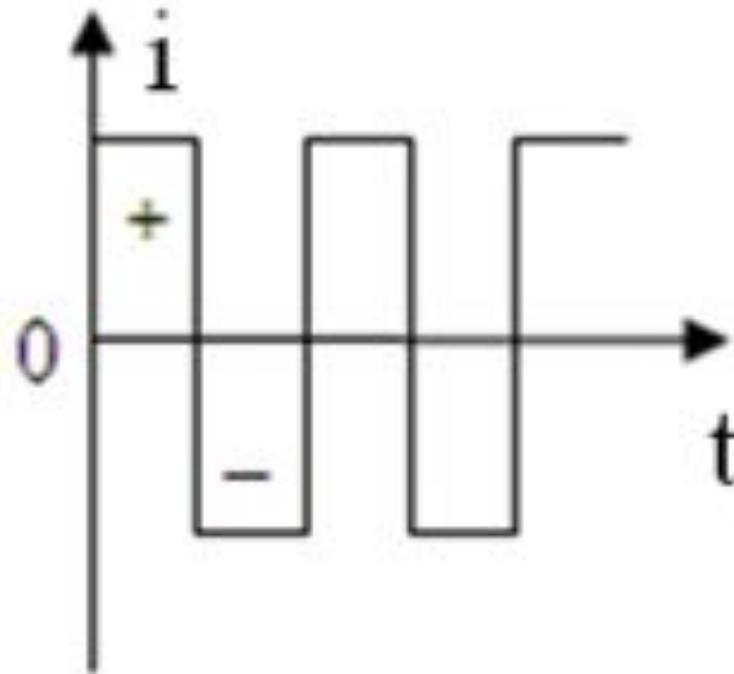
синуса  
-Синусоидальный ток является частным случаем периодического переменного тока,

значение которого в любой момент времени  $t$  определяется мгновенным током:  
 $i(t)=i(t+KT)$ , где:  $K$ -номер цикла,  $K=1.2.3\dots$   $T$ -период переменного тока, (с)-промежуток

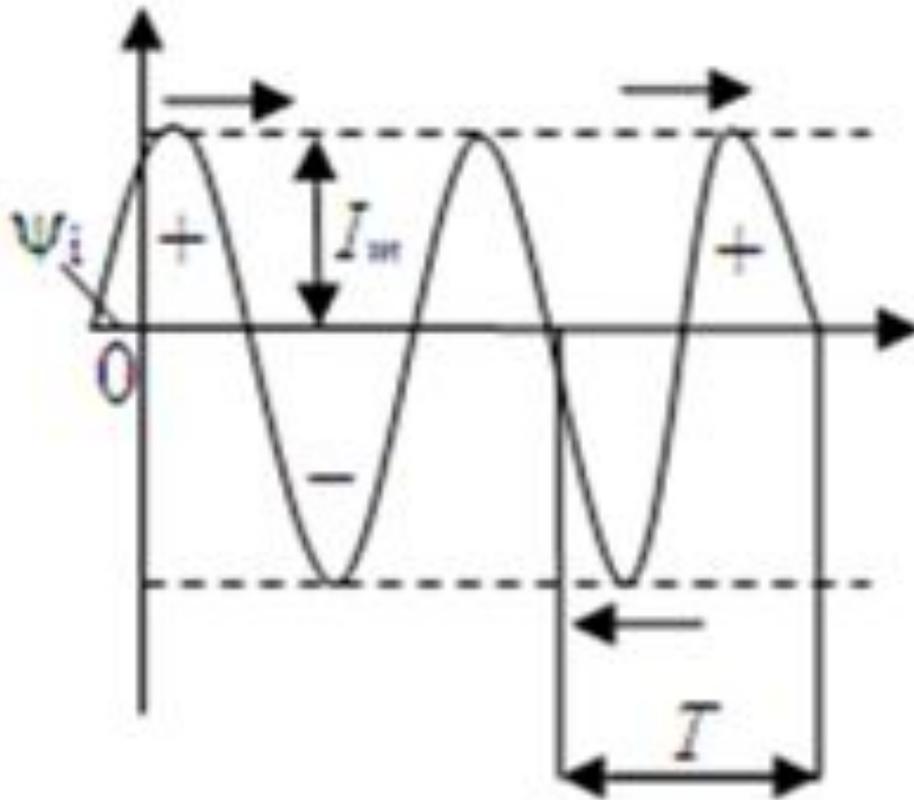
Время  $t$ , через которое повторяется цикл изменения переменного тока.  $f$  указывает число колебаний за 1с, т.е. число переходов переменного тока, укладывающихся за время, равное 1с.



*Рис. 2.1 Изменение силы тока по величине*



*Рис. 2.1 изменение силы тока по направлению*



$f = 1/T$ , Гц. – частота

*Рис. 2.1 Изменение силы тока по величине и направлению*

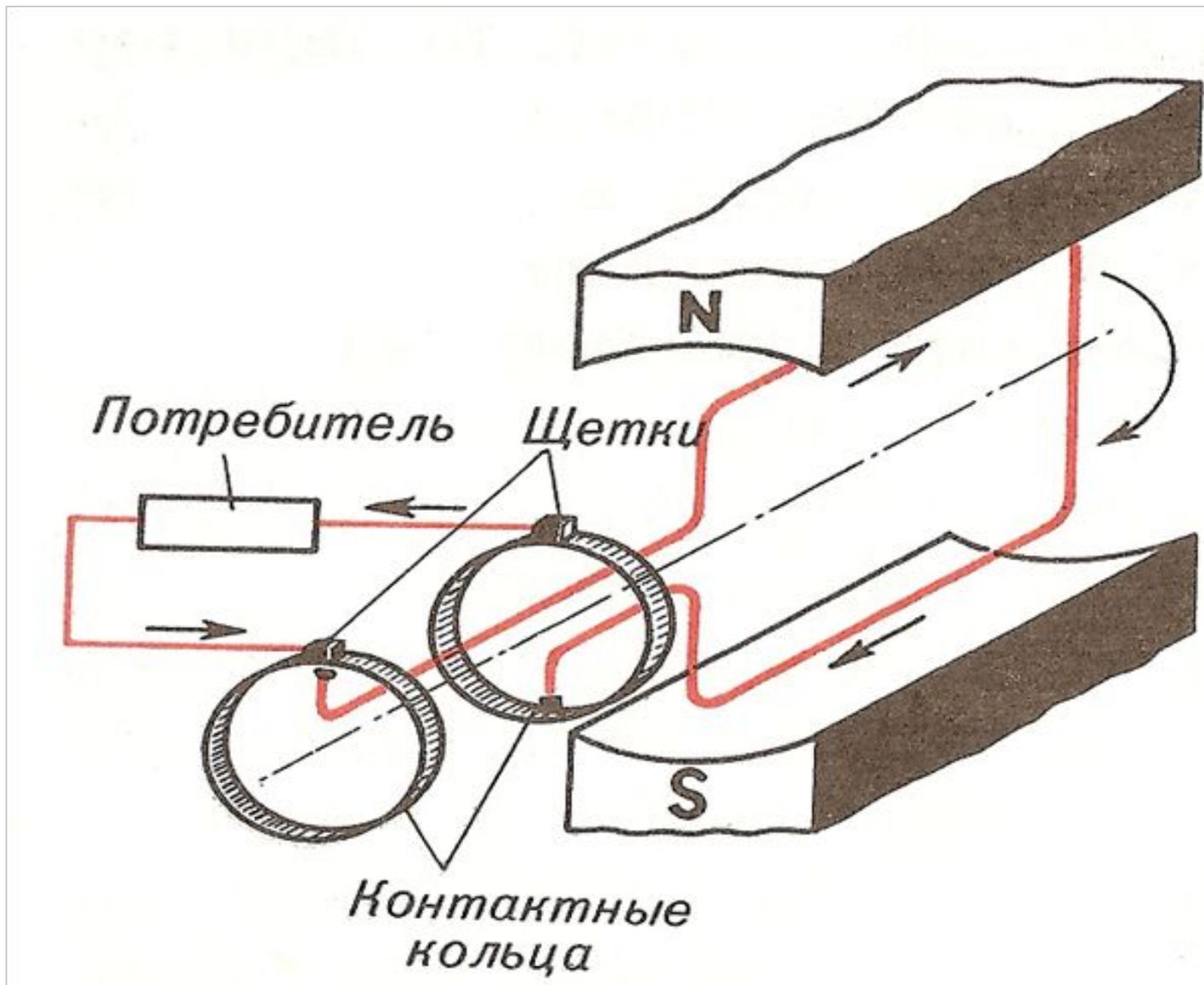
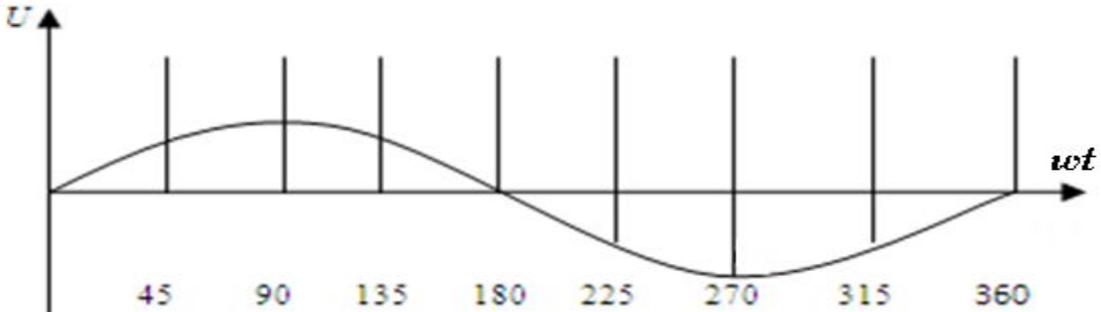
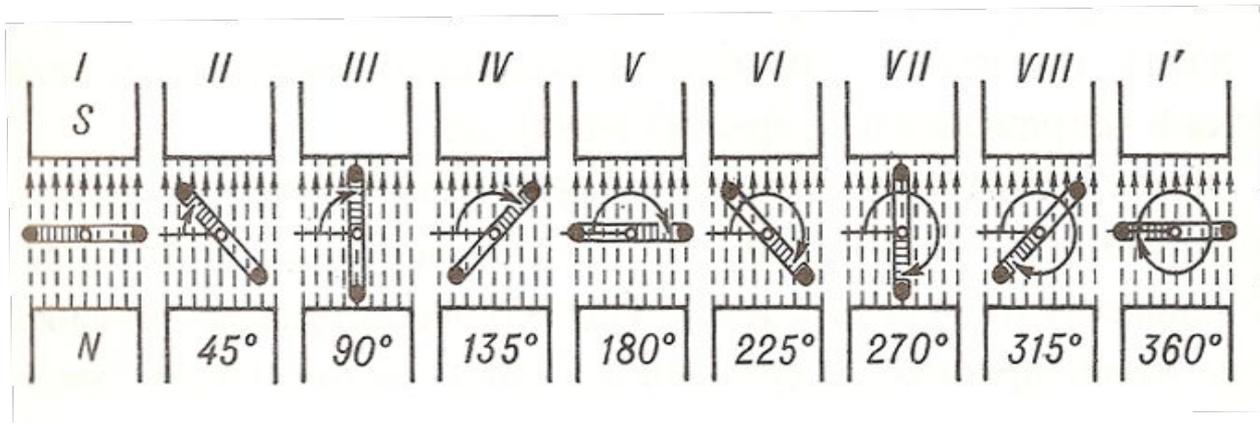


Рис. 2.2 Получение синусоидального тока



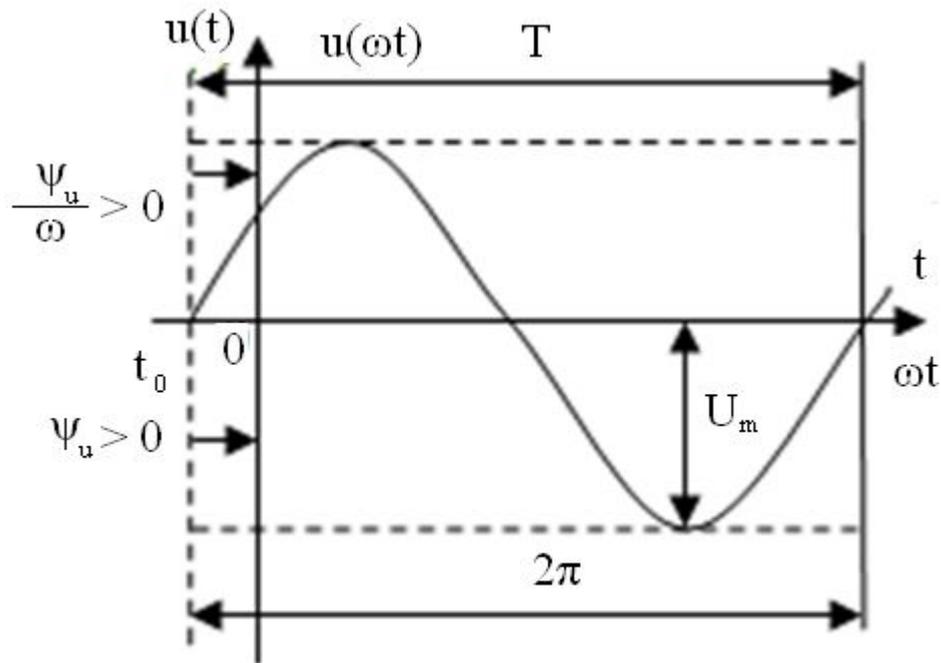
Аналитическая  
запись-

$I_m$  – амплитуда тока;  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$   $\omega = 2\pi f$  – угловая частота;

$u(t) = u_m \sin(\omega(t) + \Psi_u)$

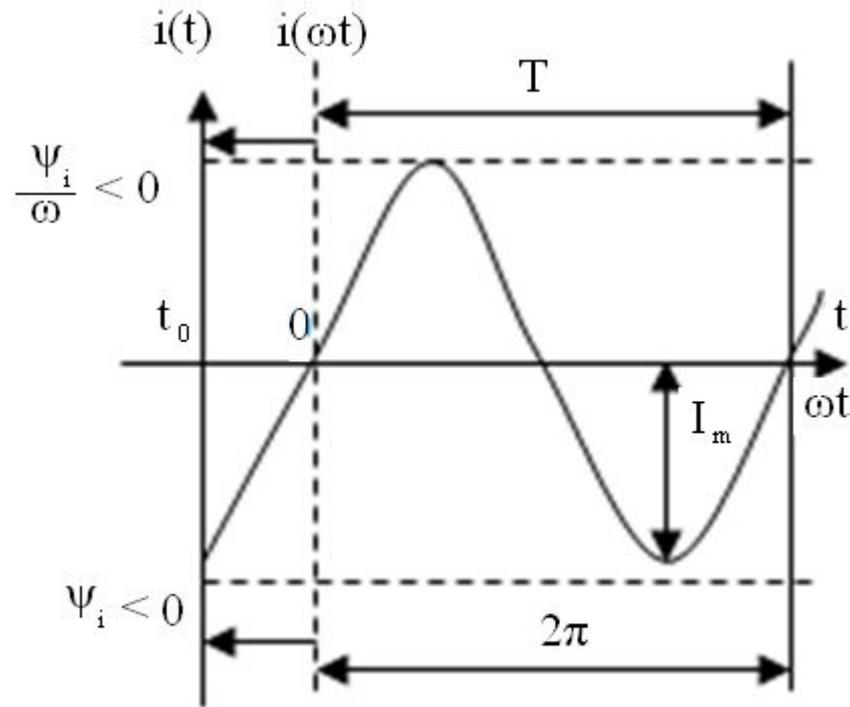
$\alpha_i = \omega t + \Psi_i$  – фаза;  $\Psi_i$  – начальная фаза;  
 $u_m$  – амплитуда напряжения;  $\Psi_u$  – начальная фаза напряжения;  $\alpha_u = \omega t + \Psi_u$  – фаза напряжения

Рис. 2.3 Изменение синусоидального напряжения при повороте рамки на 360 градусов



1. На рисунке напряжение  $u(t)$  начинает нарастать в точке  $t_0 = \frac{\Psi_u}{\omega} > 0$ , то есть раньше начала отсчета времени  $t_0 = 0$  на величину  $\frac{\Psi_u}{\omega}$
2. Если по оси абсцисс откладывать фазу  $\omega t$ , то начало нарастания  $u(\omega t)$  будет соответствовать точке  $\omega t_0 = \frac{\Psi_u}{\omega} > 0$  (начальная фаза напряжения сдвинута влево относительно начала отсчета на величину  $\Psi_u > 0$ )

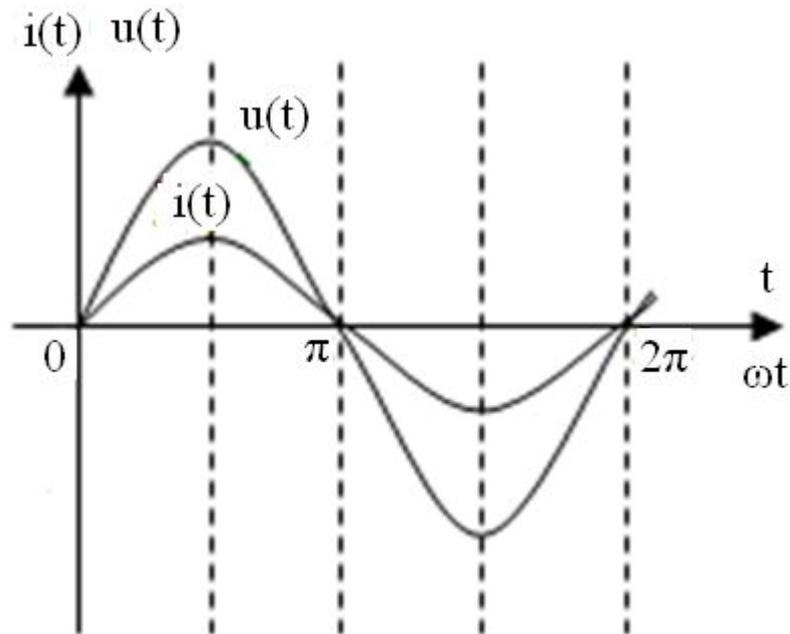
*Рис. 2.4. График синусоидального напряжения*



б)

1. Если  $t = 0$ , то фаза  $\alpha_0 = \Psi_i$ , есть начальная фаза тока, то есть значение фазы тока в начальный момент времени.
2. Если  $\alpha_0$ , то  $\Psi_i = -\omega t_0$ , то есть в точке  $t_0$  находится начальная фаза тока  $\Psi_i < 0$ , этому соответствует на оси времени  $t_0 = -\frac{\Psi_i}{\omega} < 0$ , то есть нарастание тока начинается позже отсчета времени

Рис. 2.5. График синусоидального тока

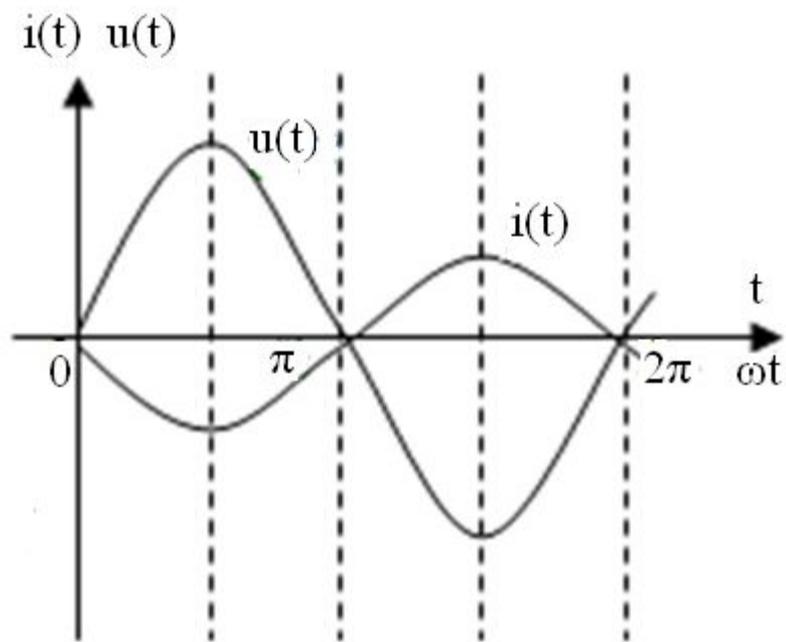


a)

Если синусоидальное напряжение и ток изменяются с одинаковой частотой  $\omega$ , имеют неодинаковые начальные фазы  $\Psi_u$  и  $\Psi_i$ , то говорят, что они сдвинуты относительно друг друга на угол  $\varphi = \Psi_u - \Psi_i$ . Если  $\varphi < 0$ , то напряжение отстает по фазе от тока; Если  $\varphi > 0$ , то ток отстает по фазе от напряжения.

Если  $\varphi = 0$ , то напряжение и ток совпадают по фазе

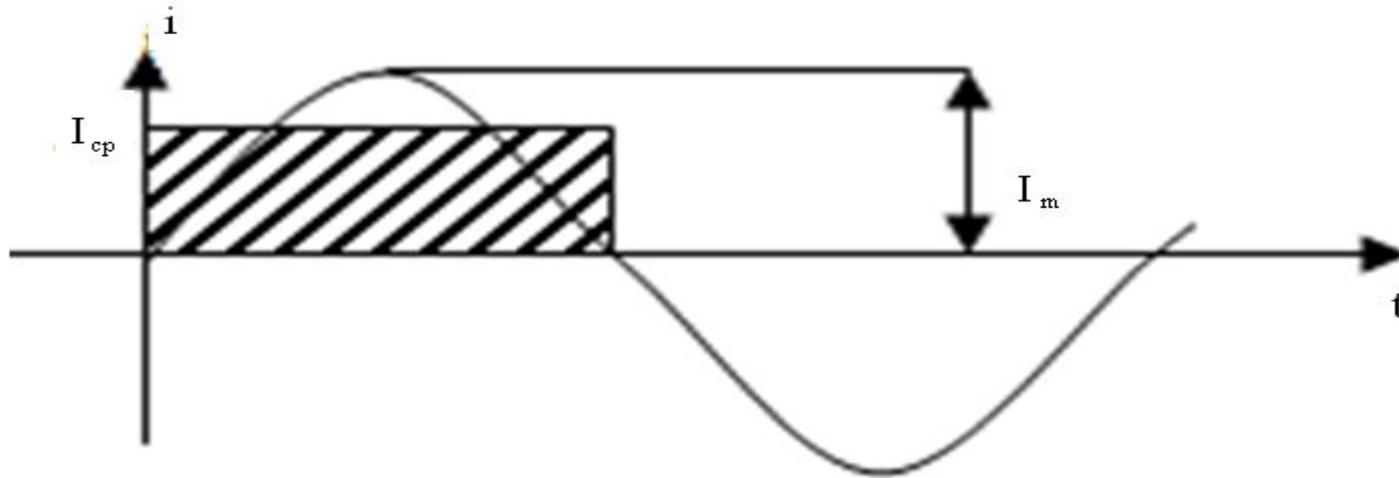
*Рис. 2.6. Синусоидальное напряжение и ток совпадают по фазе (а) и в противофазе (б)*



б)

Если  $\varphi = \pm\pi$ , то напряжение и ток находятся в противофазе.

*Рис. 2.6. Синусоидальное напряжение и ток совпадают по фазе (а) и в противофазе (б)*



$$I_{cp} \cdot T/2 = \int_0^{T/2} i dt = \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt; \quad \text{-Площадь прямоугольника с основанием } T/2 \text{ и высотой } I_{cp} \text{ приравнена к площади, ограниченной кривой тока } I(t).$$

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m.$$

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m; \quad E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m.$$

Рис. 2.7 Определение среднего значения тока

Действующее значение синусоидального тока равно по величине такому постоянному току  $I$ , который в активном сопротивлении  $R$  за период  $T$  выделяет количество энергии, равное выделяемому данным переменным током.

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt; \quad \begin{array}{l} RI^2T - \text{энергия постоянного} \\ \text{тока} \\ Ri^2 dt - \text{энергия переменного} \\ \text{тока} \end{array}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m$$

2. Представление синусоидального тока проекциями вращающегося вектора.  
Векторная диаграмма.

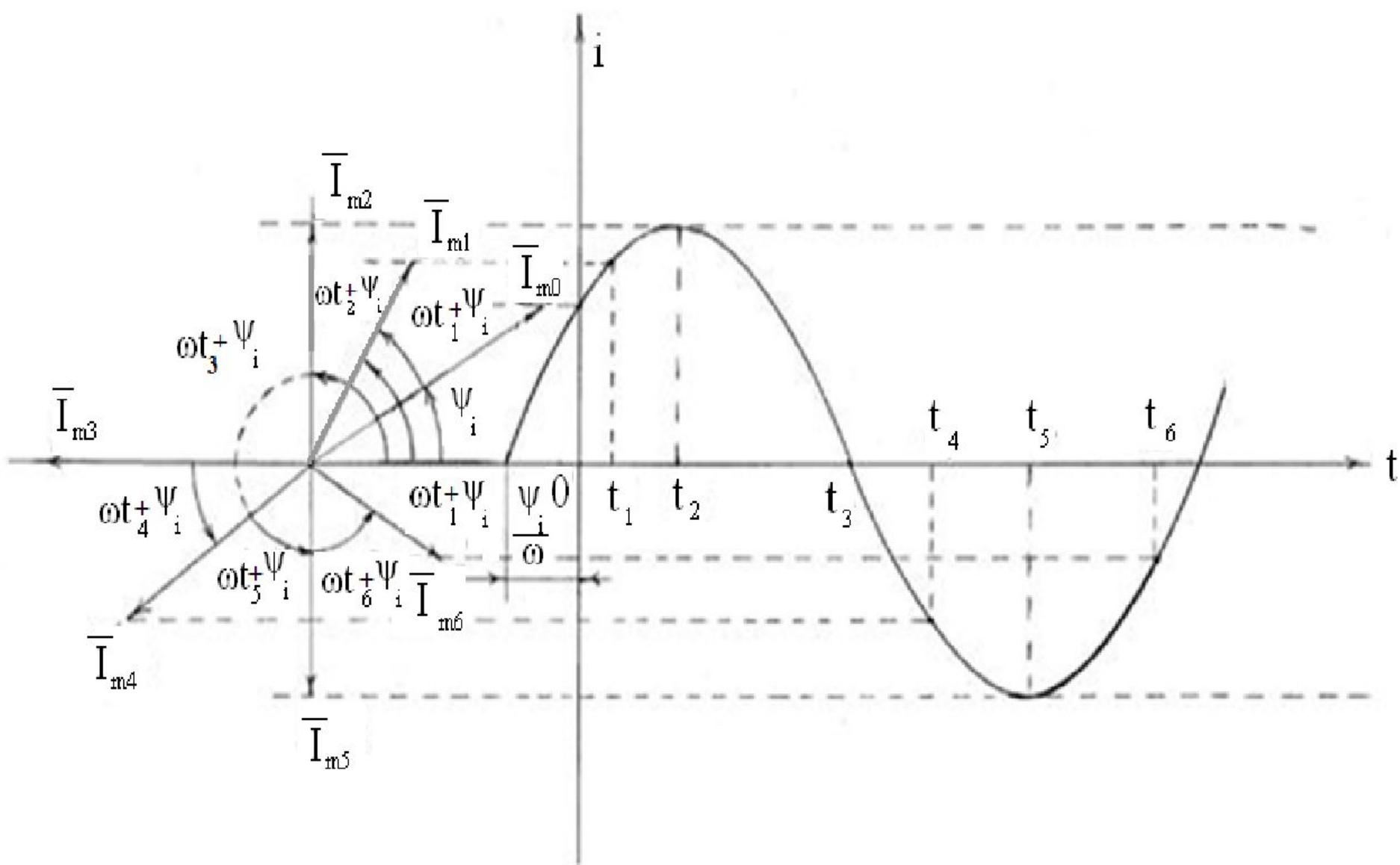


Рис. 2.8. Представление синусоидального тока вращающимся вектором

В прямоугольной системе координат под углом  $\Psi_i$  относительно оси абсцисс отложим вектор  $I_{m0}$ , величина которого в некотором масштабе равна амплитуде тока  $I_m$ , а полная фаза  $\alpha_0$  в начальный момент времени  $t = 0$  - начальной фазе  $\Psi_i$ . В последующие моменты времени  $t_k$  ( $k = 1 - 6$ ) этот вектор будет последовательно располагаться относительно оси абсцисс под углами  $\alpha_k = \omega t_k + \Psi_i$ . Их проекции на ось ординат будут составлять

$$i(t_k) = I_m \sin(\omega t_k + \Psi_i),$$

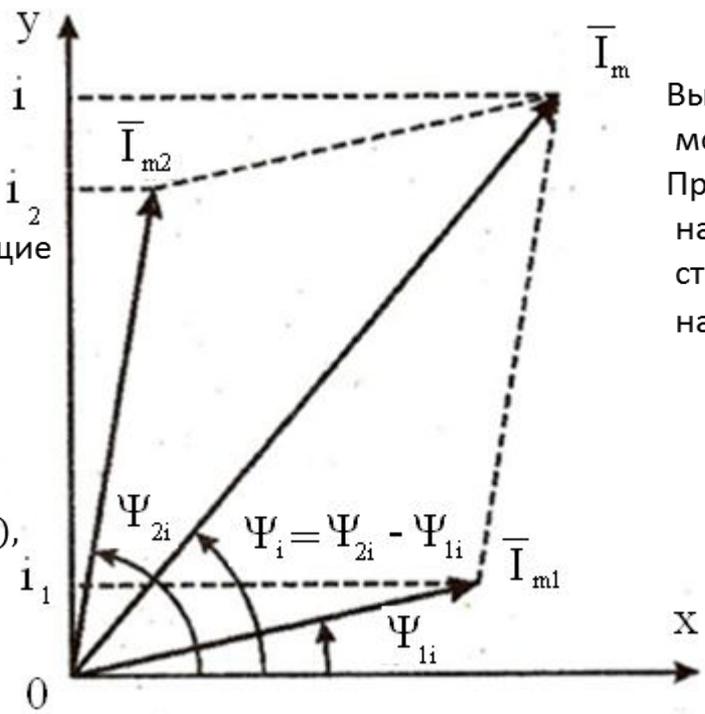
что соответствует мгновенным значениям синусоидального тока в моменты времени  $t_0$  и  $t_k$ . Аналогично проекции вектора  $I_m$  на ось абсцисс; в эти моменты времени соответствуют мгновенным значениям косинусоидального тока:

$$i(t_k) = I_m \cos(\omega t_k + \Psi_i).$$

*Представление синусоидального тока вращающимся вектором*

Для сложения двух синусоидальных токов одинаковой частоты:  
 $i_1(t_K) = I_{m_1} \sin(\omega t_K + \Psi_{i_1}) + I_{m_2} \sin(\omega t_K + \Psi_{i_2})$ , достаточно геометрически сложить изображающие их векторы  $I_{m_1} + I_{m_2}$ .

Проекция полученного при этом вектора  $I_m$  на ось ординат равна сумме мгновенных значений токов:  
 $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = i_m \sin(\omega t + \Psi_i)$ , т.к. сумма проекций векторов равна проекции суммарного вектора.

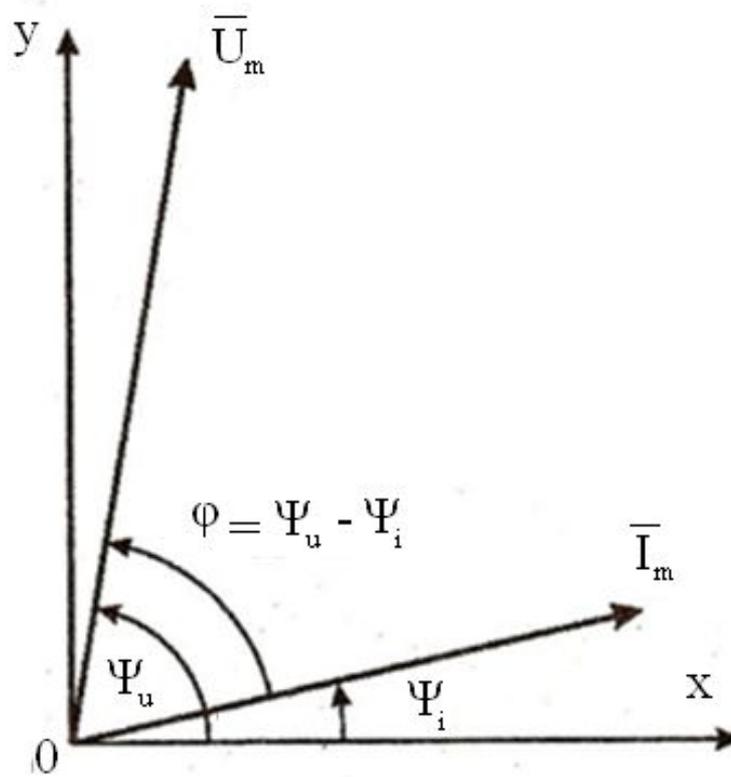


Вычитание синусоидальных токов можно заменить сложением. При этом изображающий ток следует направить в противоположную сторону, это эквивалентно изменению начальной фазы тока на  $\pi$ .

а)

Изображение векторов напряжения и тока на одной плоскости называется векторной диаграммой.

Рис. 2.9 Сложение двух векторов тока



б)

Совокупность векторов изображающих синусоидальные токи, напряжение и ЭДС одинаковой частоты в начальный или любой один и тот же момент времени, называются векторной диаграммой.

Рис. 2.9 Векторная диаграмма

$$i = 2 \sin(314t + 60^\circ) \text{ A}$$

$$u = 30 \sin(314t - 30^\circ)$$

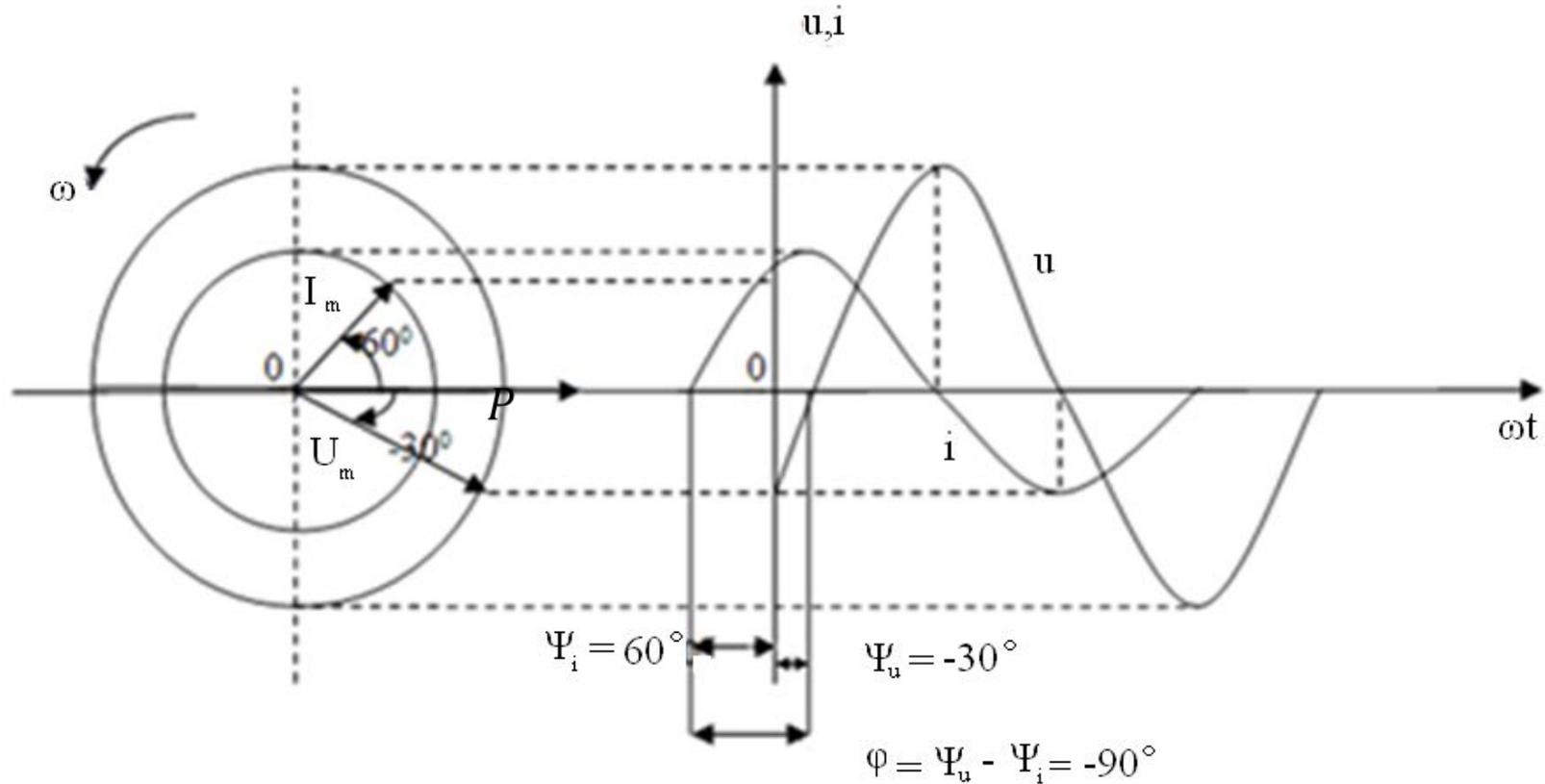


Рис. 2.10. Пример изображения тока в полярных координатах и в декартовых координатах.

Синусоидальные токи двух параллельных векторных двухполюсников 1 и 2:

$$i_1 = 3 \sin(628t + 30^\circ) \text{ A};$$

$$i_2 = 4 \sin(628t - 60^\circ) \text{ A};$$

Определить синусоидальный ток  $i$

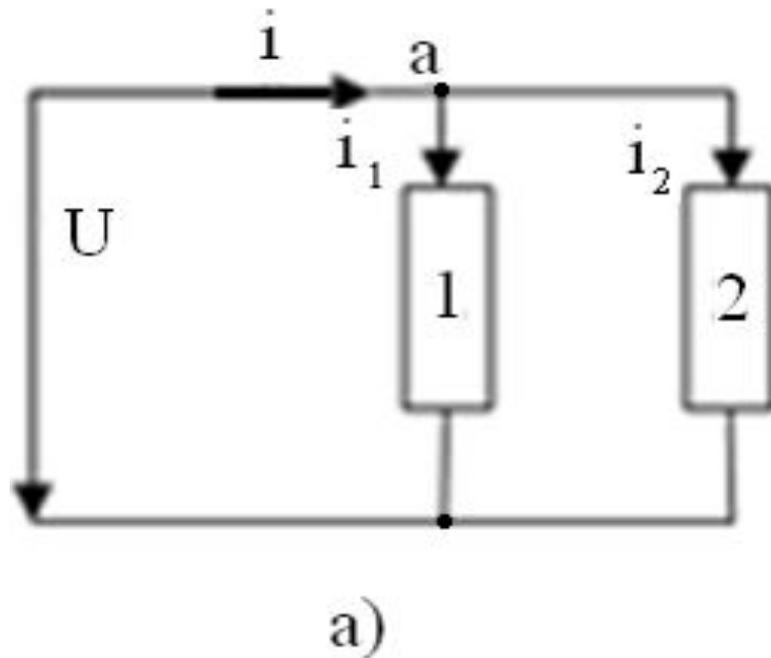
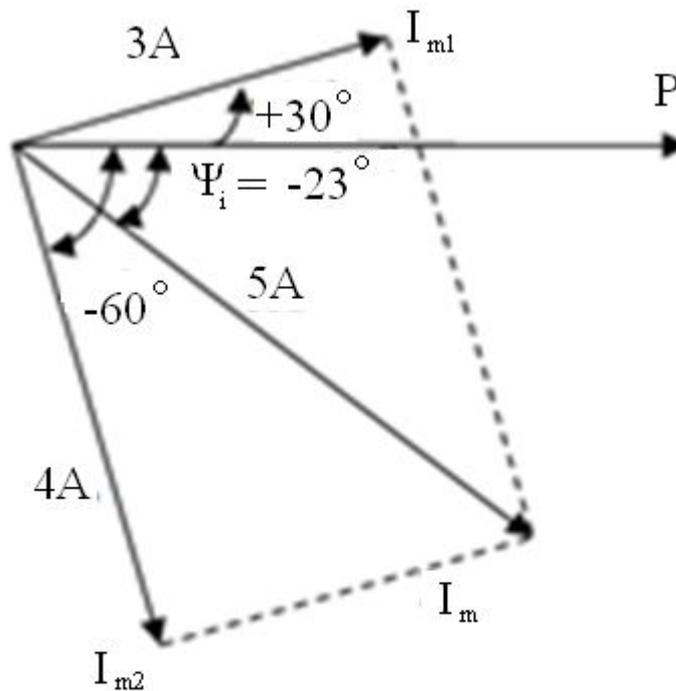


Рис. 2.11. Пример 2.2

$$i = 5\sin(628t - 23^\circ) \text{ A.}$$

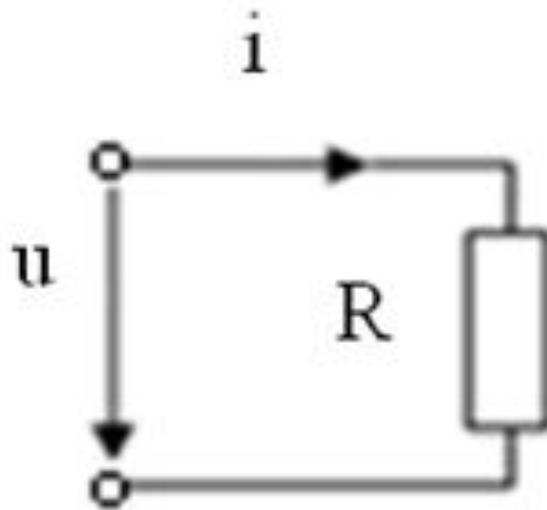


б)

Рис. 2.11. Результат сложения токов  $i_1$  и  $i_2$

### 3. Элементы цепи синусоидального тока

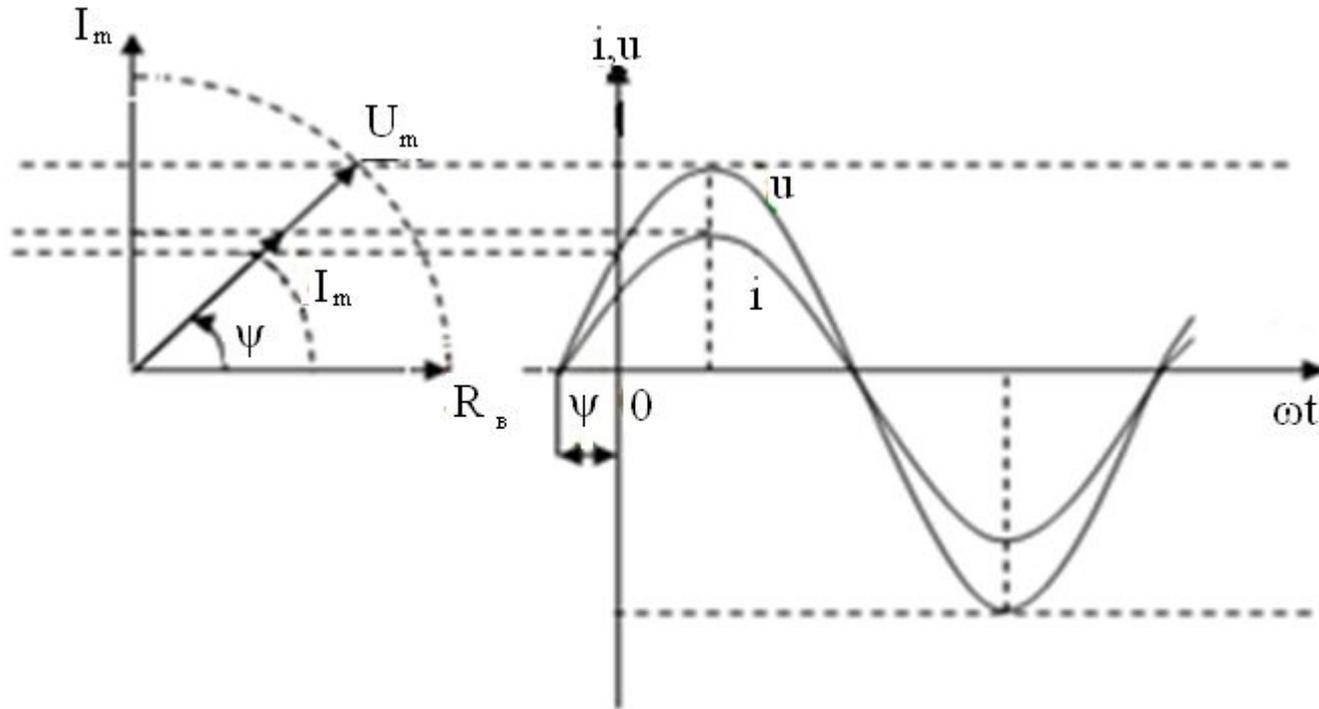
Рассмотрим амплитудные и фазовые соотношения между током и напряжением в элементах R, L и C. Для этого приложим к этим элементам синусоидальное напряжение  $U = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$  и рассчитаем мгновенное значение тока в каждом из них, т.е. найдем его амплитуду  $I_m$  и начальную фазу  $\Psi_i$ .



$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

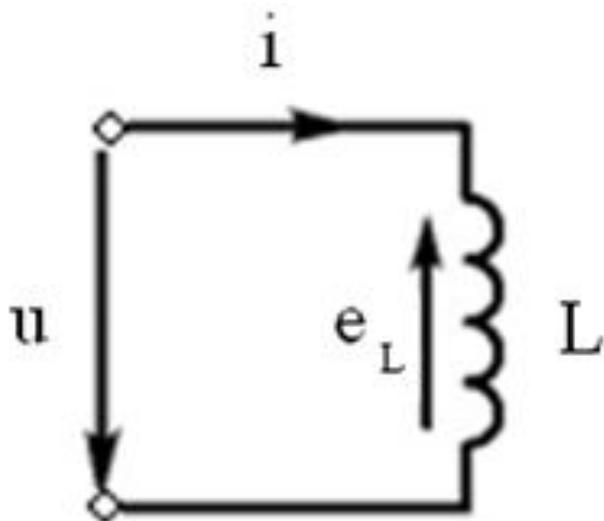
$$I_m = \frac{U_m}{R}, \quad I = \frac{U}{R} = UG \quad \begin{array}{l} \text{-действующее значение тока.} \\ \text{Закон Ома для цепи синусоидального тока с активным} \\ \text{сопротивлением.} \end{array}$$

*Рис. 2.12. Резистор R в цепи синусоидального тока.*



$\psi_i = \psi_u; \quad \varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$  - в цепи с активным сопротивлением ток и напряжение совпадает по фазе.

*Рис. 2.13. Векторная диаграмма и временные графики напряжения и тока.*



$$i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

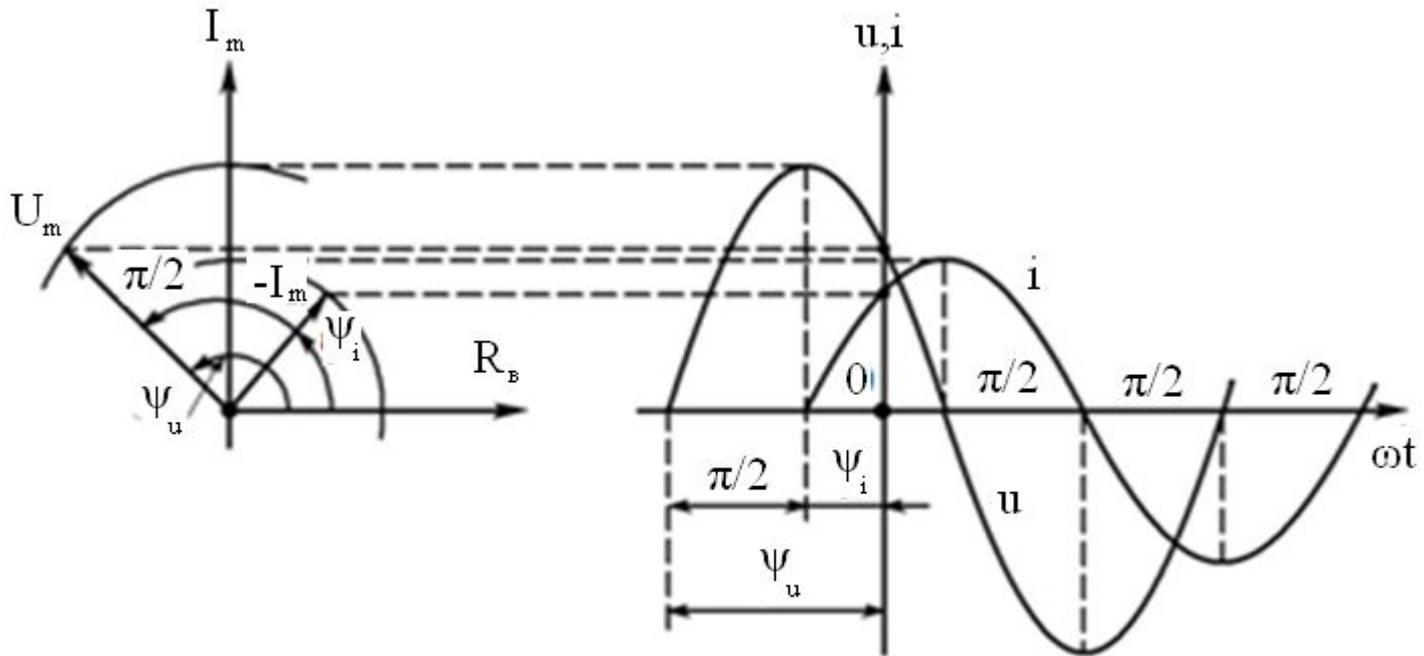
$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}; \quad I = \frac{U}{x_L}; \quad x_L = \omega L; \quad b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{\omega L};$$

$x_L$ -реактивное индуктивное сопротивление

$b_L$ -индуктивная проводимость

$I = U/x_L = Ub_L$ ; -Закон Ома для цепи синусоидального тока с индуктивным сопротивлением.

Рис. 2.14. Катушка индуктивности  $L$  в цепи синусоидального тока.

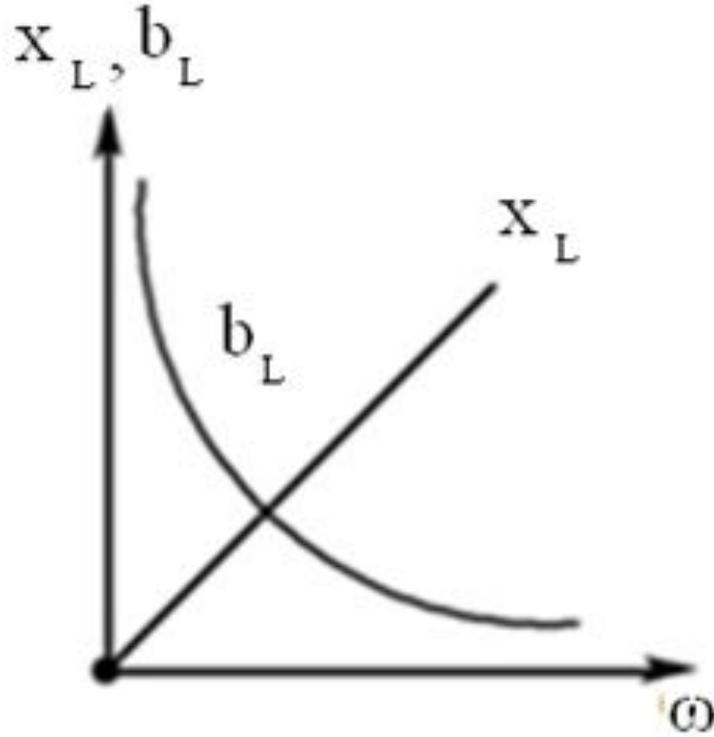


$$\psi_i = \psi_u - 90^\circ$$

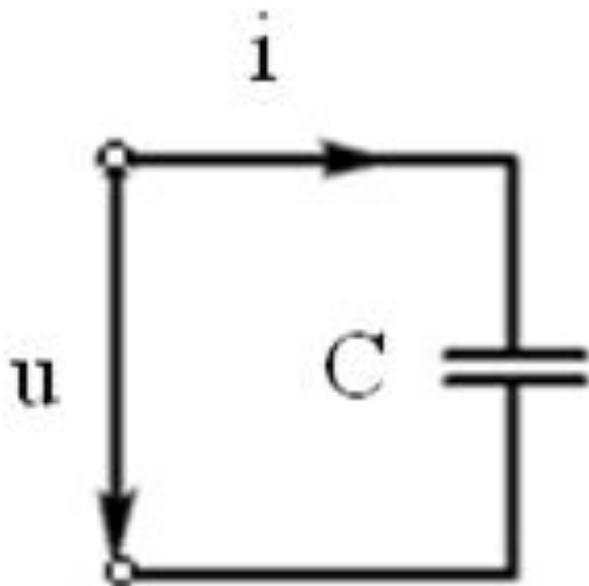
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = +90^\circ$$

В цепи с индуктивностью ток отстает от напряжения по фазе на  $90^\circ$

*Рис. 2.14. Катушка индуктивности  $L$  в цепи синусоидального тока. векторная диаграмма и временные графики напряжения и тока.*



*Рис. 2.14. Катушка индуктивности  $L$  в цепи синусоидального тока.  
Графики индуктивных сопротивления  $X_L$  и проводимости  $b_L$   
при изменении частоты.*



$$i = C \frac{du}{dt} = \frac{U_m}{1/\omega C} \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

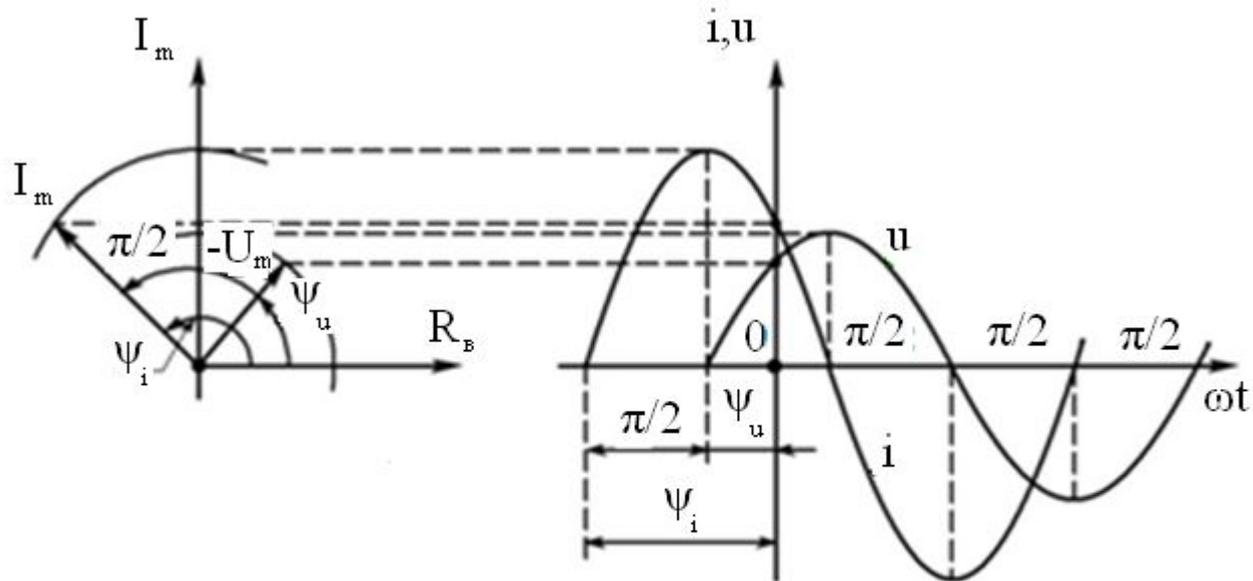
$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C}; \quad I = \frac{U}{x_C};$$

$$x_C = 1/\omega C; \quad \text{— реактивное емкостное сопротивление}$$

$$b_C = 1/x_C = \frac{1}{1/\omega C} = \omega C; \quad \text{— ёмкостная проводимость}$$

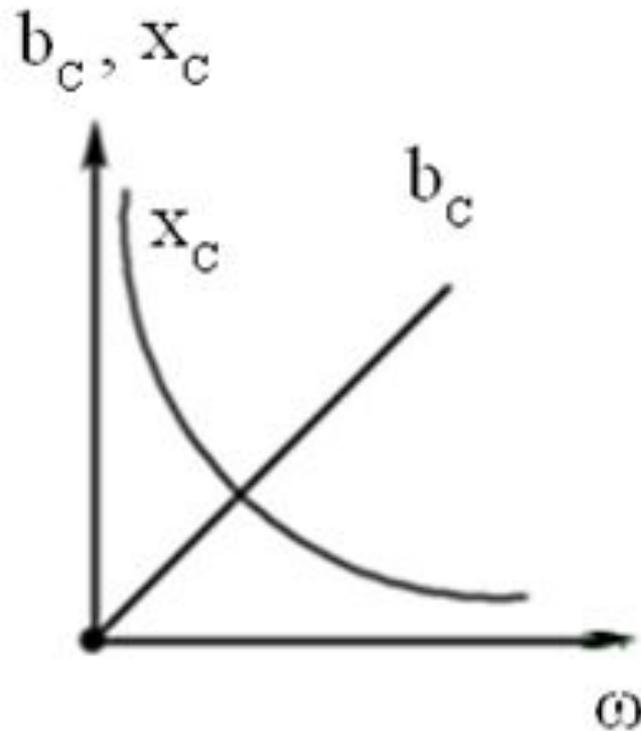
$$I = U/x_C = U b_C; \quad \text{— Закон Ома для цепи синусоидального тока с ёмкостью.}$$

Рис. 2.15. Конденсатор емкостью  $X_C$  в цепи синусоидального тока.



$\psi_i = \psi_u + 90^\circ$ ;  $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$ ; -В цепи с ёмкостью ток опережает напряжение по фазе на  $90^\circ$ .

*Рис. 2.15. Конденсатор емкостью  $C$  в цепи синусоидального тока, векторная диаграмма и временные графики напряжения и тока.*



*Рис. 2.15. Конденсатор емкостью  $C$  в цепи синусоидального тока, графики емкостных сопротивлений  $X_c$  и проводимостей  $b_c$  при изменении частоты.*

## 4. Цепь с последовательным соединением R,L,C.

К цепи приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$ .  
параметры  $R, L, C$  известны. Требуется определить ток цепи  $i$ ,  
т.е. его амплитуду  $I_m$  и начальную фазу  $\psi_i$ .

Ток во всех элементах одинаков, а напряжения различны. Здесь действует  $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C$  закон Кирхгофа в векторной формуле:

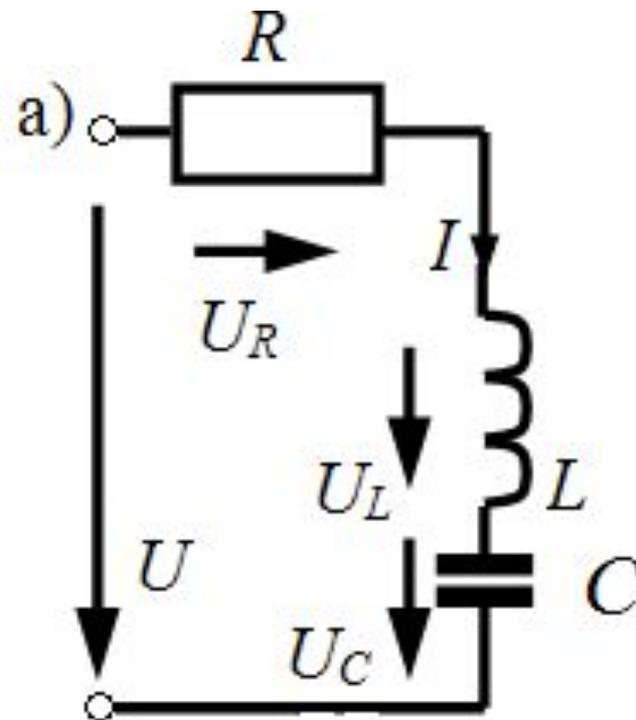
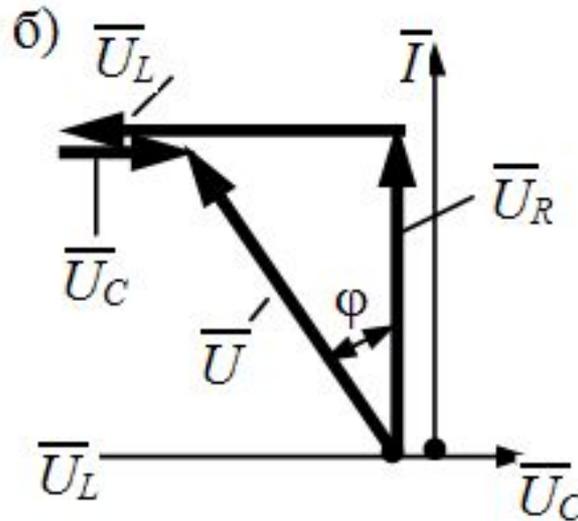


Рис. 2.16. Последовательное соединение элементов в цепи синусоидального тока , схема цепи (а).

Задачу решаем с помощью векторной диаграммы при условии, что  $U_L > U_C$

В результате получается прямоугольный треугольник, т.к. вектор  $U_R$  совпадает по направлению с вектором тока  $I$  по фазе вектор  $U_L$  опережает вектор  $I$  на  $90^\circ$ , а вектор  $U_C$  отстает от вектора  $I$  на  $90^\circ$ .



Применяя правило многоугольника для сложения векторов и откладывая векторы  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  друг за другом, находим вектор  $U$  приложенного к цепи напряжения.

Рис. 2.16. Последовательное соединение элементов в цепи синусоидального тока. Векторная диаграмма (б).

В соответствии с теоремой Пифагора

находим:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$

$$U_X = (U_L - U_C)$$

Учитывая,

$$U_R = IR, U_L = IX_L, U_C = IX_C,$$

$$U = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + X^2} \text{ получим:}$$

$U = IZ$  -Закон Ома для цепи синусоидального тока с

последовательным соединением

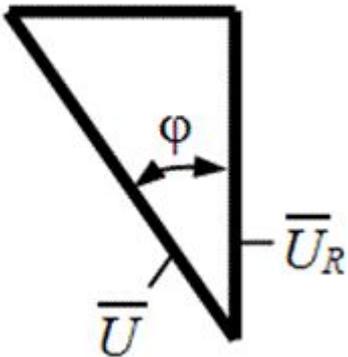
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ Полное сопротивление}$$

и реактивных сопротивлений цепи

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \text{ -Угол сдвига фаз тока и напряжений цепи}$$

в)  $\bar{U}_X = \bar{U}_L - \bar{U}_C$

Треугольник напряжений



г)  $X = X_L - X_C$

Треугольник

сопротивлений

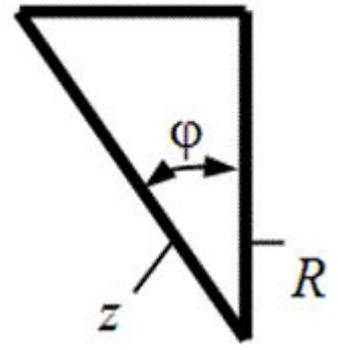


Рис. 2.16. Последовательное соединение элементов в цепи синусоидального тока. Треугольник напряжений(в) и треугольник сопротивлений(г).

## 5. Цепь с параллельным соединением R,L,C.

К цепи приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$ .

Параметры  $R$ ,  $L$ ,  $C$  цепи известны. Требуется определить ток цепи  $i$ , т.е. его амплитуду  $I_m$  и начальную фазу  $\psi_i$

Ток во всех элементах различен, а напряжения одинаковы.  
Здесь действует 1-ый закон Кирхгофа в векторной формуле:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

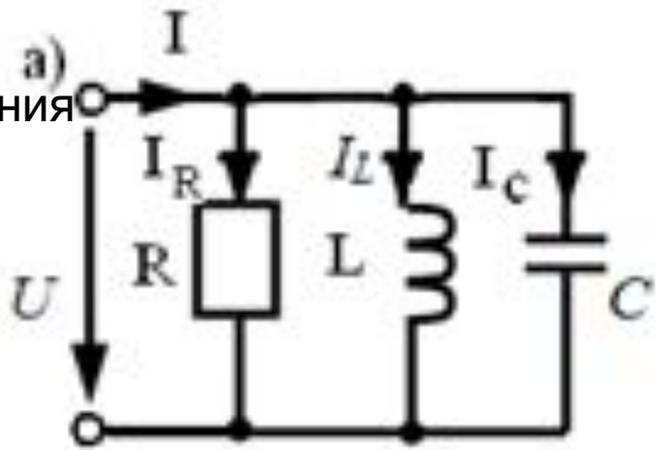
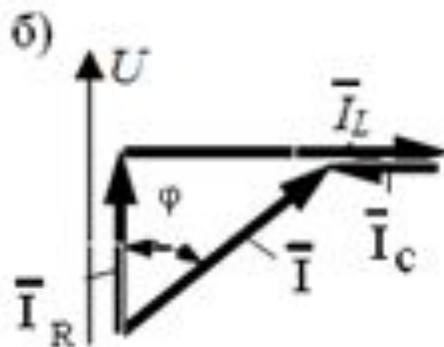


Рис. 2.17. Параллельное соединение элементов в цепи синусоидального тока(а). Схема цепи.

Задачу решаем с помощью векторной диаграммы при условии, что  $I_L > I_C$

В результате получается прямоугольный треугольник, т.к. вектор  $I_R$  совпадает по фазе с вектором  $U$ . Вектор  $I_L$  отстает от напряжения на  $90^\circ$ , а вектор  $I_C$  опережает его на  $90^\circ$ .



Применяя правило многоугольника, находим результирующий вектор  $I$ .

Рис. 2.17. Параллельное соединение элементов в цепи синусоидального тока(б). Векторная диаграмма.

В соответствии с теоремой Пифагора

находим:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{I_R^2 + I_X^2}$$

$$I_X = (I_L - I_C)$$

Учитывая,

$$I_R = UG, I_L = Ub_L, I_C = Ub_c,$$

получим:

$$I = U\sqrt{G^2 + (b_L - b_c)^2} = U\sqrt{G^2 + b^2}$$

$I = UY$ -Закон Ома для цепи синусоидального тока с параллельным соединением активного и реактивных сопротивлений

$$Y = \sqrt{G^2 + (b_L - b_c)^2} = \sqrt{G^2 + b^2}$$

-Полная проводимость цепи

Очевидно, что  $Z = 1/Y$

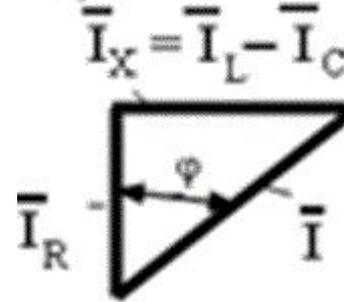
$$\varphi = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_R} = \arctg \frac{b_L - b_c}{G}$$

-Угол сдвига фаз тока и напряжений цепи

Треугольн

ИК

ТОКОВ



Треугольн

проводимосте

й

$$b = b_L - b_c$$

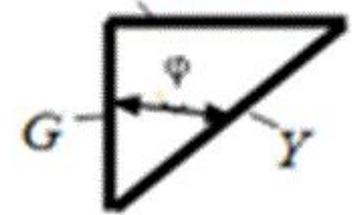


Рис. 2.17. Параллельное соединение элементов в цепи синусоидального тока. Треугольник токов и проводимостей.

# 6. Мощность в цепи синусоидального тока

## 6.1. Мгновенная мощность.

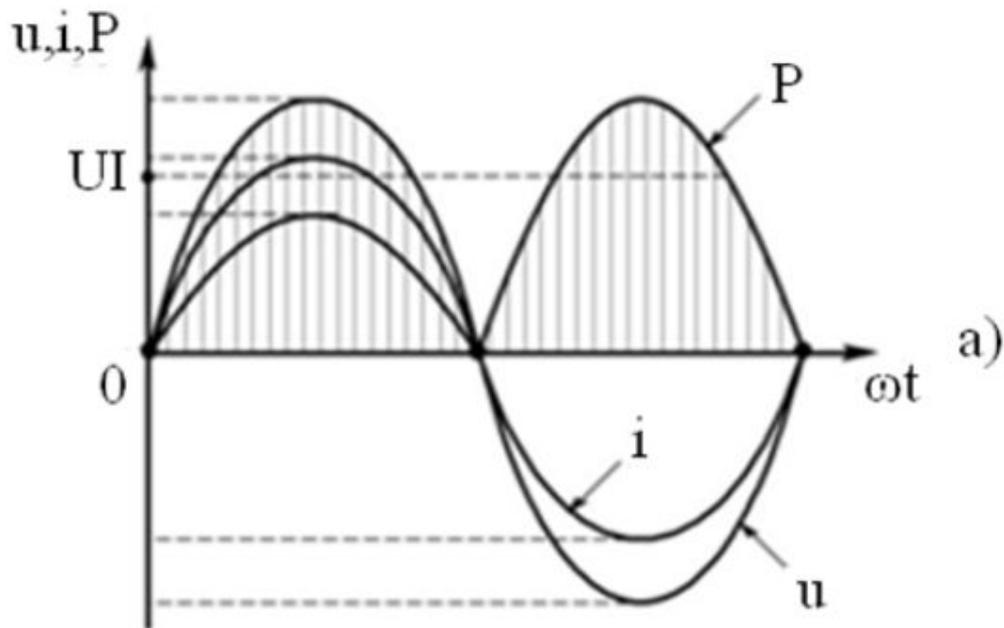
*Мгновенной мощностью называют произведение приложенного к цепи мгновенного напряжения  $U(t)$  на мгновенное значение протекающего по ней тока.*

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) \cdot I_m \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi)$$

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI(2\omega t - \varphi)$$

**Вывод.** Мгновенная мощность в цепи синусоидального тока имеет постоянную и переменную составляющую (последняя изменяется во времени с удвоенной частотой).

Характер мгновенной мощности зависит от разности фаз между напряжением и током



В этом случае мгновенная мощность  $P(t) = UI - UI \cos 2\omega t$  изменяется по косинусоидальному закону относительно прямой  $UI$  с удвоенной частотой (энергия только поступает в цепь).  
 Такая цепь эквивалентна цепи, содержащей только активное сопротивление.

Рис. 2.18 Характер изменения мгновенной мощности:  $\varphi = 0$ .

В этом случае мгновенная мощность изменяется по косинусоидальному закону относительно прямой  $UI\cos\varphi$  с удвоенной частотой, имея положительные и отрицательные участки.

Положительные соответствуют поступлению энергии в цепь.

Отрицательные соответствуют возвращению запасённой в цепи энергии в источник.

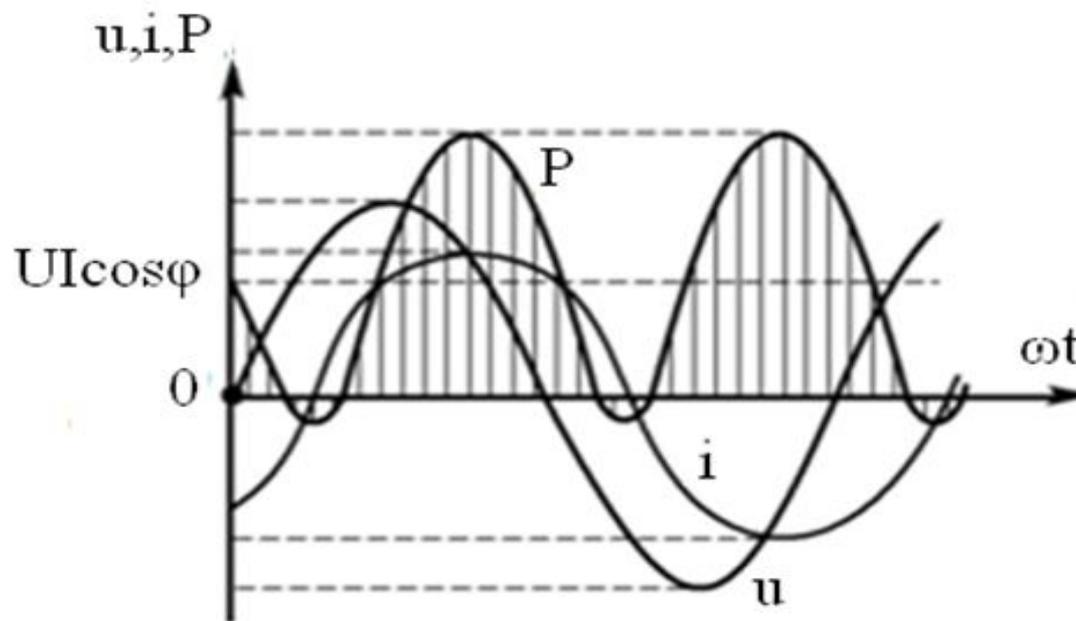
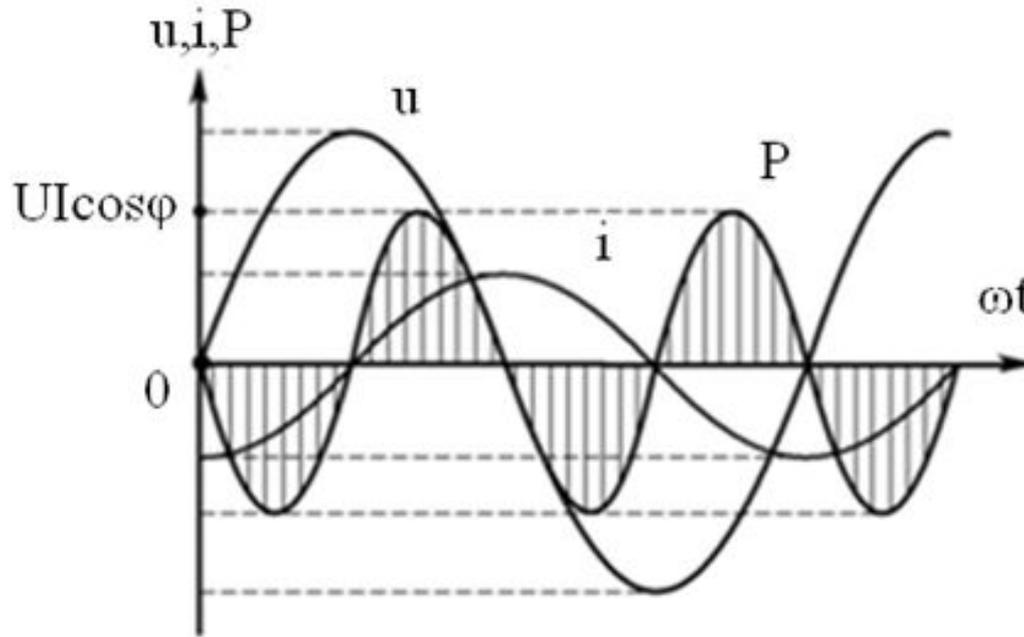


Рис. 2.19 Характер изменения мгновенной мощности:  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

В этом случае мгновенная мощность изменяется по гармоническому закону относительно оси времени с удвоенной частотой, а вся поступающая в цепь энергия возвращается обратно в источник.



в)

Рис. 2.20 Характер изменения мгновенной мощности:  $\varphi = \pi/2$ .

## 6.2 Активная мощность

Активная мощность – это среднее значение мгновенной мощности за период т.е.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Подставив  $P(t)$  из выражение в формулу и проинтегрировав, получим :

$$P = UI \cos \varphi,$$

т.е. активная мощность в цепи синусоидального тока равна произведению действующих значений напряжения, тока и косинуса угла сдвига фаз между напряжением и током. Она выражает энергию, которая передается от источника к нагрузке и измеряется в ваттах (Вт).

Множитель  $\cos \varphi$  называется коэффициентом мощности: чем больше  $\cos \varphi$ , тем больше  $p$  при заданных напряжении и токе.

Поскольку  $U=ZI$  , для активной мощности можно получить

у

выражение:

$$P = RI^2 = GU^2 \quad \text{где } R=Z \cos \varphi$$

## 6.3 Реактивная мощность

Реактивная мощность характеризует энергию, которая периодически циркулирует между источником и нагрузкой, если в нагрузке есть идеальные элементы L и C, способные накапливать энергию на нагрузке и возвращать ее источнику.

$$Q = xI^2 = GU^2, \quad x = z \sin \varphi \quad Q = zI^2 \sin \varphi \quad Q = UI \sin \varphi$$

где  $U = zI$ .

Реактивная мощность измеряется в вольт-амперах реактивных (вар).

При  $\varphi > 0$  (индуктивная нагрузка)  $Q > 0$ , а при  $\varphi < 0$  (ёмкостная нагрузка)  $Q < 0$ .

# 6.4 Полная мощность

Полная мощность – это максимальное значение активной мощности

$$S = UI$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах (ВА).

Учитывая, что  $S = UI$ , а  $U = zI = \frac{I}{y}$  получим  $S = zI^2 = \frac{I^2}{y}$ ,

где  $Z$  и  $Y$  – полное сопротивление и полная проводимость цепи.  
Сложив квадраты активной и реактивной мощности получим

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Из выражений определяем

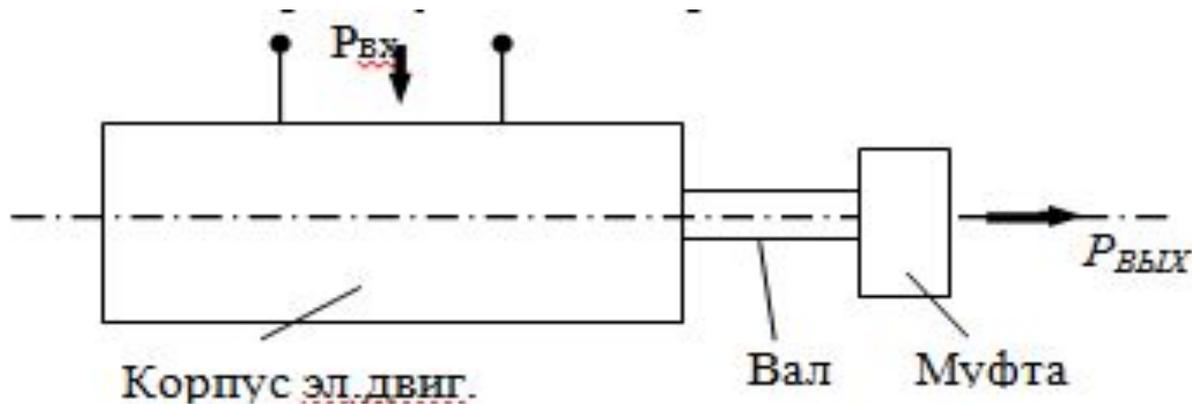
$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

т.е коэффициент мощности  $\cos \varphi$  показывает, какую часть от полной мощности составляет активная мощность.

### 6.3 Понятие о коэффициенте мощности и коэффициенте полезного действия.

*Коэффициент мощности* показывает, какая доля полной мощности преобразуется в тепло другие виды энергии. Чем выше  $\cos\varphi$ , тем больше полезная мощность.

*Коэффициент полезного действия (КПД)* – это отношение активной мощности на её выходе и активной мощности на входе. Измеряется в относительных единицах или в процентах и всегда меньше единицы (меньше 100%)



КПД мощных электродвигателей достигает 80% и более.

*Рис 2.21 Распределение мощности в электродвигателе*

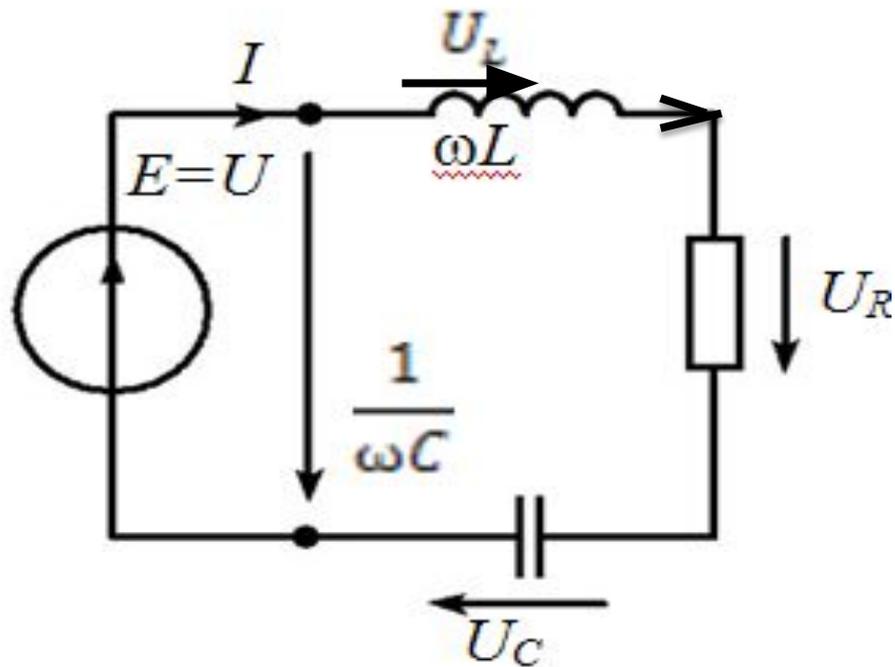
# 7. Резонанс в электрических цепях однофазного переменного тока.

При подключении колебательного контура, состоящего из катушки индуктивности и конденсатора к источнику энергии (источнику синусоидальной ЭДС или синусоидального тока), могут возникнуть резонансные явления.

Возможны два основных типа резонанса:

- При последовательном соединении катушки и конденсатора – *резонанс напряжений*.
- При параллельном соединении – *резонанс токов*.

## 7.1 Резонанс напряжений



Режим работы неразветвленного участка цепи, содержащий индуктивный, емкостной и резисторный элементы последовательного контура, при котором ее ток и напряжение совпадает по фазе ( $\varphi_i = \varphi_u, \varphi = 0$ ) называется *резонансом напряжения*.

*Рис 2.22 Последовательный колебательный контур*

Угловая частота при резонансе  $\omega_{рез}L = \frac{1}{\omega_{рез}C}$ ;  $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

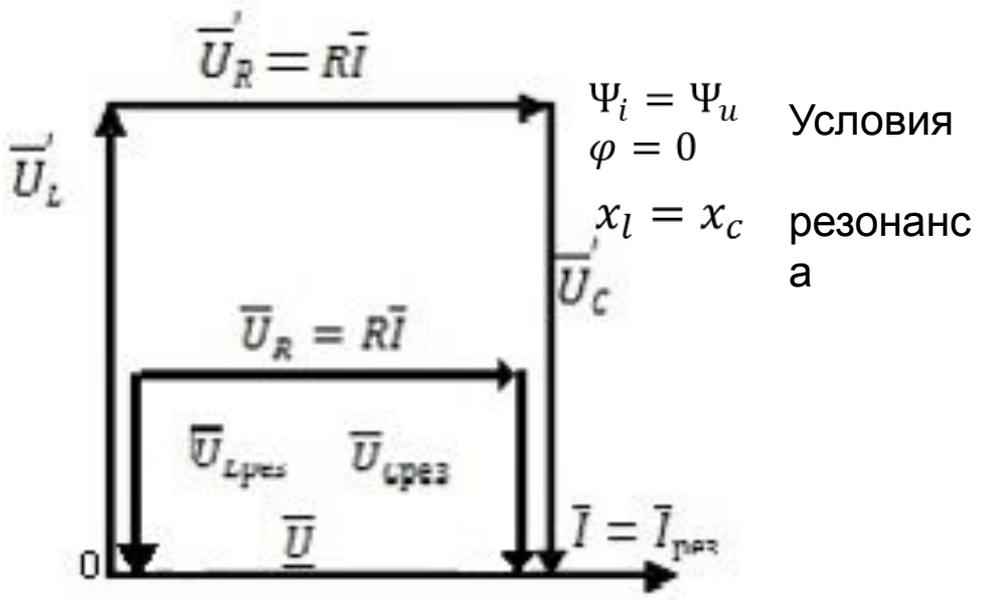
$\rho = \sqrt{L/C}$  -Характеристическое сопротивление колебательного контура, Ом

$$Q = \frac{U_{Lрез}}{U} = \frac{U_{Cрез}}{U} = \frac{\rho I}{RI} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

-добротность контура.

Чем больше  $\rho$ , тем больше напряжение на индуктивности  $U_L$  и ёмкости  $U_C$  при условии, что  $\rho > R$ .

При резонансе напряжений ток цепи  $I_{рез} = \frac{U}{R}$  достигает наибольшего значения.



### 2.23 Векторная диаграмма при резонансе напряжений

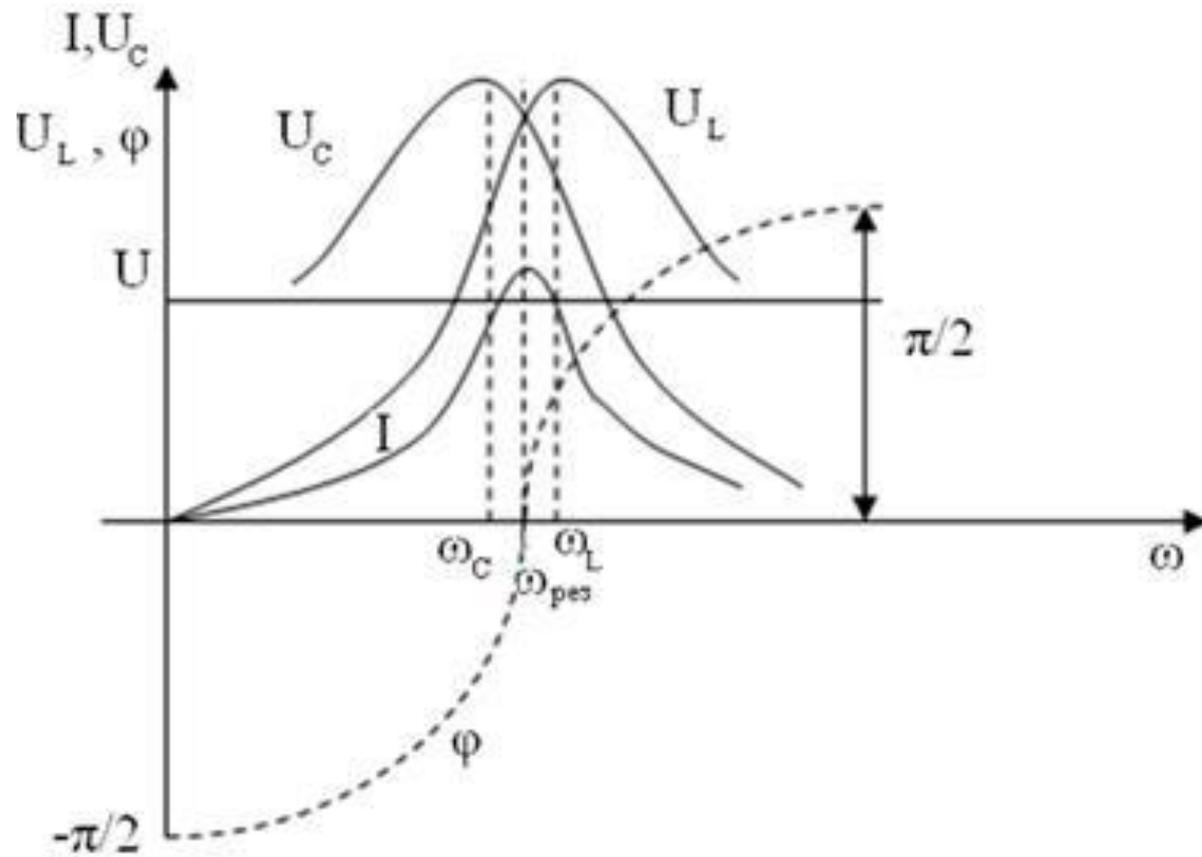


Рис. 2.24 Резонансные кривые

## 7.2 Резонанс токов

Действующее значение

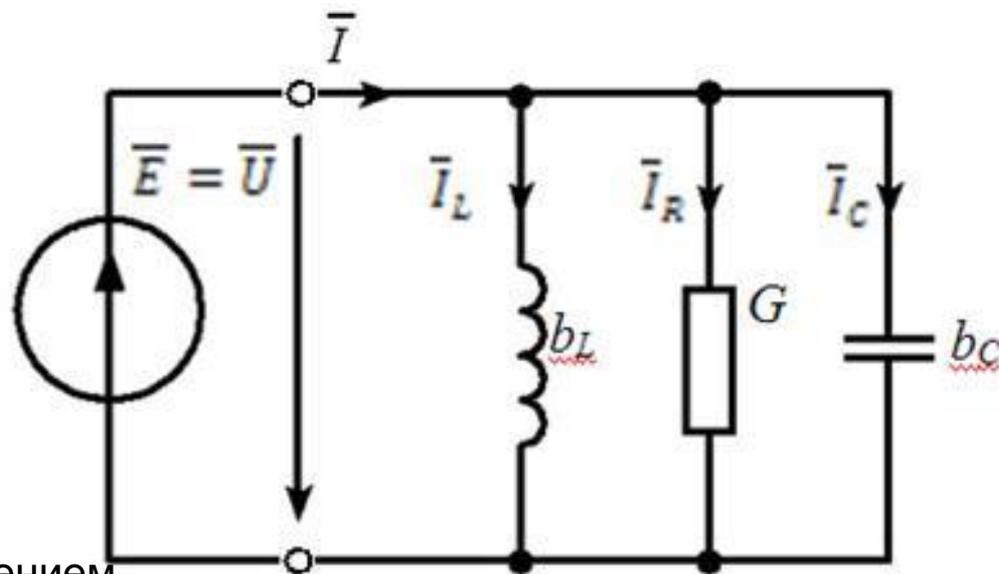
$$I_{\text{тока}} = yU = \sqrt{G^2 + (b_L - b_C)^2} \cdot U$$

При угловой частоте  $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$

$b_L = 1/\omega_L$  и  $b_C = \omega C$  равны между собой

$\varphi = 0$ , т. е.  $\psi_i = \psi_u$ ,  $y = G$ , а

$I_{\text{рез}} = GU$  минимальные.



Режим участка цепи с параллельными ветвями,

при котором сдвиг фаз между напряжением на его выходах и общим током равен нулю,

называется *резонансом тока*.

При увеличении индуктивных  $b_L$  и емкостных проводимостей в  $n$ -раз, токи  $I_L$  и  $I_C$  тоже увеличатся в  $n$ -раз, а общий ток  $I_{\text{рез}}$  останется тем же  $I_{\text{рез}} = GU$ , что иллюстрируется векторной диаграммой (рис 2.26)

Рис. 2.25 Колебательный контур с параллельным соединением R,L,C

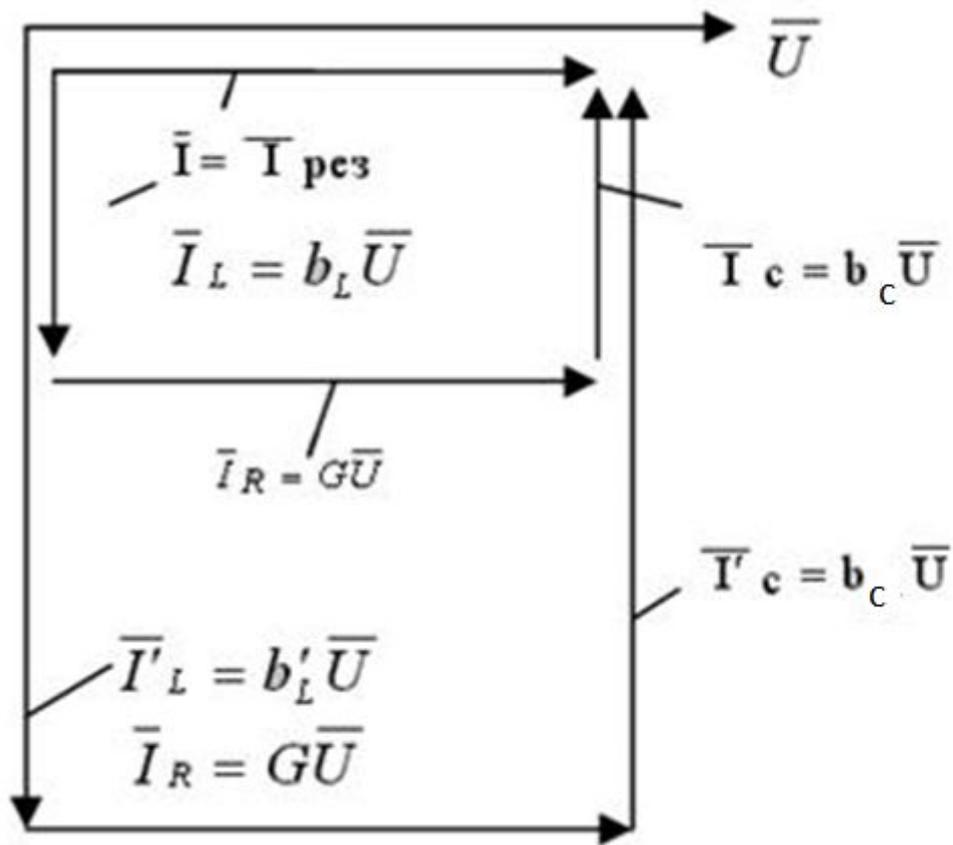


Рис. 2.26 Векторная диаграмма при резонансе токов

Ток  $I_C = \cos CU$  возрастает пропорционально  $\omega$ ,  
а  $I_L$  обратно пропорционально.  
Ток  $I_R$  от  $\omega$  независит  
Точка пересечения  $I_L$  и  $I_C$  соответствует резонансу  
токов  $I = I_R = I_{\text{рез}}$ .

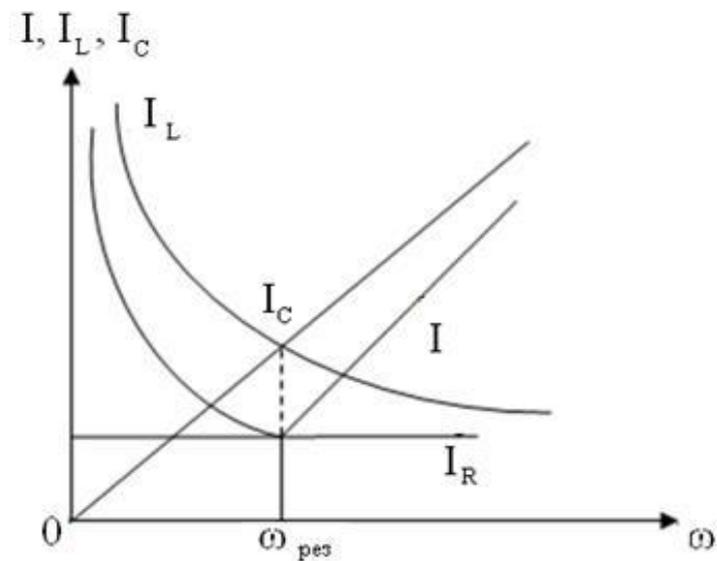
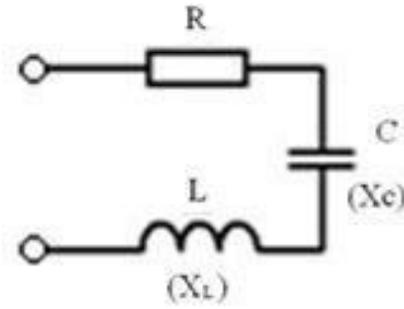


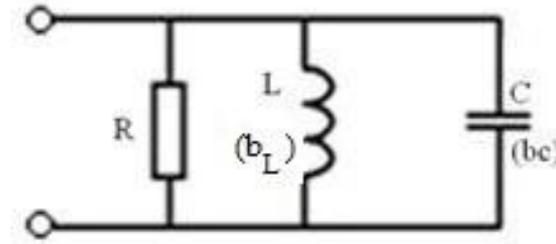
Рис. 2.27 Резонансные кривые при резонансе токов

## 8. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{- Действующие значения напряжения и тока}$$



а)



б)

Рис.2.28 Последовательное (а) и параллельное (б) соединение элементов

$$I = \frac{U}{z} = yU \quad \text{- закон Ома для всей цепи или ее элемента; [А]}$$

$$z = \sqrt{R^2 + x^2} \quad \text{- полное сопротивление цепи или элемента; [Ом]}$$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega c} = x_L - x_C \quad \text{- реактивное сопротивление; [Ом]}$$

$$y = \sqrt{G^2 + b^2} \quad \text{- полная проводимость; [См]}$$

$$b = \frac{1}{\omega L} - \omega c = b_L - b_C \quad \text{- реактивная проводимость; [См]}$$

$$\varphi = \arctg \frac{x}{R} = \arctg \frac{b}{G} \quad \text{- сдвиг по фазе между напряжением и током; [рад]}$$

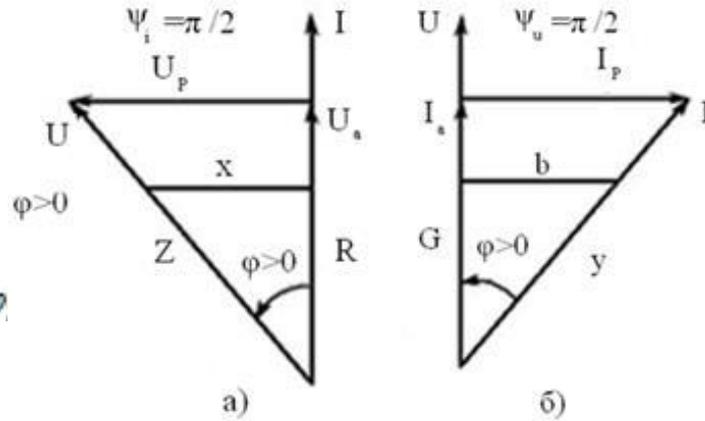
Между сопротивлениями и проводимостями существует связь:

$$\left. \begin{aligned} z &= 1/y; \\ R &= \frac{G}{G^2 + b^2} = \frac{G}{y^2}; \\ x &= \frac{b}{G^2 + b^2} = \frac{b}{y^2}. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= 1/z; \\ G &= \frac{R}{R^2 + x^2} = \frac{R}{z^2}; \\ b &= \frac{x}{z^2 + x^2} = \frac{x}{z^2}. \end{aligned}$$

При параллельном соединении:

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n; \quad b = b_1 + b_2 + \dots + b_n;$$

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} + \dots + I_{an}; \quad I_p = I_{p1} + I_{p2} + \dots + I_{pn}$$



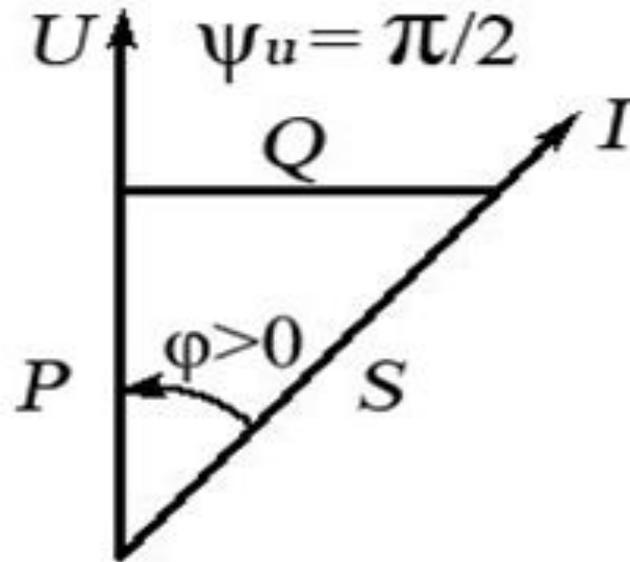
При последовательном соединении:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n; \quad x = x_1 + x_2 + \dots + x_n;$$

$$U_a = U_{a1} + U_{a2} + \dots + U_{an}; \quad U_p = U_{p1} + U_{p2} + \dots + U_{pn};$$

$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}$	$z = \sqrt{R^2 + x^2};$	$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2};$	$y = \sqrt{G^2 + b^2};$
$U_a = U \cos \varphi;$	$R = z \cos \varphi;$	$I_a = I \cos \varphi;$	$G = y \cos \varphi;$
$U_p = U \sin \varphi;$	$x = z \sin \varphi;$	$I_p = I \sin \varphi;$	$b = y \sin \varphi;$
$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a};$	$\varphi = \arctg \frac{x}{R};$	$\varphi = \arctg \frac{I_p}{I_a};$	$\varphi = \arctg \frac{b}{G}$

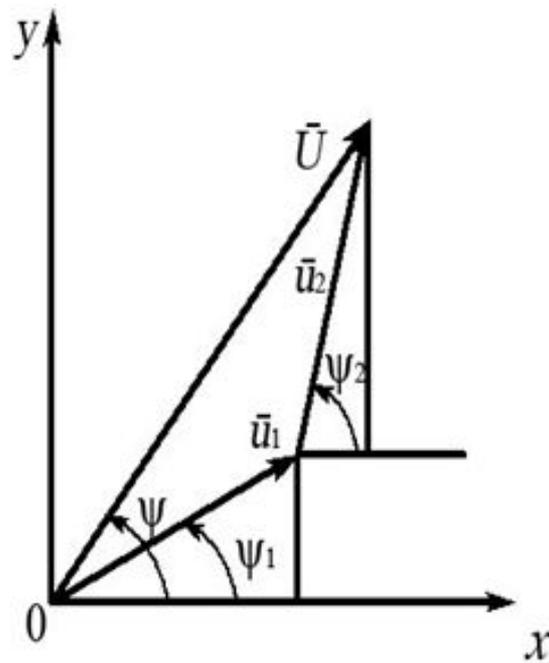
Рис.2.29 Треугольник напряжений и сопротивлений (а), токов и проводимостей (б).



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; P = S \cos \varphi; Q = S \sin \varphi; \varphi = \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}$$

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n; Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n,$$

Рис. 2.30 Треугольник мощностей



$$u = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \psi)$$

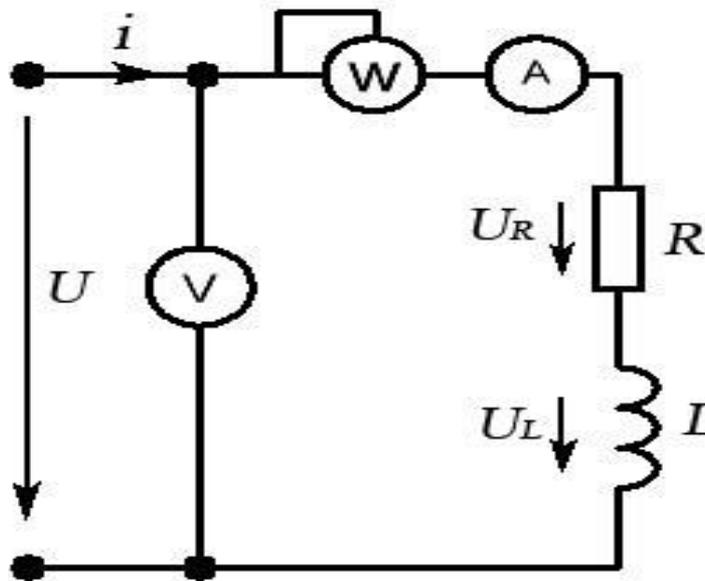
$$U = \sqrt{(U_1 \cos \psi_1 + U_2 \cos \psi_2)^2 + (U_1 \sin \psi_1 + U_2 \sin \psi_2)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_1 \sin \psi_1 + U_2 \sin \psi_2}{U_1 \cos \psi_1 + U_2 \cos \psi_2}$$

Рис 2.31 Суммирование синусоидальных величин

### Пример 2.1

В цепи, приведенной на рис. 8.5, приборами измерены  $U = 220$  В,  $I = 5$  А,  $P = 550$  Вт. Определить  $R$  и  $L$ , если  $f = 50$  Гц, принимая  $\phi = 0$ . Написать выражения для  $u, i, u_R, u_L$



Решение:

$$R = \frac{p}{I^2} = \frac{550}{5^2} = 22 \text{ Ом}$$

$$z = \frac{U}{I} = \frac{220}{5} = 44 \text{ Ом};$$

$$x = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{44^2 - 22^2} = 38,11 \text{ Ом};$$

$$L = \frac{x}{2\pi f} = \frac{38,11}{314} = 0,1214 \text{ Гн};$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi), \text{ т.к. } \psi=0, \omega = 2\pi f = 314; \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{R} = \operatorname{arctg} \frac{38,11}{22} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$U_m = U\sqrt{2} = 311,1 \text{ В}$$

$$u = 311,1 \sin 314t \text{ В}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) = 7,071(314t - \frac{\pi}{3}) \text{ А};$$

$$U_R = RI = 155,6 \sin(314t - \frac{\pi}{3}) \text{ В}$$

$$u_L = XI_m \sin(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}) = 269,5 \sin(314t + \frac{\pi}{6}) \text{ В};$$

При этом учтено, что ток  $i$  в цепи  $R, L$  отстаёт от напряжения  $U$  по фазе на  $\varphi$ .  
Напряжение  $U_R$  совпадает по фазе с  $i$ , а напряжение  $U_L$  опережает  $i$  по фазе на  $\pi/2$ .

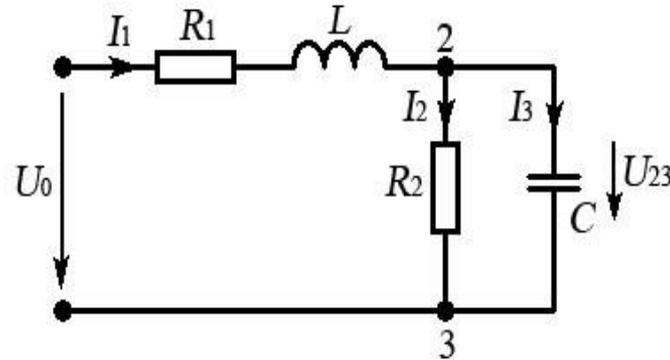
$$P = UI \cos \varphi$$

Сдвиг по фазе  $\varphi$  можно определить и из выражения

## Пример 2.2

Для цепи, приведенной на рис. 8.6, известны  $U_0=20$  В,  $P_0=32$  Вт (мощность всей цепи),  $R_1 = 5,12$  Ом,  $R_2 = 8$  Ом,  $X_3 = 6$  Ом.

Найти:  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $X_1$  и  $\phi_0$  (всей цепи), построить векторную диаграмму токов и напряжений.



Решени

е:

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ См} \quad (b_2 = 0);$$

$$R_{23} = \frac{G_{23}}{y_{23}^2} = \frac{0,125}{0,208^2} = 2,88 \text{ Ом};$$

$$b_3 = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{6} = -0,1667 \text{ См} \quad (G_3 = 0);$$

$$x_{23} = \frac{b_{23}}{y_{23}^2} = \frac{-0,1667}{0,208^2} = -3,84 \text{ Ом};$$

$$G_{23} = G_2 + G_3 = G_2 = 0,125 \text{ См};$$

$$b_{23} = b_2 + b_3 = b_3 = -0,1667 \text{ См};$$

$$y_{23} = \sqrt{(G_2 + G_3)^2 + (b_2 + b_3)^2} = \sqrt{0,125^2 + 0,1667^2} = 0,208 \text{ См};$$

$$R_0 = R_1 + R_{23} = 5,12 + 2,88 = 8 \text{ Ом};$$

$$U_{23} = I_3 R_{23} = \frac{I_1}{y_{23}} = \frac{2}{0,208} = 9,52 \text{ В};$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_0}{R_0}} = \sqrt{\frac{32}{8}} = 2 \text{ А};$$

Векторная диаграмма при начальной фазе

$$z_0 = \frac{U_0}{I_1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ Ом};$$

$U_{23}$ , равной  $\pi/2$   
, приведена на рис. 8.7 ( $M_u = 5 \text{ В/см}$ ;  
 $M_i = 1 \text{ А/см}$ ).

$$x_0 = \sqrt{z_0^2 - R_0^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ Ом};$$

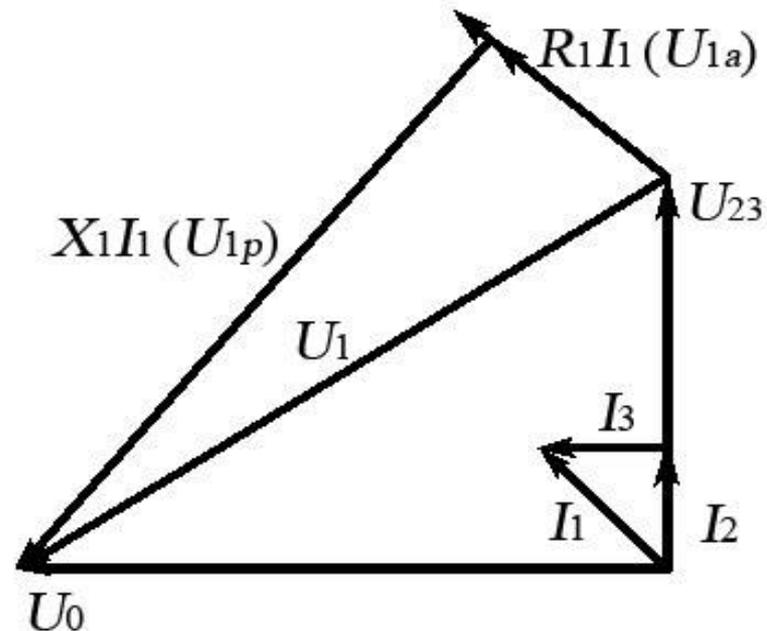
$$x_1 = x_0 - x_{23} = 6 - (-3,84) = 9,84 \text{ Ом},$$

так как,  $P = UI \cos \varphi$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{P_0}{U_0 I_1} = \arccos \frac{32}{20 \cdot 2} = 36^\circ, 51';$$

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{9,52}{8} = 1,19 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{x_3} = \frac{9,52}{6} = 1,59 \text{ А};$$



## 9. Комплексный метод расчета цепей синусоидального тока.

$$\underline{U} = a_1 + jb_1 = \underline{U} \cos \psi_u + j\underline{U} \sin \psi_u = \underline{U} e^{j\psi_u}$$

$$\underline{I} = a_2 + jb_2 = \underline{I} \cos \psi_i + j\underline{I} \sin \psi_i = \underline{I} e^{j\psi_i}$$

$\underline{U}$  – комплексное действующее значение напряжения.

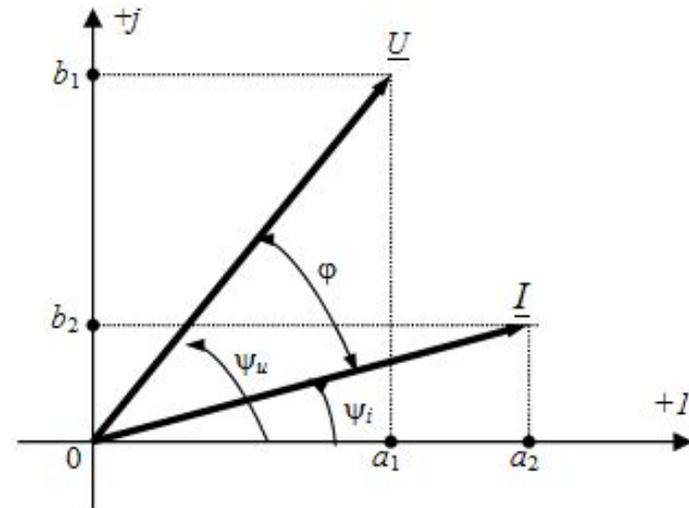
$\underline{I}$  – комплексное действующее значение тока.

$a_1$  и  $a_2$  = вещественные части комплексных величин.

$b_1$  и  $b_2$  – мнимые части комплексных величин.

$U$  и  $I$  – модули комплексных величин (действующие значения)

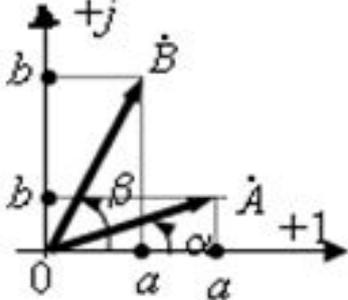
$\psi_i$  и  $\psi_u$  – аргументы комплексных величин. (начальные фазы).



Формулы для  $\underline{U}$  и  $\underline{I}$  представляют собой, соответственно, алгебраическую, тригонометрическую и показательную форму записи.

Рис.9.1 Положение векторов тока и напряжения на комплексной площади

**Основные действия с комплексными числами применительно  
к синусоидальным функциям времени**

Графическое изображение и формулы перехода	№ п/п	Аналитическая запись комплексных чисел и правила основных действий с ними	
 <p>переход от <u>показательной</u> к алгебраической форме записи</p> $a_1 = A \cos \alpha$ $b_1 = A \sin \alpha$ <p>переход от <u>алгебраической</u> к показательной форме записи</p>	1	Показательная форма <u>A</u> и <u>B</u>	$\underline{A} = Ae^{j\alpha}; \underline{B} = Be^{j\beta}$
	2	Алгебраическая форма <u>A</u> и <u>B</u>	$\underline{A} = a_1 + jb_1;$ $\underline{B} = a_2 + jb_2$
	3	Число <u>A</u> , сопряженное <u>A</u>	$\underline{A} = Ae^{-j\alpha} = a_1 - jb_1$
	4	Сложение и вычитание <u>A</u> и <u>B</u>	$\underline{A} \pm \underline{B} = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$
	5	Умножение <u>A</u> на <u>B</u>	$\underline{AB} = AB e^{j(\alpha+\beta)}$ или $\underline{AB} = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) =$ $= a_1a_2 + jb_1a_2 + jb_2a_1 - b_1b_2$

$$A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1}$$

6

Умножение  
A  
на сопряженное  
комплексное  
число A

$$\underline{A} \underline{A} = A e^{j\alpha} \cdot A e^{-j\alpha} = A^2$$

$$\underline{A} \underline{A} = (a_1 + j b_1)(a_1 - j b_1) =$$

$$= a_1^2 + b_1^2$$

7

Деление  
A на B

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)} \text{ или}$$

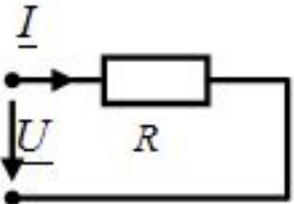
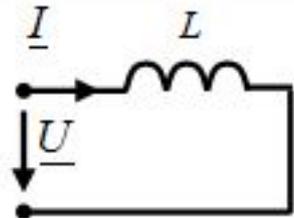
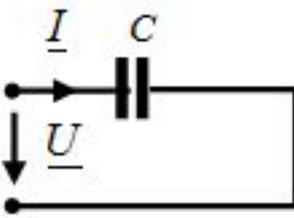
$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2} \cdot \left( \frac{a_2 - j b_2}{a_2 - j b_2} \right) =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + j b_1 a_2 - j b_2 a_1 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

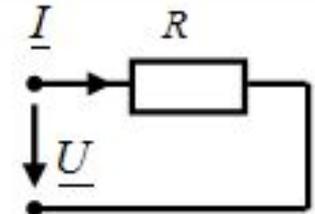
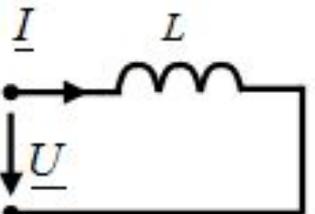
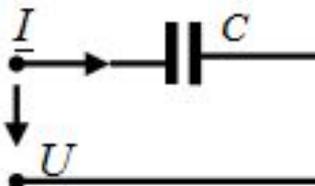
**Некоторые широко используемые формулы:**

$$j^1 = \sqrt{-1}; \quad j^2 = -1; \quad e^{\pm j 90^\circ} = \pm j; \quad e^{\pm j 180^\circ} = -1;$$

**Активные, индуктивные, емкостные сопротивления и проводимости  
в комплексной форме записи**

№ п/п	Схемы цепей	Физические свойства цепи	Комплексное сопротивление $\underline{Z}$ $\underline{Z} = z e^{j\varphi}$	Комплексная проводимость $Y = 1/Z$
1		$z = R$  $\varphi = 0$	$\underline{Z}_R = R e^{j0^\circ} = R$	$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} =$ $= \frac{1}{R} = G$
2		$z = x_L = \omega L$  $\varphi = +90^\circ$	$\underline{Z}_L = x_L e^{+j90^\circ} =$ $= jx_L = j\omega L$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} =$ $= \frac{1}{jx_L} = -j \frac{1}{\omega L}$
3		$z = x_C = \frac{1}{\omega C}$  $\varphi = -90^\circ$	$\underline{Z}_C = x_C e^{-j90^\circ} =$ $= -jx_C = -j \frac{1}{\omega C} =$ $= + \frac{1}{j\omega C}$	$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} =$ $= \frac{1}{-jx_C} = +j\omega C$

**Комплексная форма записи закона Ома для цепей с активным, индуктивным, емкостным сопротивлениями**

№ ц/п	Схемы цепей	Соотношение между $u$ и $i$	Комплексная форма записи Закона Ома
1		$u = i R$ $i = u G$	$\underline{U} = \underline{Z}_R \underline{I} = R \underline{I}$ $\underline{I} = \underline{Y}_R \underline{U} = G \underline{U}$
2		$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int u dt$	$\underline{U} = \underline{Z}_L \underline{I} = j \omega L \underline{I}$ $\underline{I} = \underline{Y}_L \underline{U} = -j \frac{1}{\omega L} \underline{U}$
3		$u = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C \frac{du}{dt}$	$\underline{U} = \underline{Z}_C \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$ $\underline{I} = \underline{Y}_C \underline{U} = +j \omega C \underline{U}$

## Комплексная

• Комплексная мощность — произведение комплексного напряжения на сопряженный комплексный ток цепи (это показательная форма записи комплексной мощности)

$$\tilde{S} = \underline{U} \underline{I}^* = S e^{j\varphi}$$

Здесь  $\tilde{S}$  — полная мощность цепи;  $\varphi$  — угол сдвига фаз между напряжением и током;  $\underline{I} = i e^{-j\Psi_1}$  — комплексный ток, сопряженный с заданным комплексным током  $\underline{I} = i e^{+j\Psi_1}$

Переходя от показательной к алгебраической форме записи, находим, что ее вещественная часть  $S \cos \varphi$  соответствует активной мощности цепи  $P$ , а мнимая часть  $S \sin \varphi$  — реактивной мощности цепи  $Q$ . Поэтому

$$\tilde{S} = UI = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = P + jQ.$$

Знак  $\sim$  над комплексной мощностью носит название «тильда» и ставится вместо точки, так как мощность не является синусоидной. Таким образом, комплексная мощность цепи содержит волную мощность  $S$ , активную мощность  $P$ , реактивную мощность  $Q$  и угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением и током. Заметим, что полная мощность  $\tilde{S}$ , ВА, равна модулю комплексной мощности:

$$\tilde{S} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

## ***Законы Кирхгофа в комплексной форме записи***

Согласно первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0,$$

где  $K$  — число ветвей, подходящих к данному узлу цепи.

Согласно второму закону Кирхгофа, алгебраическая сумма комплексных ЭДС контура равна алгебраической сумме комплексных напряжений на всех комплексных сопротивлениях этого контура:

$$\sum_m^Q E_q = \sum_{n=1}^N I Z_n$$

где  $Q$  - число источников ЭДС кон-тура;  $N$  - число комплексных сопротивлений контура

## ***Аналогия с цепями постоянного тока***

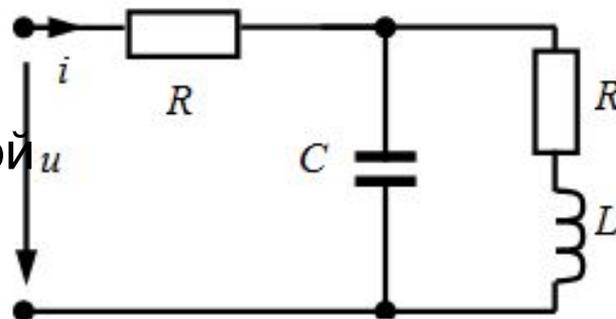
Сравнивая формулы закона Ома и законов Кирхгофа для цепей постоянного тока с соответствующими формулами для цепей синусоидального тока в комплексной форме записи, можно убедиться в том, что они формально тождественны (аналогичны) друг другу, хотя физические процессы в сравниваемых цепях различны. Таким образом, если в формулах для цепей постоянного тока заменить  $U$ ,  $I$ ,  $E$ ,  $R$  и  $G$  на  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$ , то получим формулы, записанные в комплексной форме. Это позволяет применять методы расчета цепей постоянного тока для определения комплексных токов, на основании которых находятся действующие и мгновенные значения искомых током.

Последовательность выполнения расчета цепей комплексным методом:

1. Изображаем заданные синусоидальные напряжения и параметры реактивных элементов комплексными числами
2. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составляем уравнения для определения комплексных токов (напряжений).
3. Определяем комплексные токи в ветвях в результате решения алгебраических уравнений пп. 2. Основные алгебраические действия с комплексными числами, которые используются на этом этапе, приведены в табл. "Основные действия с комплексными числами применительно к синусоидальным функциям времени"
4. С учетом соответствия преобразуем найденные комплексные токи в ветвях в соответствующие мгновенные значения.

# Пример расчета цепей комплексным методом

Определить мгновенные и действующие значения токов во всех ветвях цепи, у которой  $C = 200 \text{ мкФ}$ ,  $L = 10 \text{ мГн}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $u = 12\sin(314t + \pi/6)$ .



1. Вычислим индуктивное и емкостное сопротивления, включенные в параллельно соединенные ветви:

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3,14 \text{ Ом}; \quad X_C = 1/\omega C = 10^6 / (314 \cdot 200) = 15,92 \text{ Ом}.$$

2. Изобразим синусоидальное входное напряжение и параметры реактивных элементов  $L$  и  $C$  комплексными числами:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\frac{\pi}{6}} = 12 e^{j\frac{\pi}{6}}; \quad jX_L = j\omega L = j314 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j3,14 \text{ Ом};$$

$$-jX_C = -j/\omega C = \frac{-j}{314 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = -j15,92 \text{ Ом}.$$

Рис. 9.2 К примеру расчета цепей комплексным методом

3. Используя закон Ома в комплексной форме, составим уравнение для определения комплексной амплитуды тока на входе цепи:

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m / \underline{Z},$$

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R_1 + \frac{-jX_C(R_2 + jX_L)}{R_2 + jX_L - jX_C} = R_1 + \frac{X_C X_L - jX_C R_2}{R_2 + j(X_L - X_C)} = 10 + \frac{50 - j159}{10 - j12,76} = \\ &= 19,6 - j3,6 \text{ Ом} \end{aligned}$$

4. Определим амплитуду и действующее значение комплексного тока на входе цепи:

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= \frac{12 e^{j\frac{\pi}{6}}}{19,6 - j3,6} = \frac{12 e^{j\frac{\pi}{6}}}{20 e^{-j\frac{\pi}{18}}} = 0,6 e^{j\frac{\pi}{4,5}} = 0,6 (\cos 40^\circ + j \sin 40^\circ) = \\ &= \sqrt{2} (0,33 + j0,28) \text{ А.} \end{aligned}$$

$$\underline{I} = 0,33 + j0,28 = 0,43 e^{j\pi/4} \text{ А.}$$

5. Преобразуем амплитуду комплексного тока на входе цепи в мгновенное значение синусоидального тока:

$$i = \underline{I}_m \sin(314t + \psi_i) = 0,6 \sin(314t + \pi/4,5) \text{ А.}$$

6. Комплексное действующее значение напряжения на резисторе  $R_1$

$$\underline{U}_{R_1} = \underline{I} \cdot R_1 = (0,33 + j0,28) \cdot 10 = 3,3 + j2,8 \text{ В.}$$

7. Комплексное действующее значение напряжения на участке разветвления цепи

$$\underline{U}_{23} = \underline{I} \underline{Z}_{23} = (0,33 + j0,28) - (9,6 - j3,6) = 4,18 + j1,5 \text{ В.}$$

8. Комплексное действующее значение токов в ветвях, соединенных параллельно:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{(4,18 + j1,5)}{-j15,92} = -0,094 + j1,5 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{(4,18 + j1,5)}{10 + j3,14} = 0,42 + j0,018 \text{ А.}$$

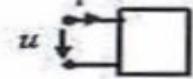
9. Действующие и мгновенные значения токов в ветвях, соединенных параллельно:

$$I_2 = \sqrt{0,094^2 + 0,264^2} = 0,28 \text{ А; } i_2 = \sqrt{2} \cdot 0,28 \sin(314t + \arctg \frac{0,264}{-0,094}) = \\ = 0,395 \sin(314t - 0,531\pi) \text{ А;}$$

$$I_3 = \sqrt{0,42^2 + 0,018^2} = 0,42 \text{ А; } i_3 = \sqrt{2} \cdot 0,42 \sin(314t + \arctg \frac{0,42}{0,018}) = \\ = 0,594 \sin(314t + 0,486\pi) \text{ А.}$$

## *Задачи для самопроверки*

1) Дано:  $u = 141 \sin(628t + 120^\circ)$  В;  
 $i = 14,1 \sin(628t + 30^\circ)$  А.



Определите, какая это цепь:

1. 2. 3. 4. 5.

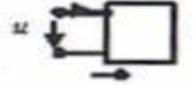
2) Дано:  $u = 100 \sin(942t - 140^\circ)$  В;  
 $i = 10 \sin(942t - 50^\circ)$  А.



Какова векторная диаграмма цепи?

1. 2. 3. 4. 5.

3) Дано:



Какая это цепь?

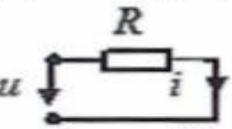
1. 2. 3. 4. 5.

4) Дана векторная диаграмма цепи. Укажите, какая это цепь?



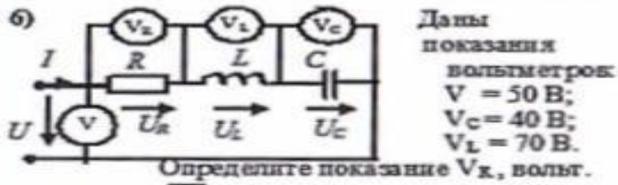
1. 2. 3. 4. 5.

5) Дано:  $u = 2 \sin(\omega t + 60^\circ)$  В;



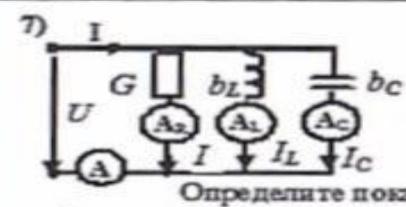
Какова начальная фаза напряжения в градусах?

1. 0 2. -30 3. 30 4. 60 5. -60



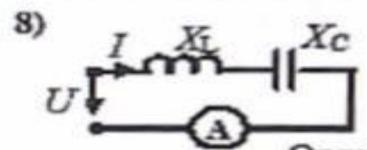
Даны показания вольтметров:  
 $V = 50$  В;  
 $V_C = 40$  В;  
 $V_L = 70$  В.

- Определите показание  $V_x$ , вольт.  
 1. 100 2.  $\sqrt{50}$  3. 40 4. 50 5. 30



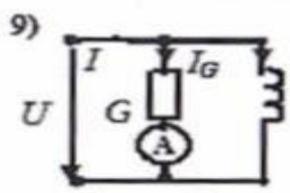
Даны показания амперметров:  
 $A = 10$  А;  
 $A_C = 12$  А;  
 $A_C = 4$  А.

- Определите показание  $A_x$  ампер.  
 1. 4 2. 6 3. 8 4. 10 5. 12



Дано:  
 $U = 10$  В;  
 $X_L = 6$  Ом;  
 $X_C = 8$  Ом.

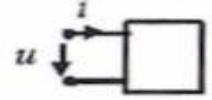
- Определите показание амперметра, ампер.  
 1. 2 2. 3 3. 4 4. 5 5. 6



Дано:  
 $U = 20$  В;  
 $b_L = 0,4$  См;  
 $y = 0,5$  См.

- Определите показание амперметра, ампер.  
 1. 8 2. 7 3. 6 4. 5 5. 4

10) Дано:  $u = 100 \sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ)$  В;



$i = 1 \sqrt{2} \sin(\omega t - 40^\circ)$  А.  
 Определите реактивное сопротивление в омах.

1. 100 2. 87 3. 50 4. 40 5. 30

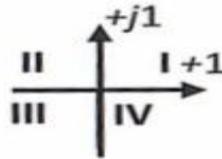
11. Дано:  $I = 5e^{j53^\circ}$  А.

Какова алгебраическая форма записи тока?

- 1)  $5 \cos 53^\circ - j5 \sin 53^\circ$ ;
- 2)  $5 + j53$ ;
- 3)  $5 \sin 53^\circ + j5 \cos 53^\circ$ ;
- 4)  $5 \cos 53^\circ + j5 \sin 53^\circ$ ;
- 5)  $5 \sin 53^\circ - j5 \cos 53^\circ$ .

12. Дано:  $\underline{U} = (30 + j40)$  В.

В каком квадранте комплексной плоскости находится вектор напряжения?



- 1) I; 2) II; 3) III; 4) IV

13. Дан комплексный ток  $I = 10e^{j30^\circ}$  А.

Найдите соответствующую ему синусоиду тока.

- 1)  $10 \sin(\omega t + 30^\circ)$ ;
- 2)  $10 \sin(\omega t - 30^\circ)$ ;
- 3)  $14,1 \sin 30^\circ$ ;
- 4)  $14,1 \sin(\omega t - 30^\circ)$ ;
- 5)  $14,1 \sin(\omega t + 30^\circ)$ .

14. Дана комплексная проводимость цепи  $\underline{Y} = (0,7 - j0,8)$  См.

Укажите, какая это цепь?

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

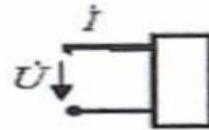
16. Дано:  $\dot{I} = (-80 - j60)$  А.

Какова показательная форма записи тока?

- 1)  $\sqrt{80^2 + 60^2} e^{j[180^\circ + \arctg(3/4)]}$ ;
- 2)  $\sqrt{80^2 + 60^2} e^{j[180^\circ - \arctg(3/4)]}$ ;
- 3)  $\sqrt{80^2 + 60^2} e^{j \arctg(3/4)}$ ;
- 4)  $\sqrt{80^2 + 60^2} e^{-j \arctg(3/4)}$ .

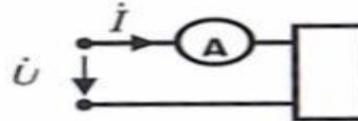
17. Дано:  $\underline{U} = 60e^{j80^\circ}$  В;  $\underline{I} = 2e^{j120^\circ}$

Определите активное сопротивление цепи в Ом.



- 1)  $30 \cos 60^\circ$ ; 2)  $30 \sin 60^\circ$ ;
- 3)  $30 \sin 80^\circ$ ; 4)  $30 \sin 20^\circ$ ;
- 5)  $30 \cos 80^\circ$ .

18. Дано:  $\underline{U} = 120e^{j65^\circ}$  В;  $\underline{Z} = 2e^{j15^\circ}$  Ом.

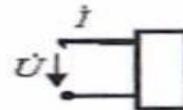


Определите показания амперметра.

- 1) 20 А; 2) 40 А; 3) 60 А; 4) 80 А;
- 5) 120 А

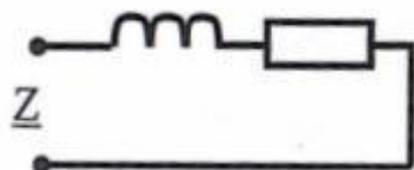
19. Дано:  $\underline{U} = 100e^{j70^\circ}$  В;  $\underline{I} = 10e^{j40^\circ}$

Определите реактивную проводимость цепи в См.



- 1)  $0,1 \cos 40^\circ$ ; 2)  $0,1 \sin 30^\circ$ ;
- 3)  $0,1 \cos 70^\circ$ ; 4)  $0,1 \sin 70^\circ$ ; 5) 0,1.

15. Дано:  $R = 3 \text{ Ом}$ ;  $X = 4 \text{ Ом}$ .

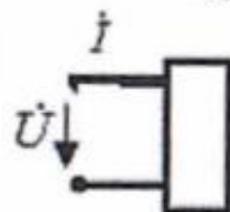


Укажите комплексное сопротивление цепи  $Z$ , Ом:

- 1)  $4 + j3$ ; 2)  $4 - j3$ ; 3)  $3 + j4$ ;  
4)  $3 - j4$ ; 5)  $j7$

20. Дано:  $\underline{U} = 80e^{-j120^\circ}$ ;

$$\dot{I} = 3e^{-j50^\circ} \text{ A.}$$



Определите реактивную мощность цепи, В · А:

- 1)  $540 \sin 120^\circ$ ; 2)  $540 \cos 120^\circ$ ;  
3)  $540 \sin 50^\circ$ ; 4)  $540 \cos 70^\circ$ ;  
5)  $540 \sin 70^\circ$ .

Ответ

ы:

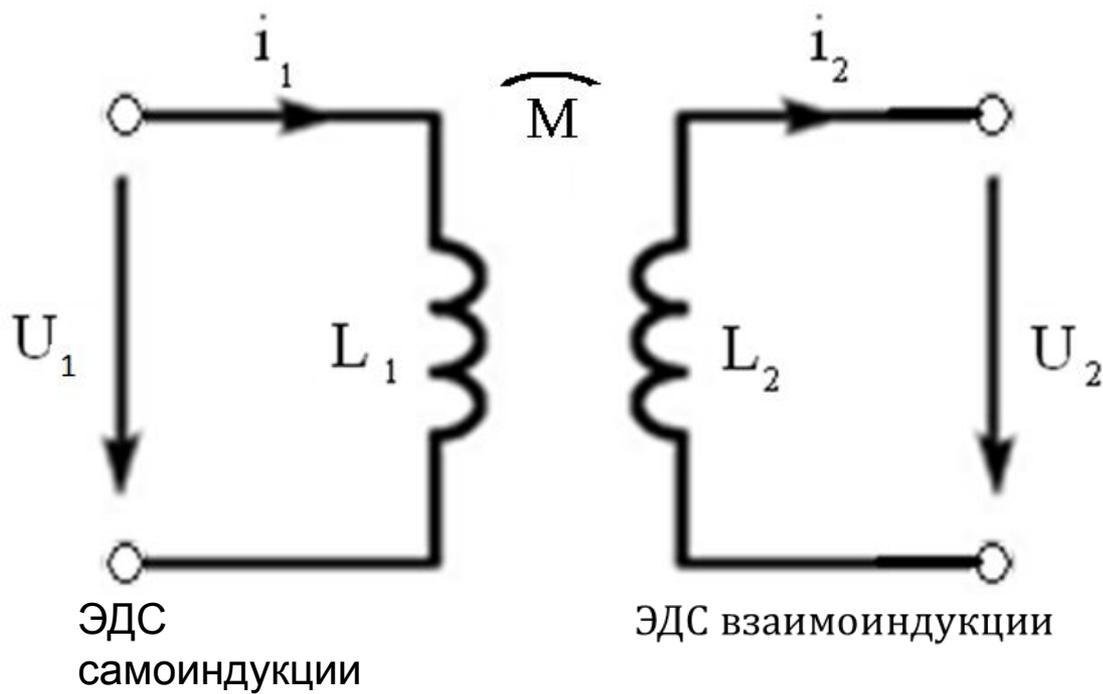
**Правильные ответы**

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер правильного ответа	1	2	5	2	4	5	4	1	1	3

Номер вопроса	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер правильного ответа	4	2	3	4	3	1	1	3	2	5

# III Цепи с индуктивно-связанными катушками

Связь электрических цепей посредством магнитного поля называется *индуктивной*.



$$e_{11} = -L_1 \frac{di_1}{dt}; \quad e_{21} = -M \frac{di_1}{dt}; \quad M = \Psi_{12}/i_2 = \Psi_{21}/i_1 \text{ - взаимная индуктивность}$$

$$e_{22} = -L_2 \frac{di_2}{dt}; \quad e_{12} = -M \frac{di_2}{dt}; \quad K_{21} = e_{21}/e_{11} = M/L_1; \quad K_{12} = e_{12}/e_{22} = M/L_2; \quad \text{- Степень связи}$$

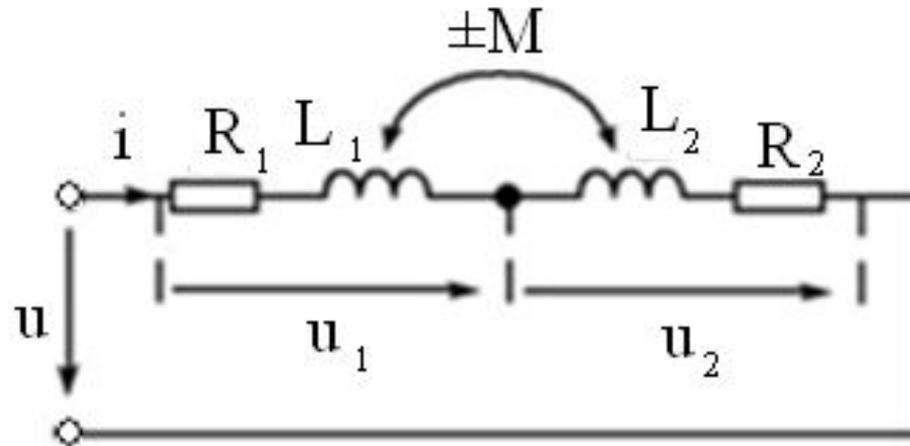
$$K = \sqrt{K_{21} \cdot K_{12}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \text{ - коэффициент связи}$$

$$e_1 = e_{11} + e_{12}; \quad e_2 = e_{22} + e_{21} \text{ - согласное включение;}$$

$$e_1 = e_{11} - e_{12}; \quad e_2 = e_{22} - e_{21} \text{ - встречное включение;}$$

$$e_2 = e_{11} \pm e_{12}; \quad e_2 = e_{22} \pm e_{21}$$

Рис. 3.1. Индуктивная связь. Степень и коэффициенты связи



$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ . - По второму закону Кирхгофа,  
т.е.:

$$\underline{U}_1 = R_1 i - e_1 = R_1 i - (e_{11} \pm e_{12}) = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt}$$

$$\underline{U}_2 = R_2 i - e_2 = R_2 i - (e_{22} \pm e_{21}) = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt}$$

$$\underline{U} = R_2 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} \pm j\omega M \underline{I} + R_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I} = (R_3 + jx_3) \underline{I},$$

$$R_3 = R_1 + R_2; x_3 = \omega L_3; L_3 = L_1 + L_2 \pm 2M,$$

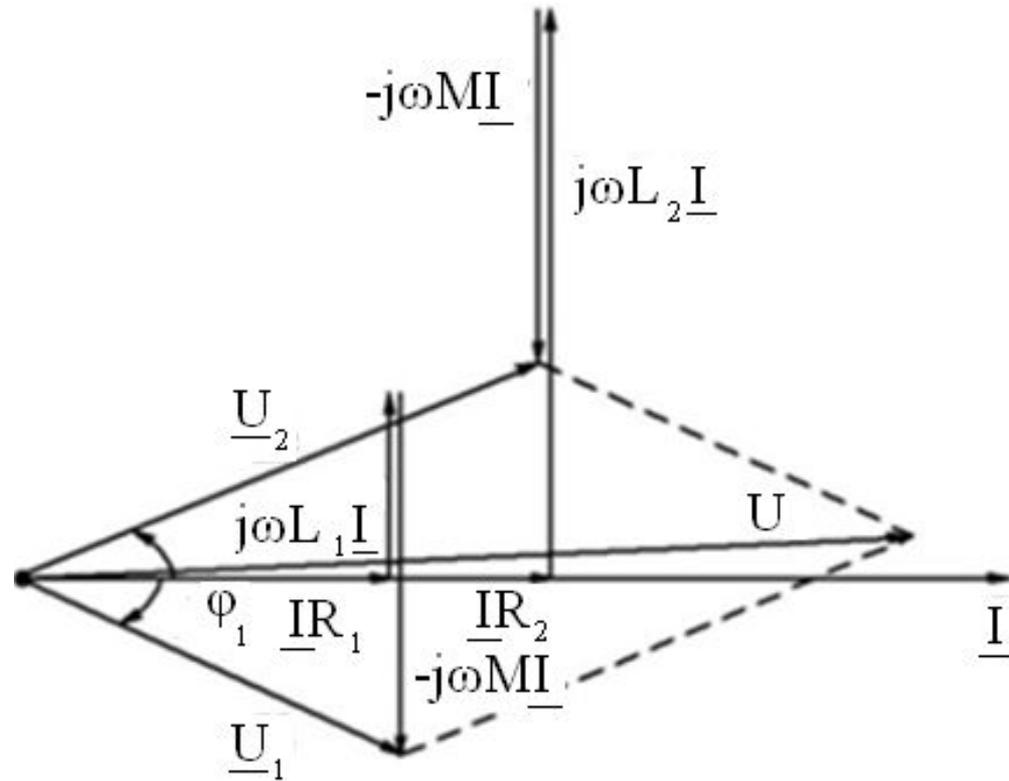
$$L_{3c} = L_1 + L_2 + 2M; L_{3e} = L_1 + L_2 - 2M,$$

$$M = \frac{L_{3c} - L_{3e}}{4}$$

$$K = M / \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

$$M = K \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} < \sqrt{L_1 \cdot L_2}.$$

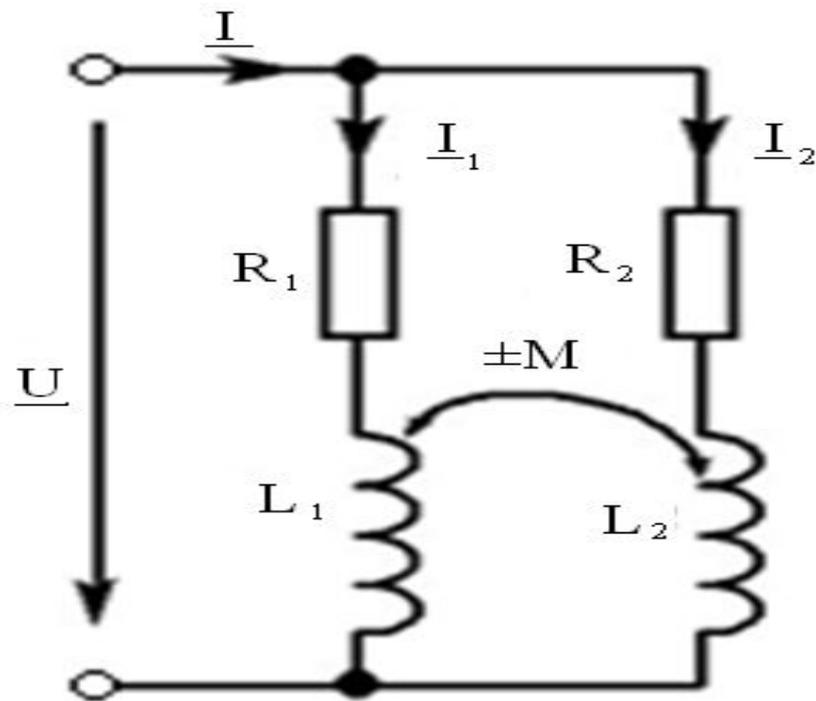
Рис. 3.2. Последовательное включение двух индуктивно-связанных катушек «L1-R1» и «L2-R2»



$$L_2 > M > L_1$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} - j\omega M \underline{I} \\ \underline{U}_2 = R_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} - j\omega M \underline{I} \end{cases}$$

Рис. 3.3. Векторная диаграмма для случая  $L_2 > M > L_1$  при встречном включении последовательно соединенных катушек («ложная емкость»)



$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1 \end{aligned}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{z_1 \pm z_2 z_M}{z_1 z_2 - z_M^2} U,$$

$$\text{где: } \underline{z}_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad \underline{z}_2 = R_2 + j\omega L_2; \\ \underline{z}_M = j\omega M$$

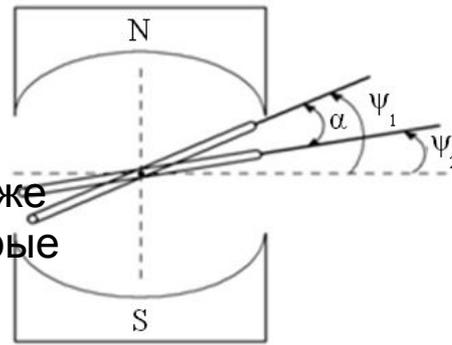
Рис. 3.4. Параллельное соединение индуктивных катушек «L1-R1» и «L2-R2»

## IV. Судовые трехфазные электрические цепи

# 1. Понятие о многофазных цепях и системах

### Определение 1.

Если один источник создает несколько синусоидальных ЭДС, имеющих одну и ту же частоту, но сдвинутых по фазе на некоторые постоянные углы, то такой источник ЭДС называют *многофазным*, а совокупность



$$e_1 = E m_1 \sin(\omega t + \Psi_1)$$

$$e_2 = E m_2 \sin(\omega t + \Psi_2)$$

$e_2$  отстает от  $e_1$  на угол  $\alpha$

электрических цепей, в которых действует многофазный источник ЭДС, - *многофазной системой*

### Определение 2. цепей.

Совокупность синусоидальных токов (напряжений, ЭДС) одной частоты, сдвинутых относительно

друг друга по фазе, действующих в многофазной системе электрических цепей, называют

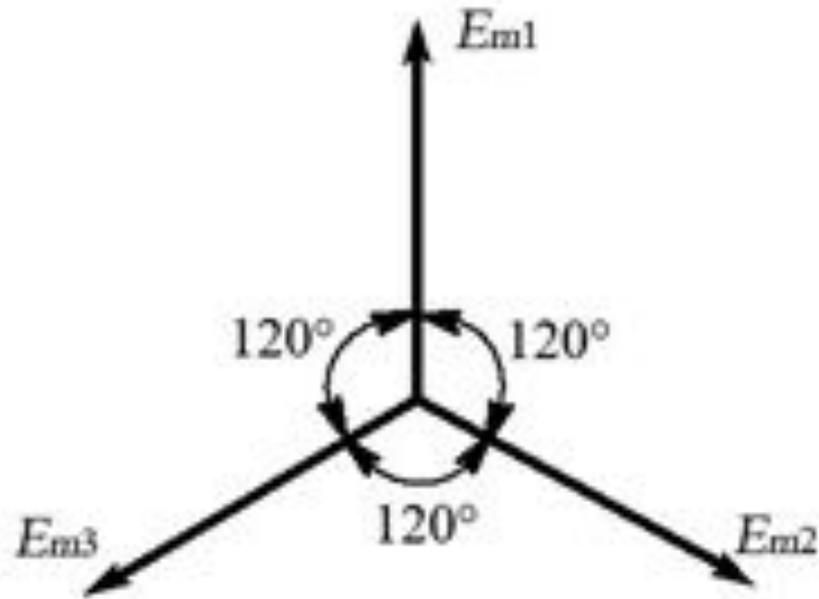
### Определение 3

многофазной системой токов.

Многофазную систему электрических цепей, в которой отдельные фазы электрически соединены друг с другом, называют *многофазной цепью*, а многофазную систему электрических токов, в которой отдельные токи равны по амплитуде и отстают по фазе друг относительно друга на углы  $2\pi/n$

( $n$  – число фаз) – *симметричной многофазной системой токов (напряжений, ЭДС)*.

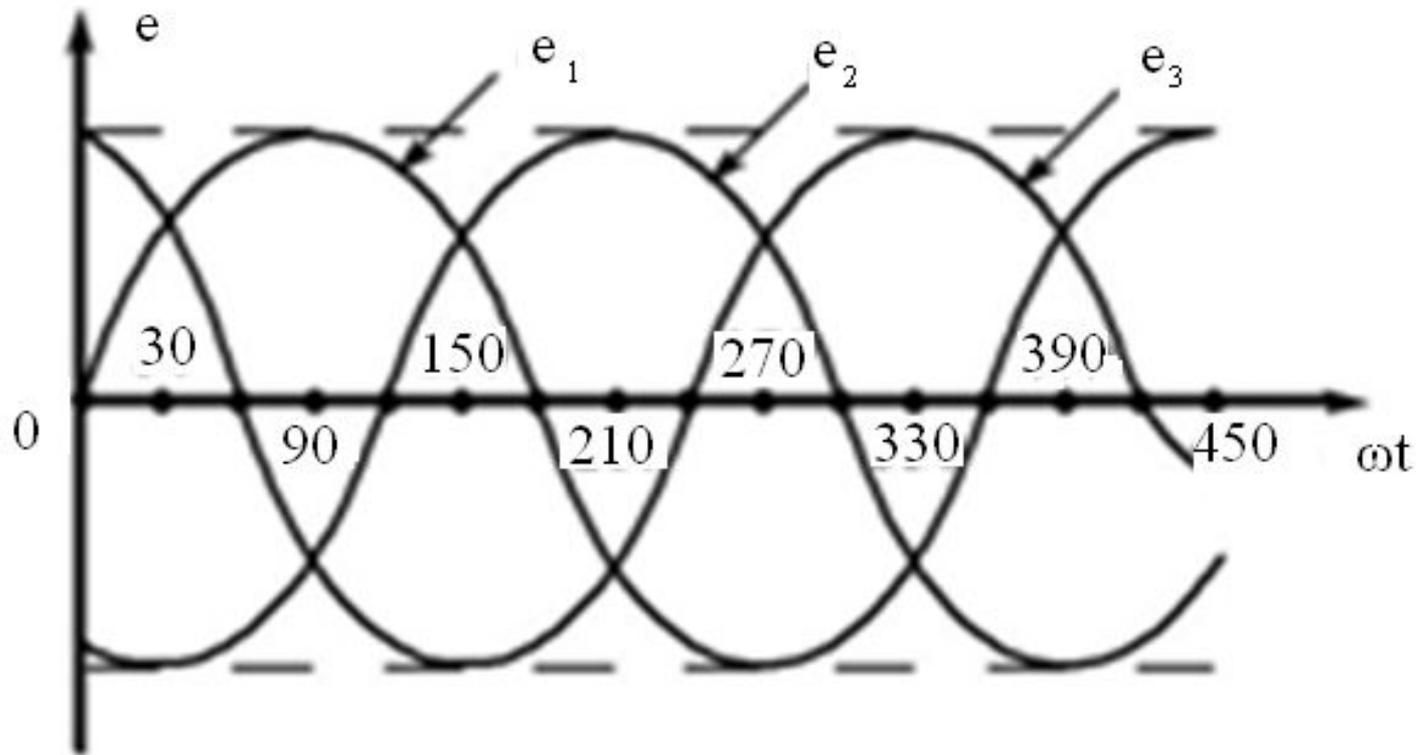
Рис. 4.1 Получение многофазных ЭДС



$$\begin{aligned}
 e_1 &= E_m \sin \omega t; & \Psi_1 &= 0, \\
 e_2 &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ) \\
 e_3 &= E_m \sin(\omega t + 120^\circ)
 \end{aligned}$$

$$E_{m1} + E_{m2} + E_{m3} = 0; \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

*Рис. 4.2 Векторная диаграмма ЭДС трехфазной симметричной цепи*

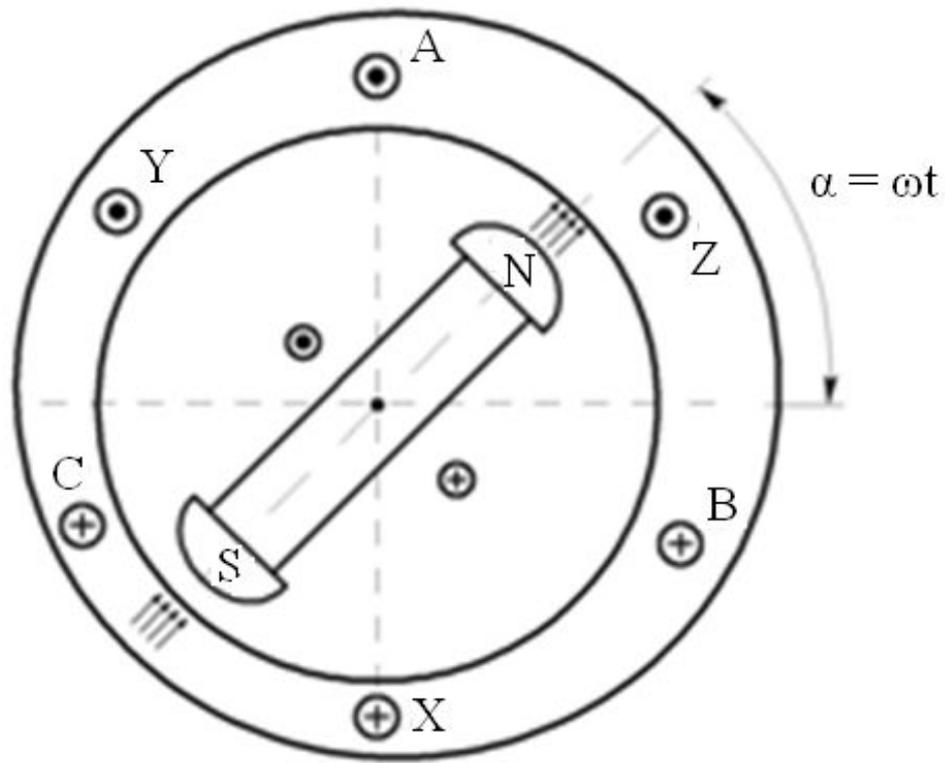


$$\begin{aligned} \underline{e}_A &= E_m \sin \omega t - \\ \underline{e}_B &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ желтый} \\ \underline{e}_C &= E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ зеленый} \end{aligned}$$

Комплексные амплитуды:  $E_A = E$ ;  $E_B = E e^{-j\frac{2\pi}{2}}$ ;  $E_C = E e^{-j\frac{4\pi}{2}} = E e^{j\frac{2\pi}{2}}$ , где  $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$  красный

Рис. 4.3 Изображение трехфазной системы ЭДС

## 2. Принципы получения трехфазной системы ЭДС



$e = 2wBLv$  где :  $e$ -ЭДС ;  $w$ -число витков в фазе ;

$L$ -длина активной части проводника

витка;

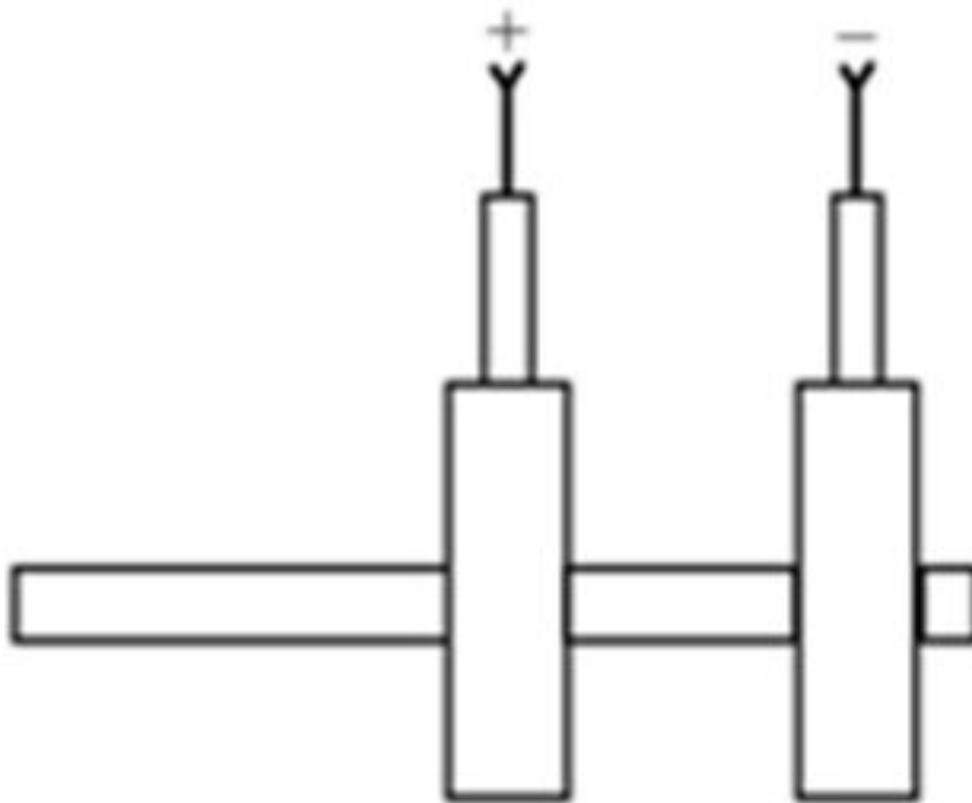
$B = B_m \sin \alpha = B_m \sin(\omega t + \Psi)$ ; - Мгновенное значение

$v$ - линейная скорость

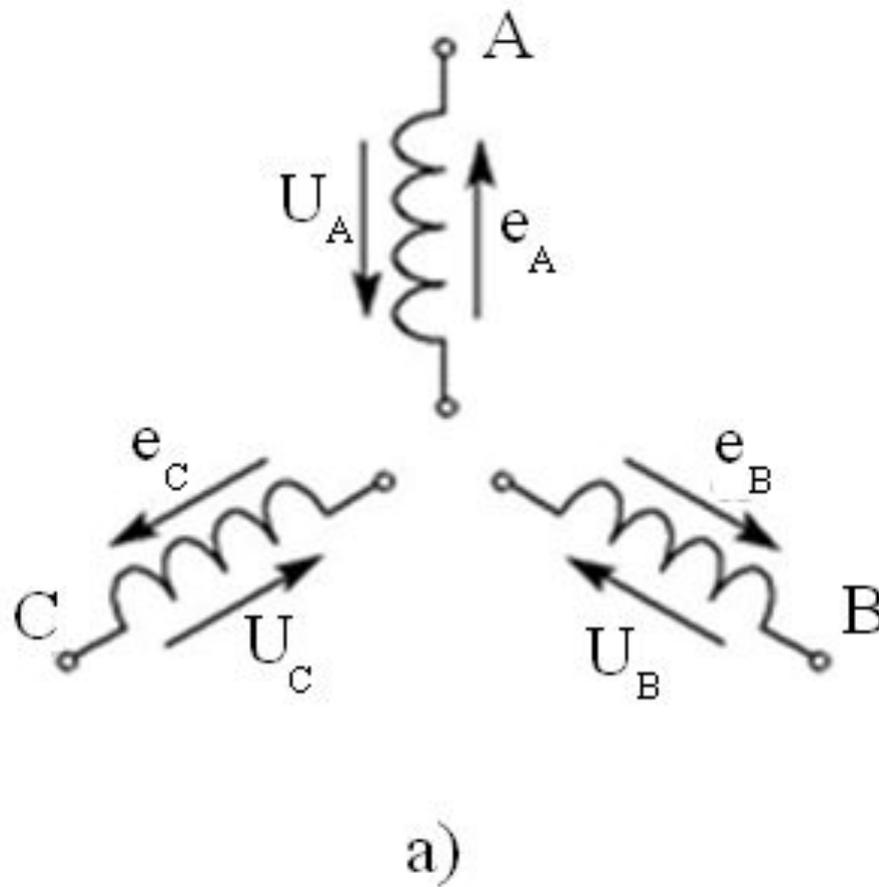
$e = 2wB_m l v \sin(\omega t + \psi) = E_m \sin(\omega t + \psi)$ , где :

$$E_m = 2WB_m lv;$$

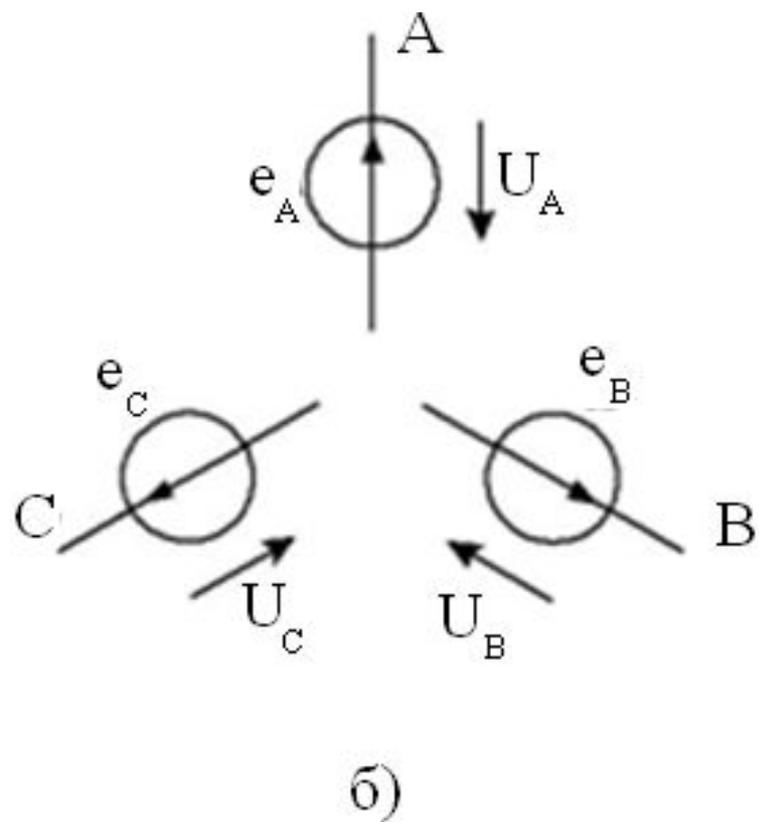
Рис. 4.4. Радиальный разрез модели трехфазного синхронного генератора



*Рис. 4.5. Щетки и кольца в системе возбуждения синхронного трехфазного генератора*

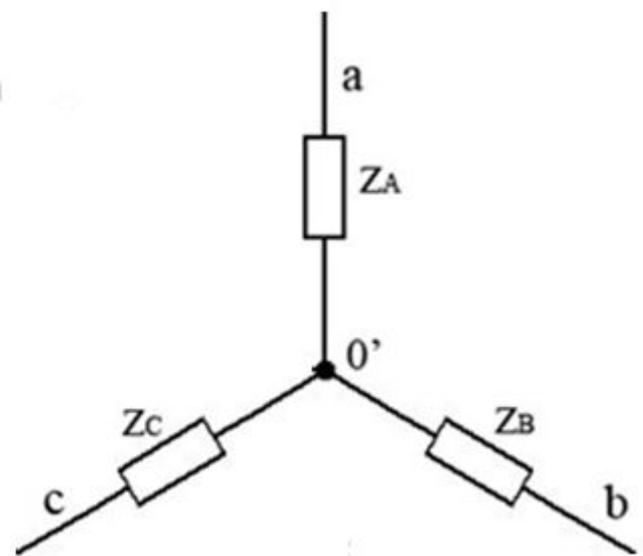
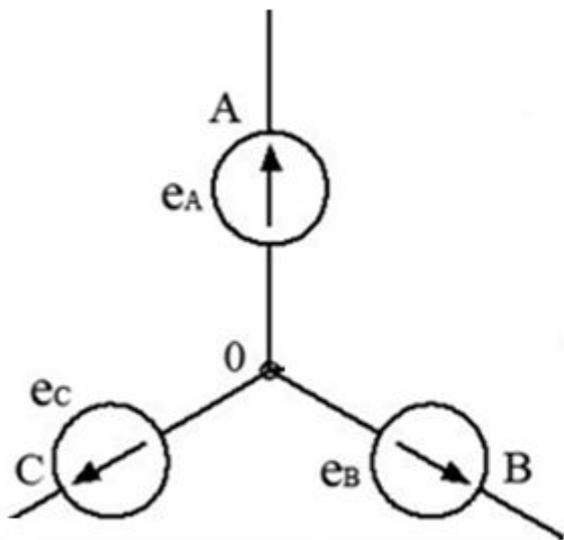


*Рис. 4.6. Условные обозначения трехфазного генератора  
а) - в виде трех обмоток.*



*Рис. 4.6. Условные обозначения трехфазного генератора  
б) - в виде трех источников ЭДС*

### 3. Соединение трехфазной системы звездой и треугольником



$$I_A + I_B + I_C = 0;$$

*Рис. 4.7. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены звездой*

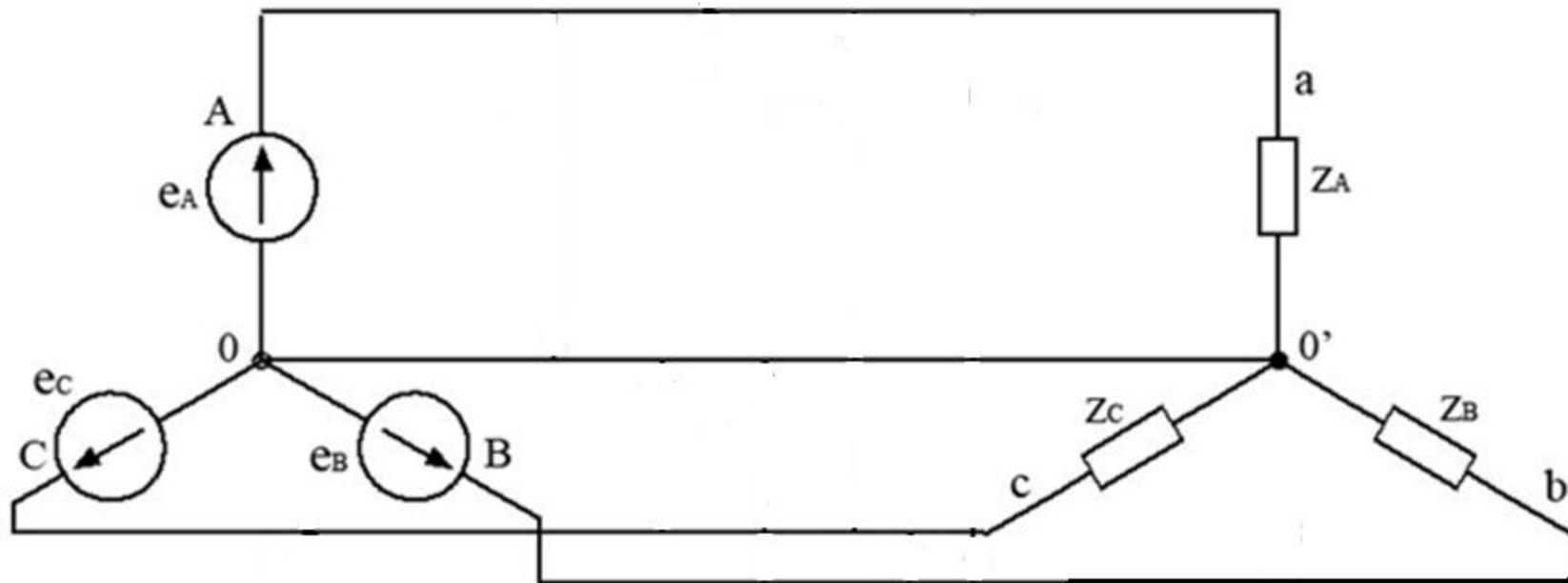


Рис. 4.7. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены звездой

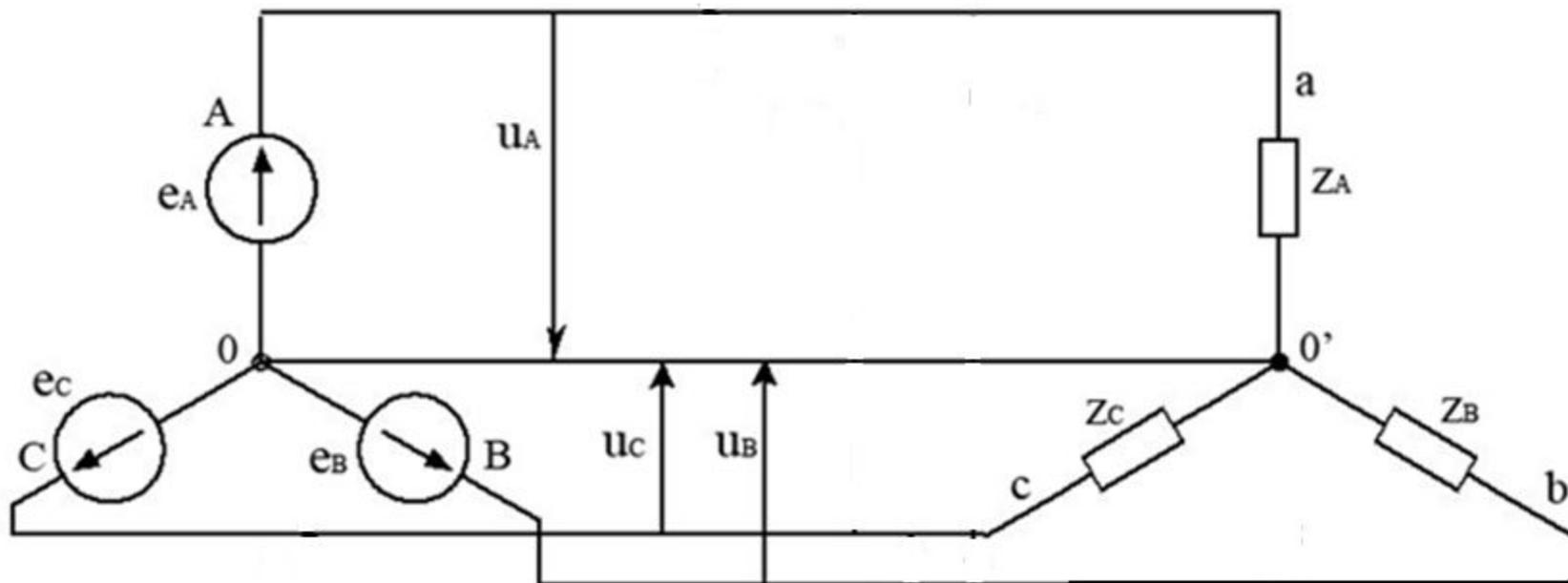
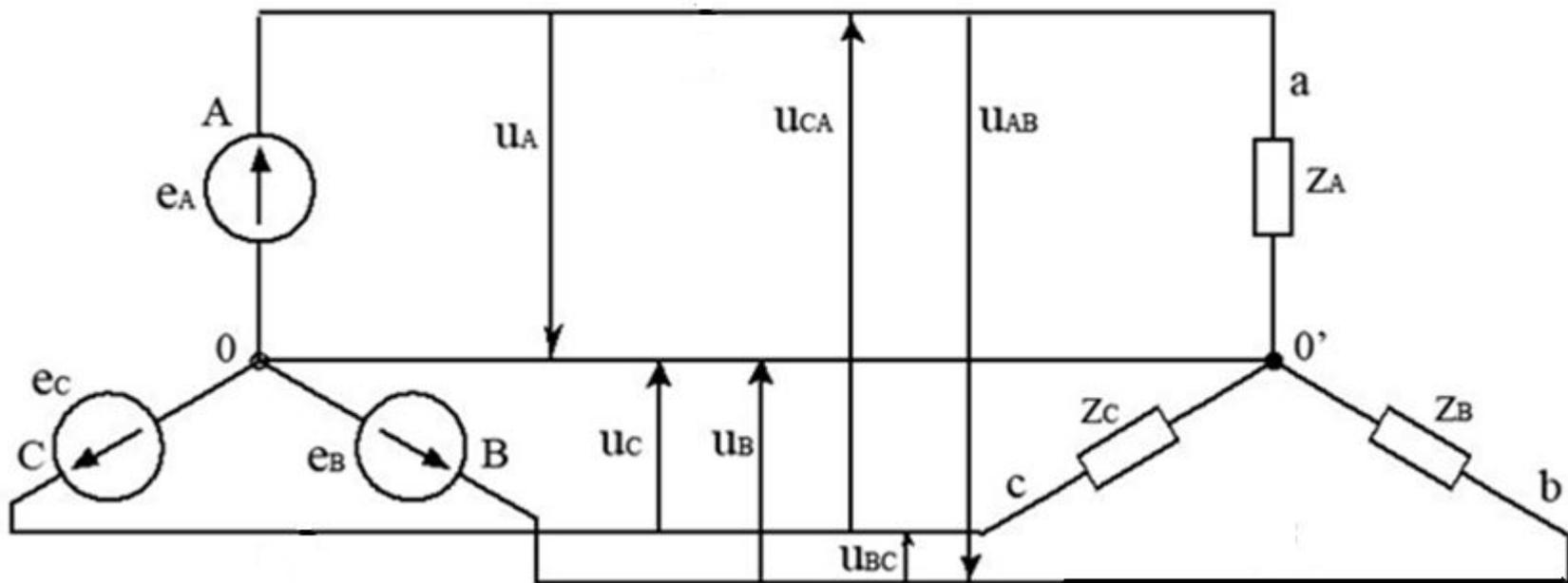


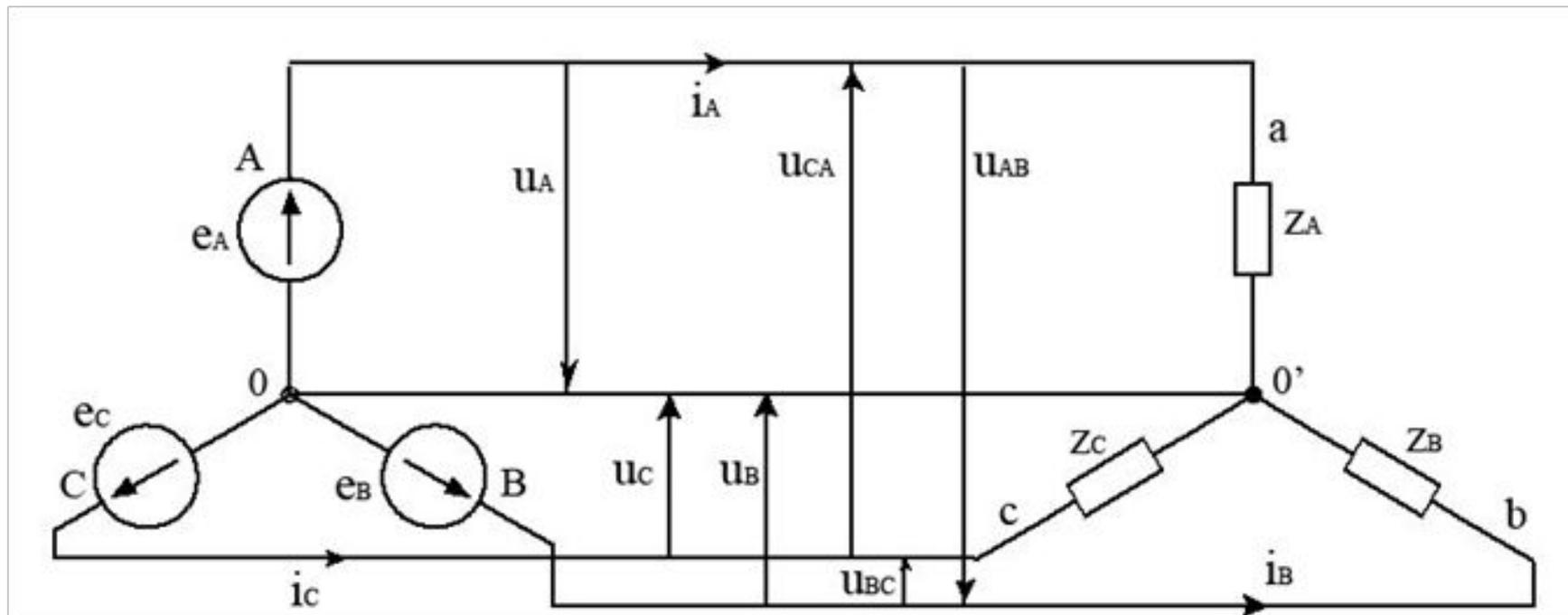
Рис. 4.7. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены звездой



Определение 4.

Напряжения между зажимами фаз и нейтральными точками, а так же токи в фазах генератора и потребителя называются *фазными*, а напряжение между линейными проводами – *линейными*.

*Рис. 4.7. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены звездой*



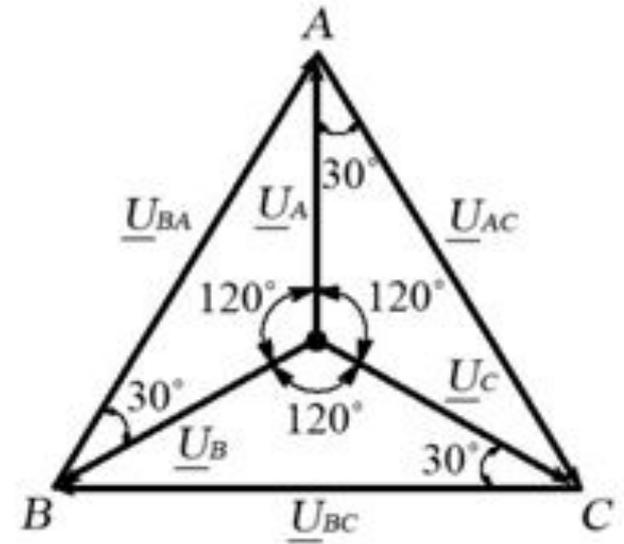
$$I_A + I_B + I_C = 0; I_0 = 0 \quad U_A = U_B = U_C = U_\Phi \quad U_{BC} = U_{CA} = U_{AB} = U_L$$

$$I_A + I_{CA} - I_{AB} = 0$$

$$I_B + I_{AB} - I_{BC} = 0$$

$$I_C + I_{BC} - I_{CA} = 0$$

Рис. 4.7. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены звездой



Из векторной диаграммы

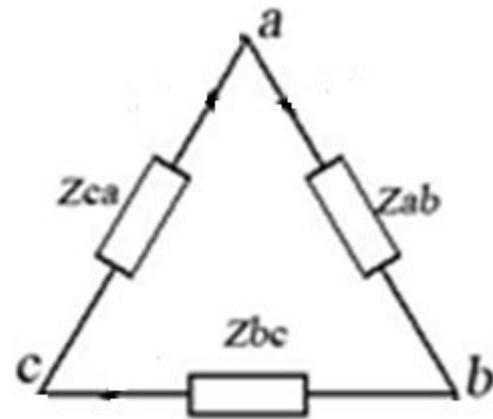
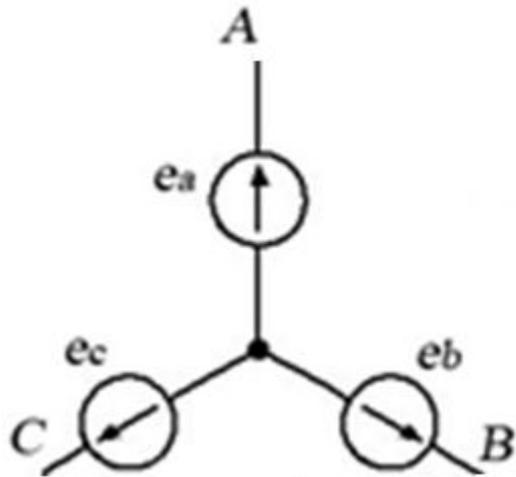
следует

$$\frac{1}{2} U_L = U_\Phi \cos 30^\circ \quad \text{или} \quad U_L = \sqrt{3} U_\Phi, \text{ т. к. } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

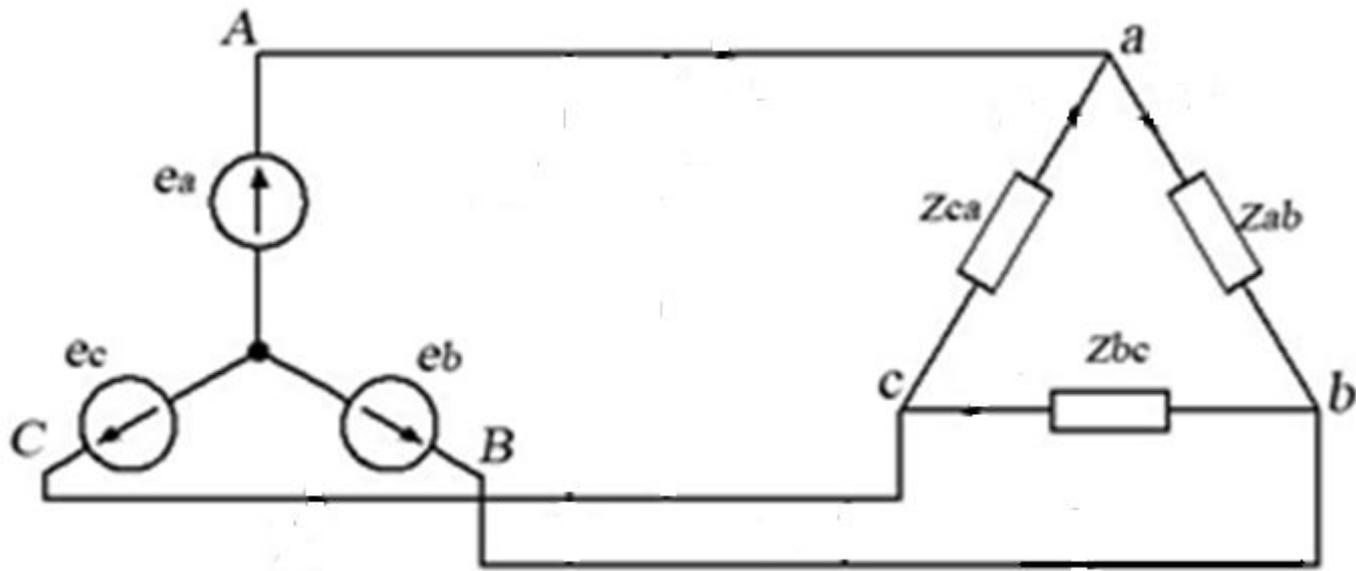
Вывод: В симметричной трехфазовой цепи при соединении фаз звездой действующие фазные и линейные токи равны друг другу, а напряжения отличаются друг от друга в  $\sqrt{3}$ . Благодаря этому в четырехпроводной цепи возможно дать потребителю два различных напряжения:

$$U_L / U_\Phi; 660 / 380, 380 / 220; 220 / 127 \text{ В.}$$

*Рис. 4.8 Векторная диаграмма напряжений при соединении цепи по схеме «звезда»*



*Рис. 4.8. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены треугольником*



*Рис. 4.8. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены треугольником*

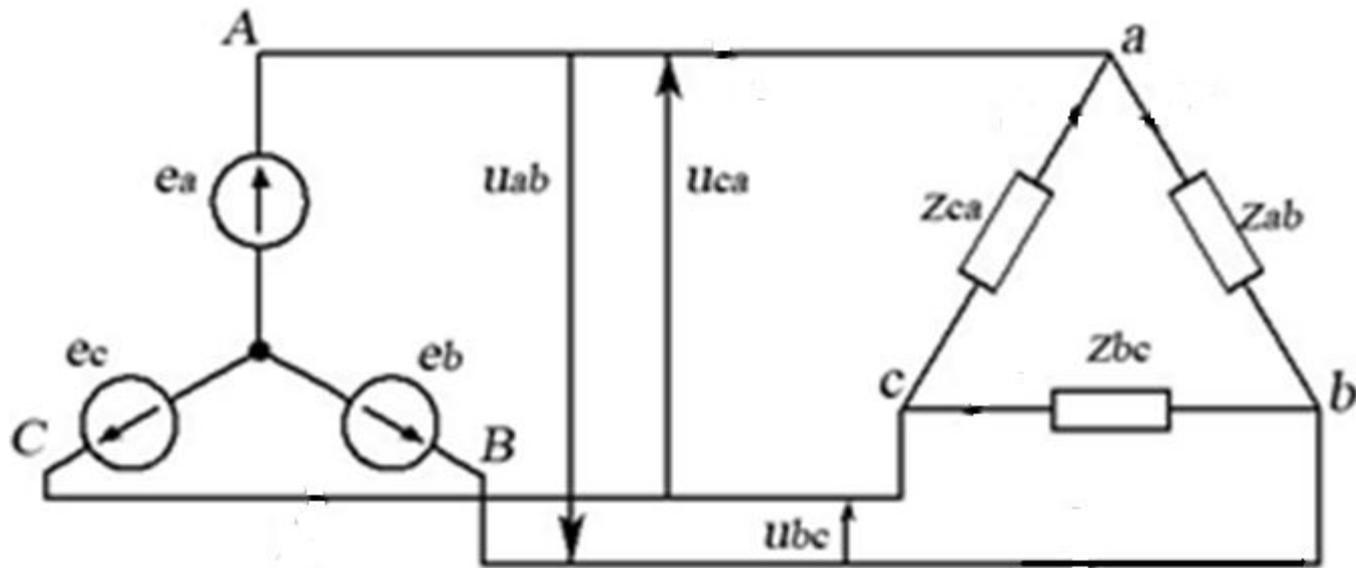


Рис. 4.8. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены треугольником

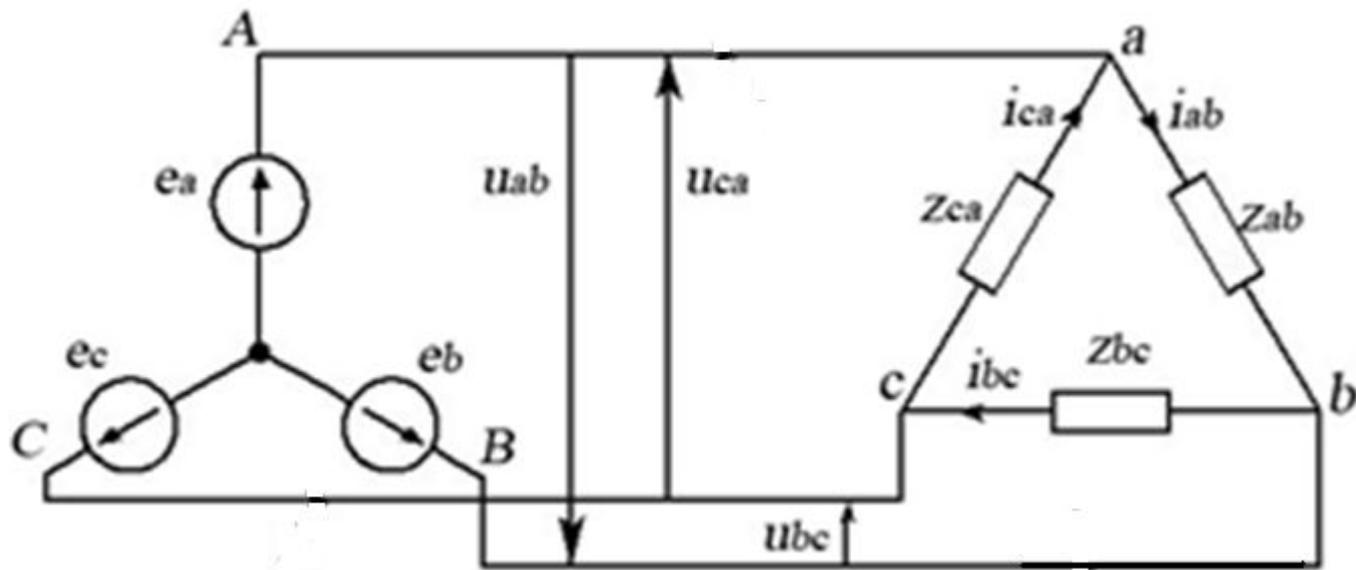


Рис. 4.8. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены треугольником

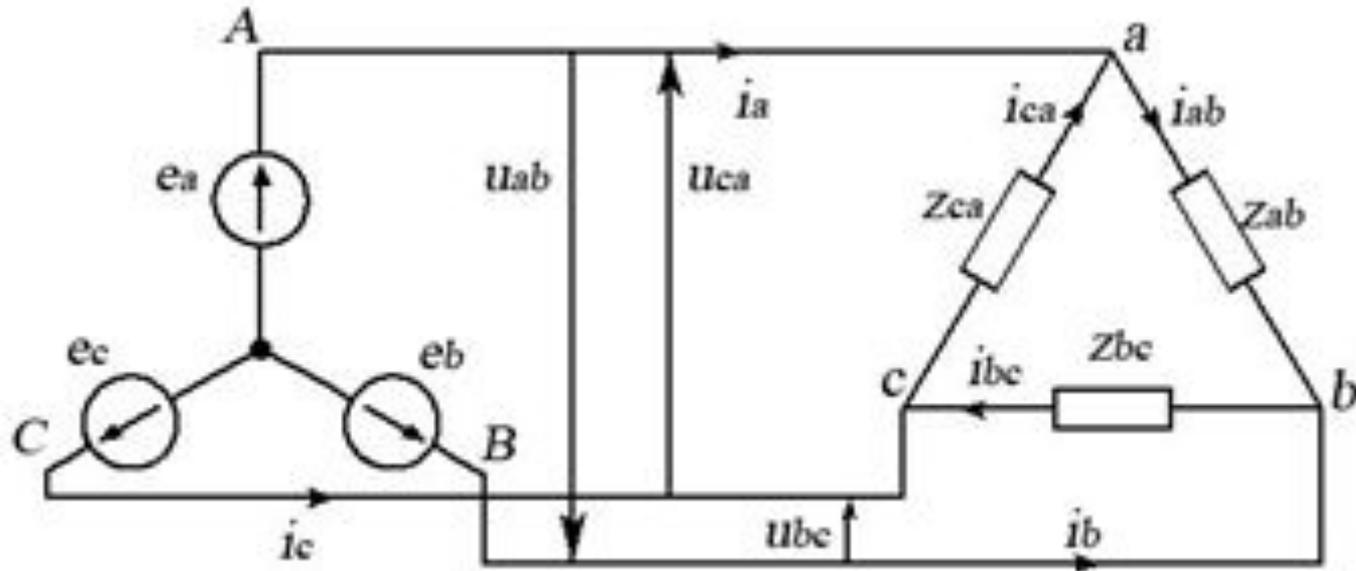


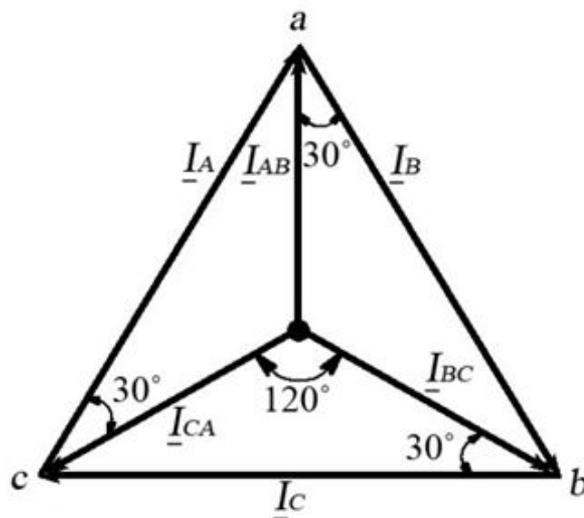
Рис. 4.9. Фазы нагрузки трёхфазной цепи соединены треугольником

$$\underline{I}_A + \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{AB} = 0;$$

$$\underline{I}_B + \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{BC} = 0;$$

$$\underline{I}_C + \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{CA} = 0,$$

$$U_\Phi = U_L$$



Из векторной диаграммы видно, что  $\frac{1}{2} I_L = I_\Phi \cos 30^\circ$  или  $I_L = \sqrt{3} I_\Phi$ .

*Вывод.*

*В симметричной трехфазовой цепи при соединении фаз нагрузки треугольником фазные и линейные*

*напряжения равны друг другу, а линейный ток в  $\sqrt{3}$  больше фазного.*

*Рис. 4.10 Векторная диаграмма токов при соединении цепи по схеме «треугольник»*

## 4. Мощность трехфазной цепи

При соединении нагрузки звездой:

#### 4.1 Мгновенная мощность

$$u_A = U_{Am} \sin(\omega t + \psi_{UA}); \quad i_A = I_{Am} \sin(\omega t + \psi_{iA});$$

$$u_B = U_{Bm} \sin(\omega t + \psi_{UB} - 120^\circ); \quad i_B = I_{Bm} \sin(\omega t + \psi_{iB} - 120^\circ);$$

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{UC} + 120^\circ); \quad i_C = I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{iC} + 120^\circ);$$

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C = U_A I_A \cos \varphi_A - U_A I_A \cos(2\omega t + \psi_{UA} + \psi_{iA}) + U_B I_B \cos \varphi_B - U_B I_B \cos(2\omega t + \psi_{UB} + \psi_{iB} - 240^\circ) + U_C I_C \cos \varphi_C - U_C I_C \cos(2\omega t + \psi_{UC} + \psi_{iC} + 240^\circ),$$

$$U_A = U_B = U_C; \quad I_A = I_B = I_C; \quad \psi_{UA} = \psi_{UB} = \psi_{UC}; \quad \psi_{iA} = \psi_{iB} = \psi_{iC}; \quad \varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi.$$

$P = 3 U_{\neq} I_{\neq} \cos \varphi = \text{const.}$  - Симметричная трехфазовая нагрузка потребляет из сети неизменную мгновенную мощность и генератор отбирает от первичного двигателя неизменную мгновенную мощность.

#### 4.2. Активная мощность

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C,$$

$$P = 3 P_{\neq} = 3 U_{\neq} I_{\neq} \cos \varphi_{\neq}$$

$$P = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi_{\neq},$$

#### 4.3. Реактивная мощность

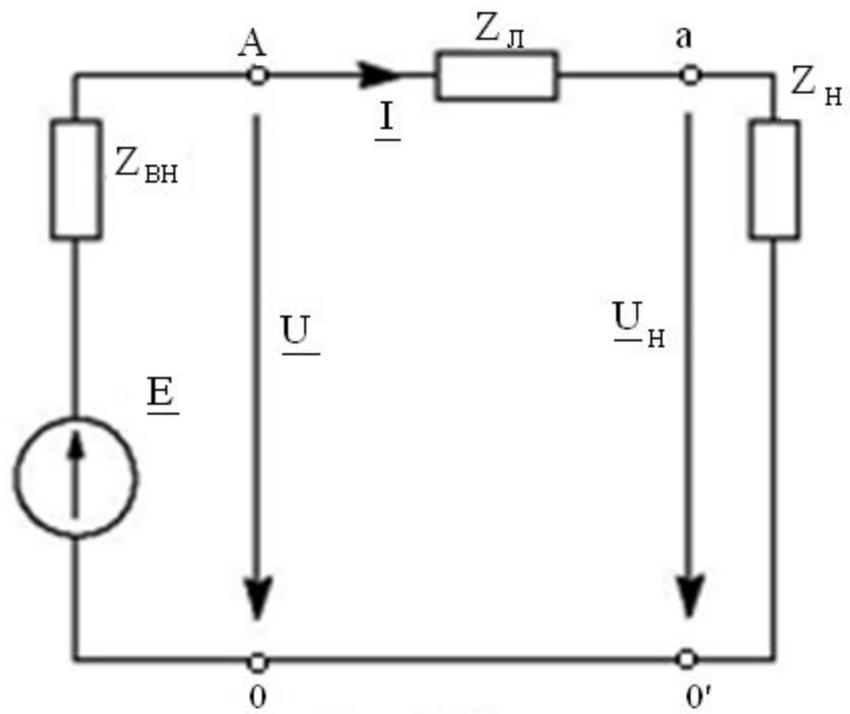
$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C,$$

$$Q = 3 Q_{\neq} = 3 U_{\neq} I_{\neq} \sin \varphi_{\neq} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi_{\text{Л}}$$

#### 4.4. Полная мощность

$$S = 3 U_{\neq} I_{\neq} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}}$$

## 5. Расчет трехфазных цепей



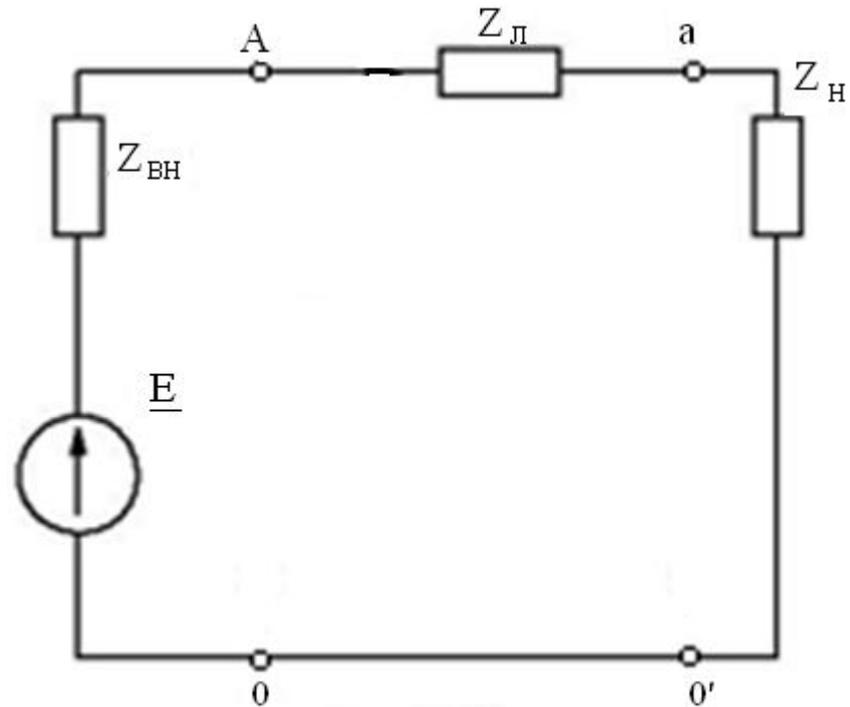
*Рис. 4.11 К расчету трехфазных цепей*

При соединении симметричной трехфазовой цепи звездой (источник и нагрузка)

$$I = \frac{E}{Z_{\Sigma}}$$

$$U = E - IZ_{BH}; U_H = IZ_H$$

$$Z_{\Sigma} = Z_{BH} + Z_H + Z_{\Pi}$$



*Рис. 4.11 К расчету трехфазных цепей*

## 6. Примеры расчета трехфазных цепей

$$U_{\text{л}} = 125\text{В.}$$

$$R_{AB} = 10\ \text{Ом.}$$

$$R_{BC} = R_{CA} = 15\ \text{Ом.}$$

---

$U_{\text{приёмников}} - ?$

$$I_{AB} = I_{BC} = \frac{U_{AC}}{R_{AB} + R_{BC}} = \frac{125}{25} = 5\text{А};$$

$$U_{AB} = I_{AB} R_{AB} = 5 \cdot 10 = 50\text{В};$$

$$U_{BC} = I_{BC} R_{BC} = 5 \cdot 15 = 75\text{В};$$

$$U_{CA} = 125\ \text{В};$$

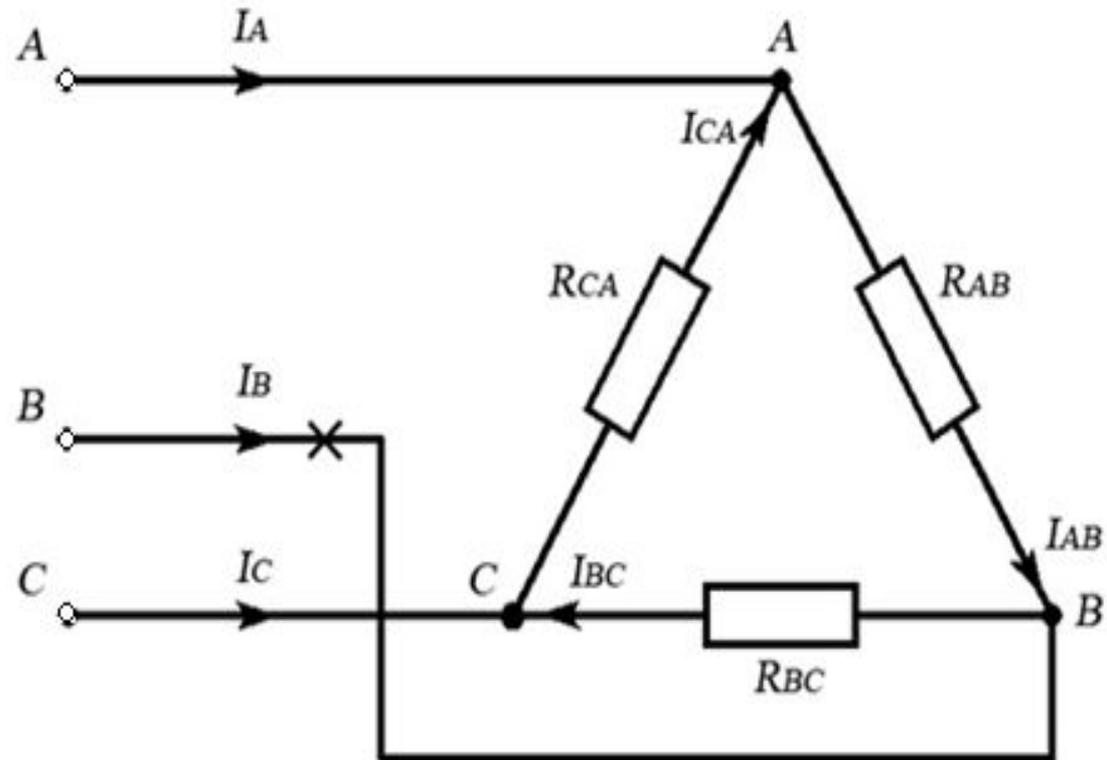


Рис. 4.12 Пример расчета трехфазной цепи при обрыве фазы B

$$U_{\Phi} = 220\text{В.}$$

$$Z_A = Z_B = R_A = 22\ \text{Ом};$$

$$Z_C = R_C = 44\ \text{Ом.}$$

---


$$I_0 - ?$$

$$I_A = I_B = \frac{U_{\Phi}}{Z_A} = \frac{220}{22} = 10\ \text{А}$$

$$I_C = \frac{U_{\Phi}}{Z_C} = \frac{220}{44} = 5\ \text{А.}$$

$$I_0 = 5\ \text{А. } \varphi = 60^\circ$$

$$I_A + I_B + I_C = I_0$$

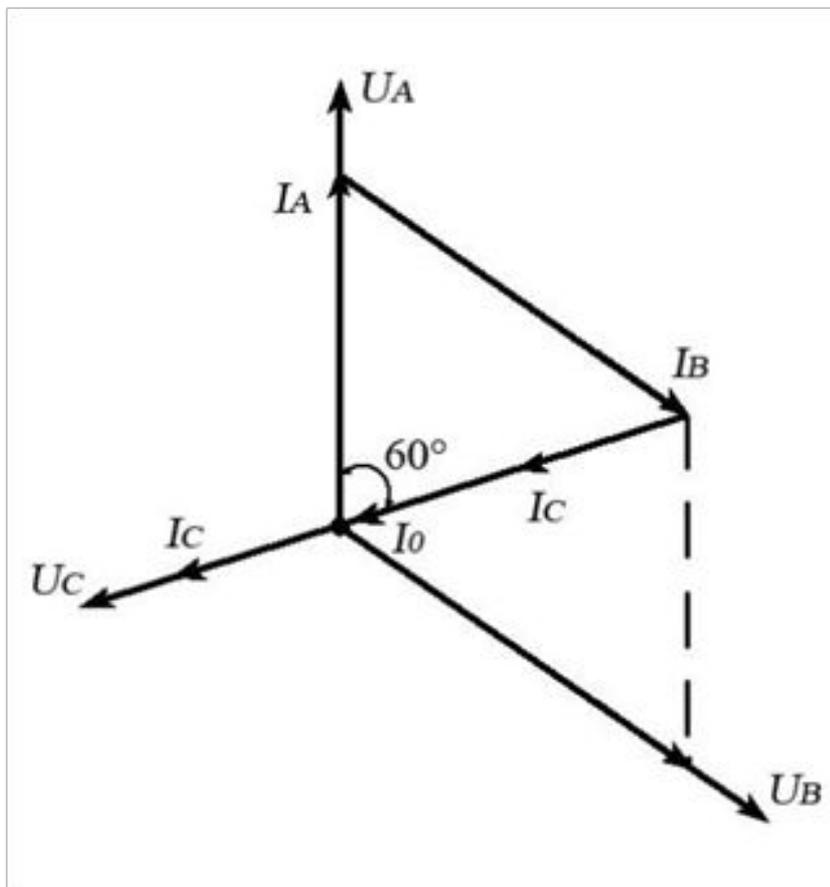


Рис. 4.13 Определение величины тока в нулевом проводе

$$R_{\phi} = 3 \text{ Ом}; L_{\phi} = 95 \text{ мГн};$$

$$C_{\phi} = 122 \text{ мкФ}; U_{л} = 20 \text{ В}$$

$$f = 50 \text{ Гц}$$

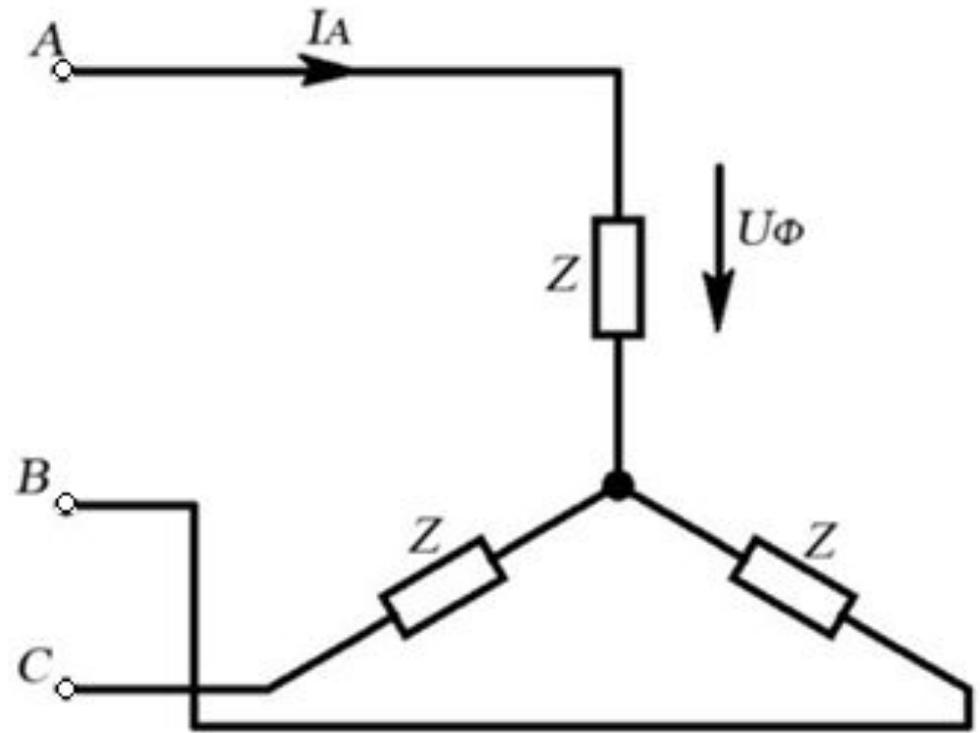
---


$$I_A, I_{\phi}, S, P, \varphi - ?$$

$$U_{\phi} = \frac{U_{л}}{\sqrt{3}}; \quad I_{\phi} = I_{л}$$

$$U_{\phi} = \frac{20}{1,73} = 11,6 \text{ В};$$

$$Z = \sqrt{R_{\phi}^2 + (x_L - x_C)^2} \text{ (Ом)}$$



$$x_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 97 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ Ом}; \quad x = x_L - x_C L = -8 \text{ Ом}.$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 122 \cdot 10^{-6}} = 38 \text{ Ом};$$

*Рис.4.14 Расчет трехфазной цепи при симметричной нагрузке, соединенной по схеме “звезда”*

$$Z = \sqrt{3^2 + (-8^2)} = 8,5 \text{ Ом}$$

$$I_{\Phi} = I_{\text{Л}} = \frac{U_{\Phi}}{Z} = \frac{11,6}{8,5} = 1,36 \text{ А.}$$

$$P = 3RI_{\Phi}^2 = 3 \cdot 3 \cdot 1,36^2 = 16,65 \text{ Вт.}$$

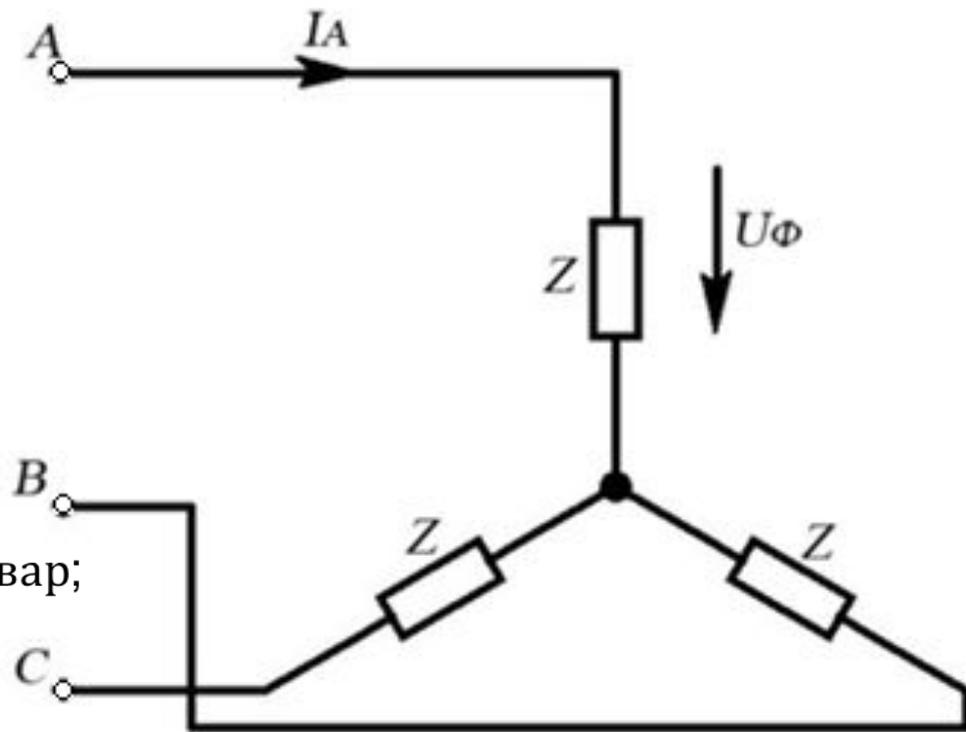
$$Q = 3 \cdot X I_{\Phi}^2 = 3 \cdot (-8) \cdot 1,36^2 = -44,4 \text{ вар;}$$

$$S = 3ZI_{\Phi}^2 = 3 \cdot 8,5 \cdot 1,36^2 = 47 \text{ ВА}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 47 \text{ ВА;}$$

$$P = 3U_{\Phi}I_{\Phi} \cos \varphi = 3 \cdot 11,6 \cdot \frac{3}{8,5} = 16,65 \text{ Вт.}$$

$$Q = 3U_{\Phi}I_{\Phi} \sin \varphi = 44,4 \text{ вар}$$



$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{3}{8,5} = 0,35;$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{3U_{\Phi}I_{\Phi}}$$

$$\sin \varphi = \frac{X}{Z}$$

Рис. 4.14 Продолжение

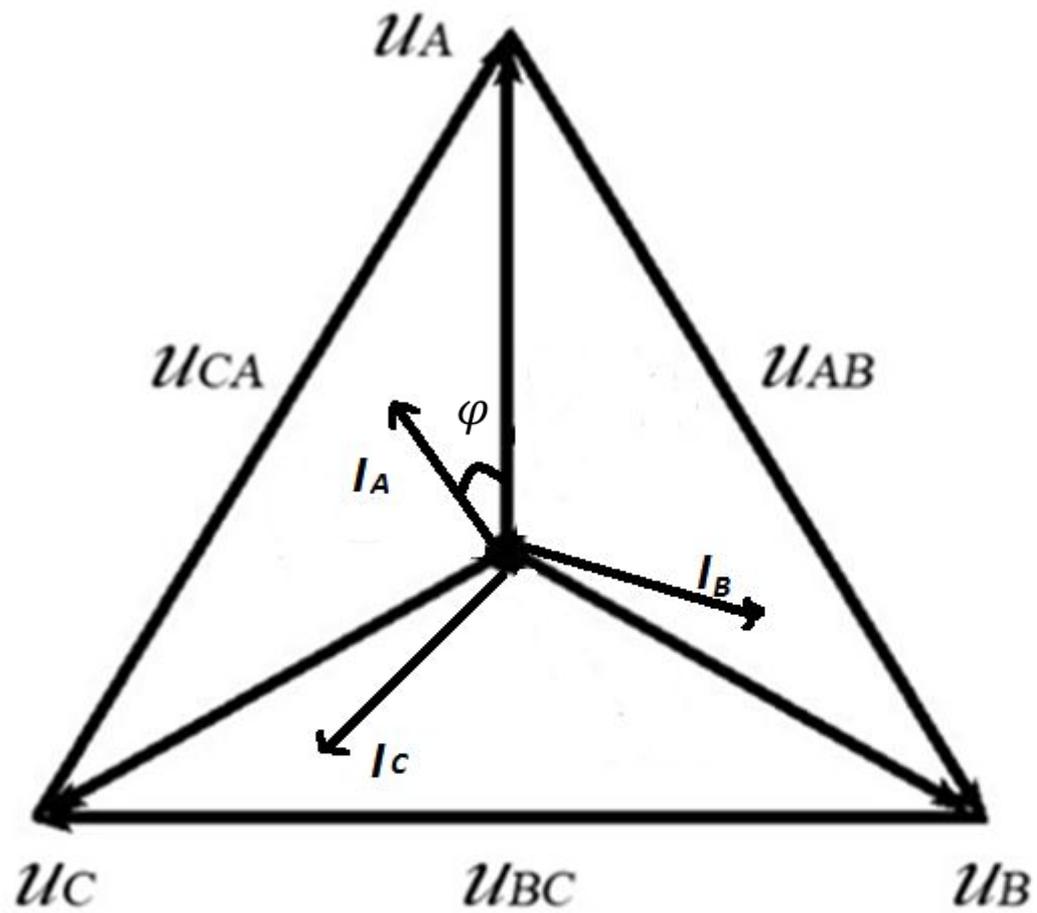


Рис. 4.15 Векторная диаграмма .

## 7. Режимы работы трехфазной цепи при несимметричной нагрузке

## 7.1 Соединение нагрузки звездой

$$Z_A \neq Z_B \neq Z_C$$

$$I_o \neq 0 \quad \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = \bar{I}_O$$

Напряжения в фазах симметричны,  
А токи нет.

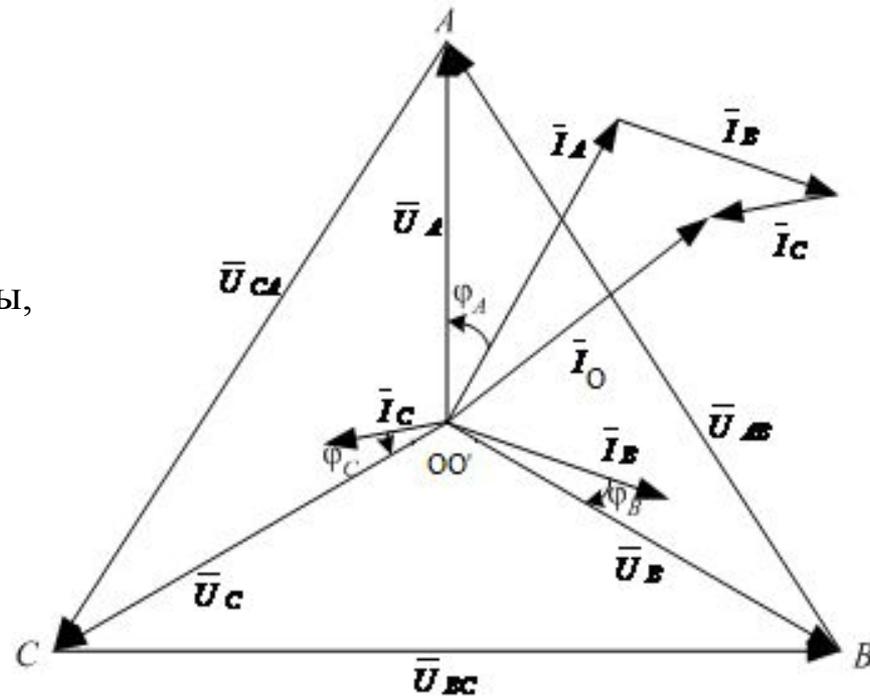


Рис. 4.16 Случай несимметричной нагрузки с нулевым проводом.

$$U_{\text{л}} \neq \sqrt{3}U_{\text{ф}}: I_{\text{л}} \neq I_{\text{ф}}$$

Токи в фазах изменятся и их сумма будет равно нулю  
Симметрия фазных напряжений нарушится.  
Между нулевыми точками генератора и приемника  
появится напряжение.

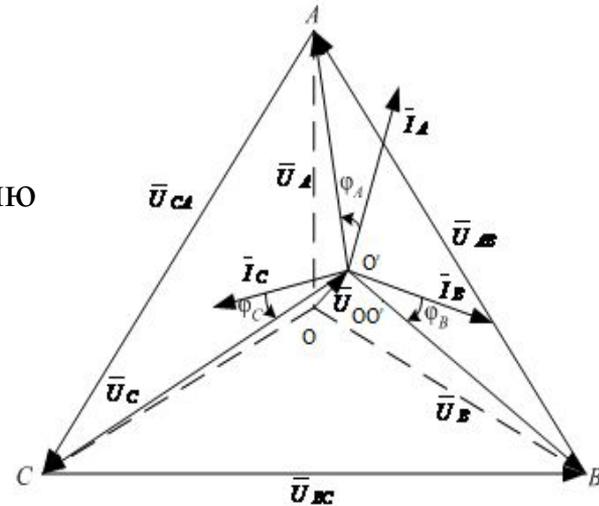
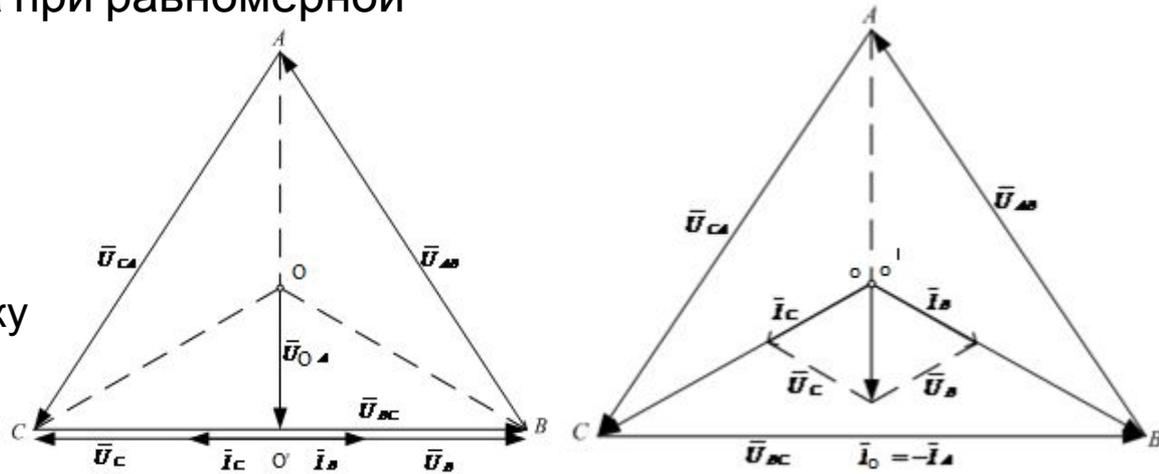


Рис. 4.17 Несимметричная нагрузка без нулевого провода.

При обрыве линейного провода при равномерной нагрузке

В случае короткого замыкания, например, фазы А, точка О переместится в точку О'; а при обрыве фазы А и равенства сопротивлений фаз В и С точка О' переместится в точку О'.  
 Схема превращается в однофазную систему – цепь, в которой фазы В и С соединены последовательно.

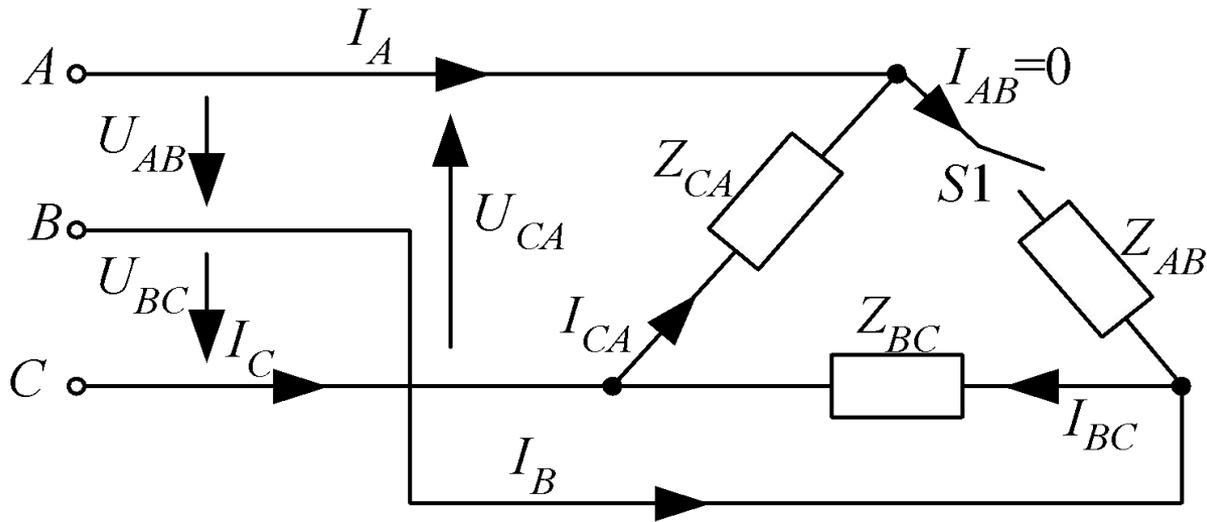


Режимы двух оставшихся фаз не изменяется.  
 $\bar{I}_O = \bar{I}_B + \bar{I}_C = \bar{I}_A$  -при наличии нулевого провода

$U_\Phi = \frac{U_L}{2}$   $I_B = I_C$  -без нулевого провода

Рис 4.18 Короткое замыкание одной из фаз. Обрыв фазы

## 7.2 Соединение нагрузки треугольником

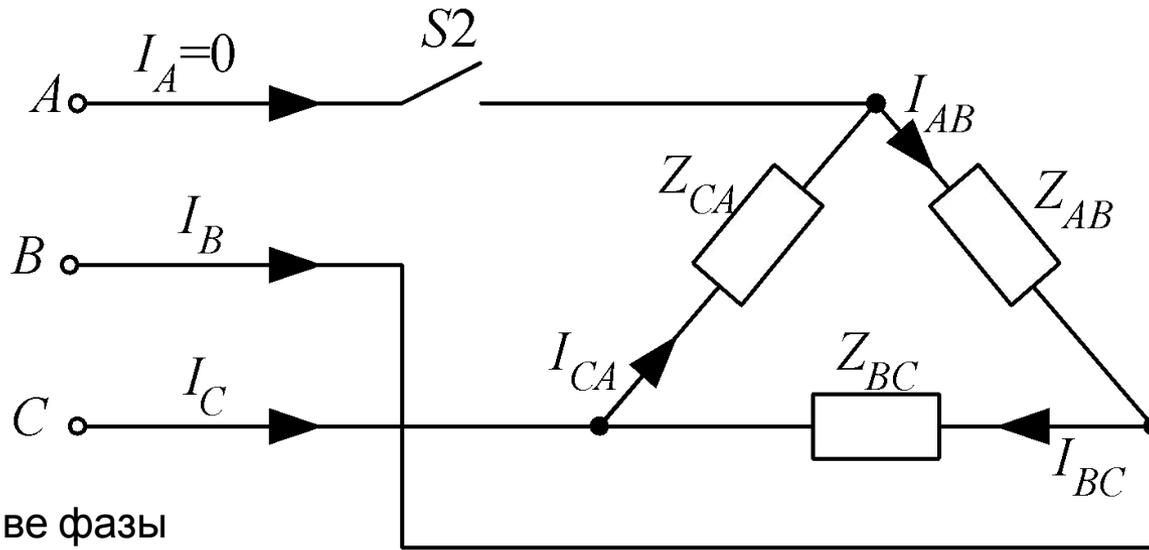


Ток  
нагрузки

$$I_{AB}=0 \quad \bar{I}_A = -\bar{I}_{AC}, \quad \bar{I}_B = \bar{I}_{BC} \quad \bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} \quad \text{-согласно первому закону Кирхгофа}$$

Токи в фазах BC и CA остаются прежними, т.к. их напряжения и сопротивления не изменились. Линейные токи  $I_A$  и  $I_B$  становятся равными  $I_{CA}$  и  $I_{BC}$ , т. е.  $I_A = I_{CA}$ ;  $I_B = I_{BC}$ .

Рис. 4.19 Обрыв фазы



$I_A = 0$  -при обрыве фазы

$$0 = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA}, \text{ т.е. } \bar{I}_{AB} = \bar{I}_{CA}; \bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB};$$

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC}. \bar{I}_C = \bar{I}_{AB} + \bar{I}_{BC}, \bar{I}_C = -\bar{I}_B. \quad \text{-Согласно первому закону}$$

Кирхгофа.

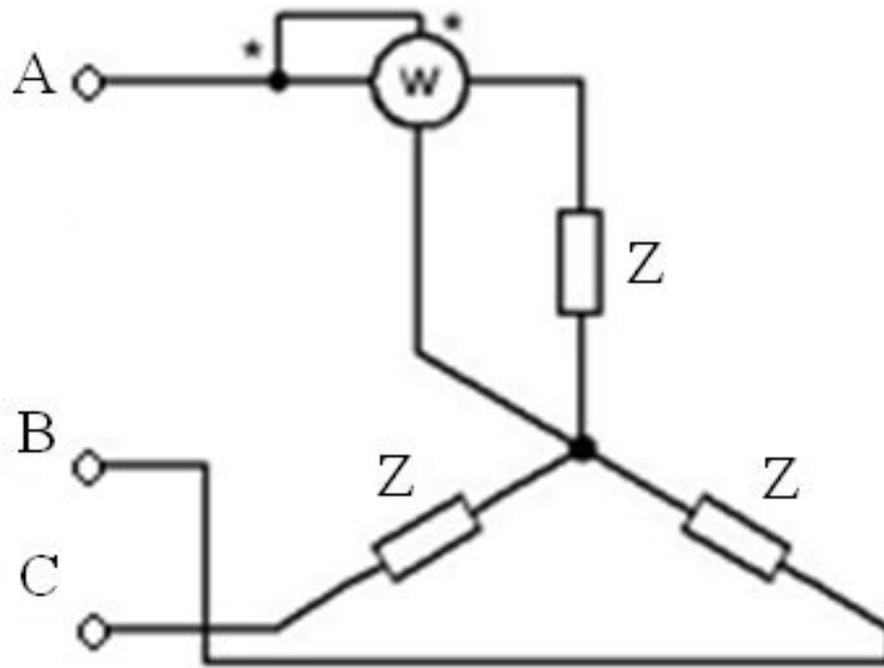
Трехфазная цепь превращается в однофазную. Ток в фазе BC не изменяется, т.к. не изменилось  $U_{BC}$

Фазы AB и CA нагрузки оказались включенными последовательно на напряжение

$$U_{BC}, \text{ т.е. } \frac{U_{BC}}{2} (Z_{AB} = Z_{CA}). \text{ токи } I_{AB} \text{ и } I_{CA} \text{ уменьшаются, как и токи } I_B \text{ и } I_C.$$

Рис.4.20 Обрыв линейного провода

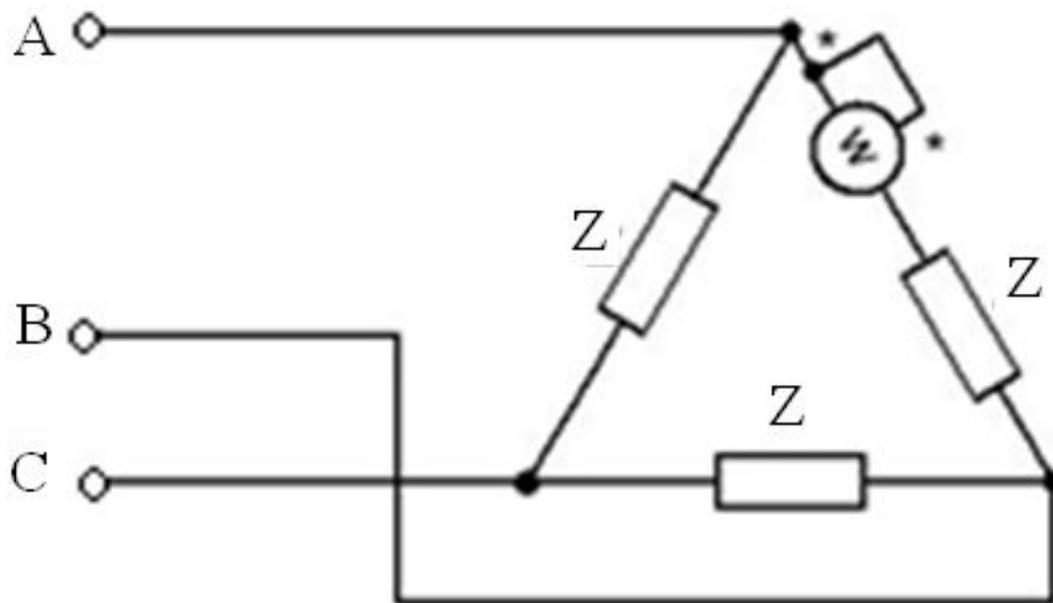
## 8. Измерение мощности трехфазных цепей



a)  $P = 3P_w$

*Рис. 4.21. Схема измерения активной мощности в трехфазной цепи при симметричной нагрузке*

*a) – при соединении нагрузки звездой*



б)  $P = 3P_w$

*Рис. 4.22. Схема измерения активной мощности в трехфазной цепи при симметричной нагрузке*

*б) - при соединении нагрузки треугольником*

$$P_1 = U_{AB}i_A$$

$$P = P_1 + P_2 = U_{AB}i_A + U_{CB}i_C$$

$$P = U_A i_A + U_B i_A + U_C i_C - U_{BC} i_C$$

$$P_2 = U_{CB}i_C$$

Согласно второму закону

Кирхгофа

$$U_{AB} = U_A - U_B \quad U_{CB} = U_C - U_B;$$

$$\text{или } P = U_A i_A + U_C i_C - U_B (i_A + i_C);$$

По первому закону

Кирхгофа

$$i_A + i_B + i_C = 0,$$

$$i_A + i_B = -i_C$$

или

тогда

$P = U_A i_A + U_B i_B + U_C i_C$  мгновенная  
мощность трехфазной системы.

$P = P_{W1} + P_{W2}$  - активная  
мощность

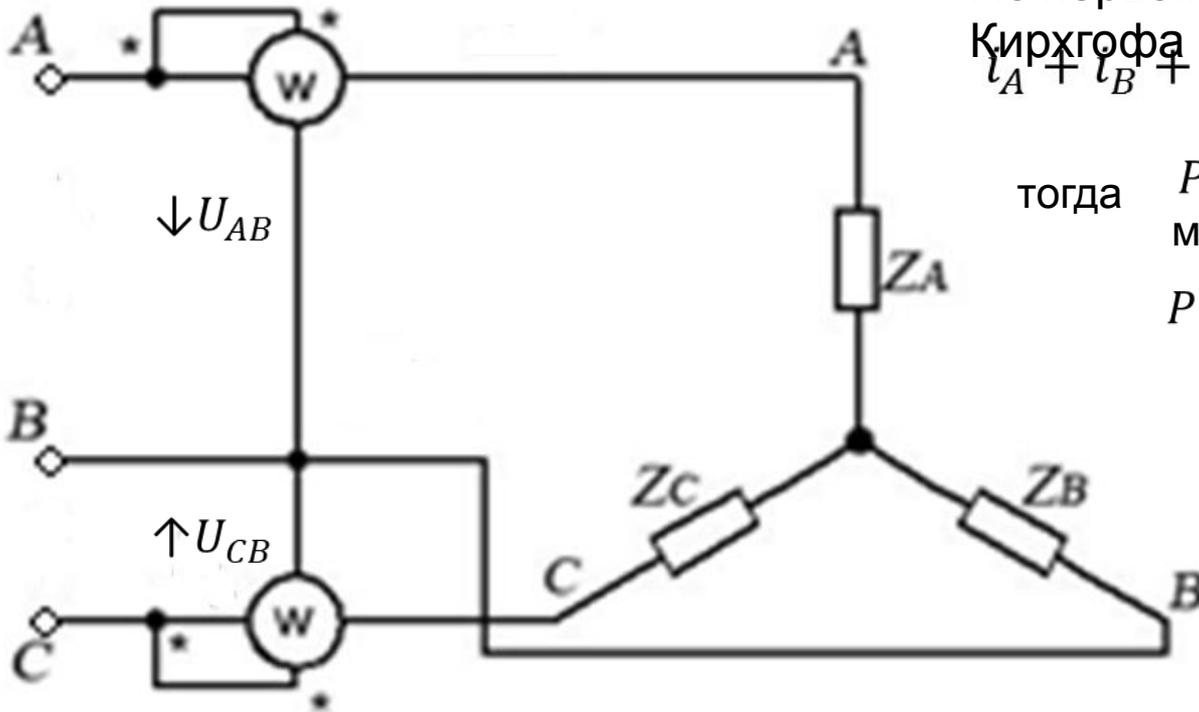


Рис. 4.23. Схема измерения активной мощности в трехфазной цепи с помощью двух ваттметров

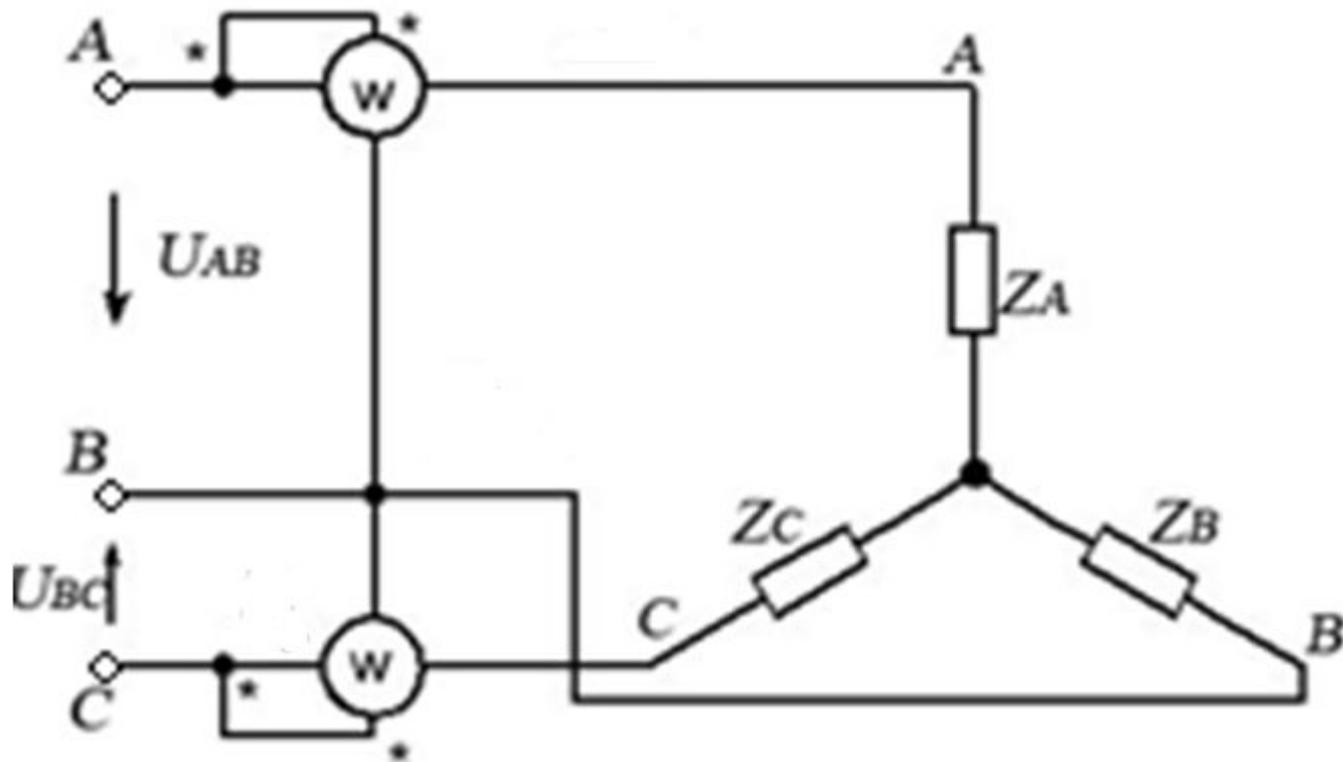
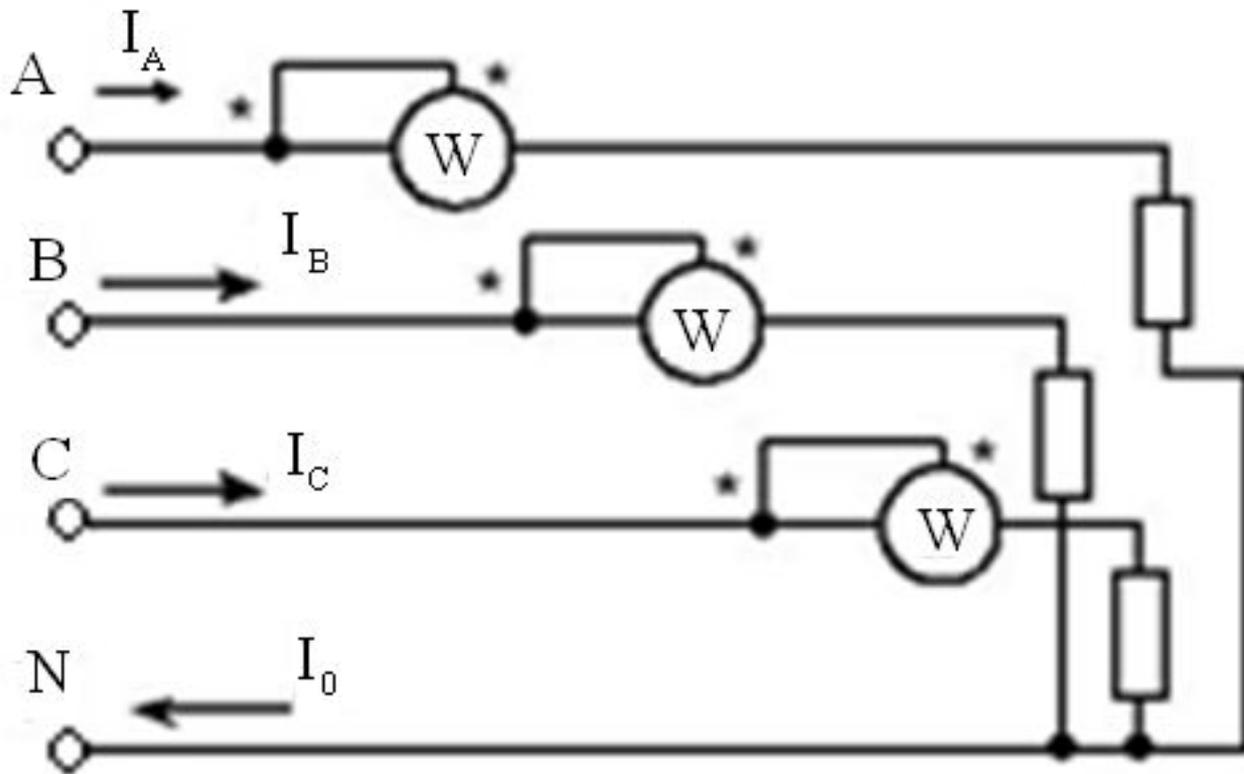


Рис. 4.24. Схема измерения активной мощности в трехфазной цепи с помощью двух ваттметров



$$P = P_A + P_B + P_C$$

*Рис. 4.25 Схема измерения активной мощности с помощью трёх ваттметров.*

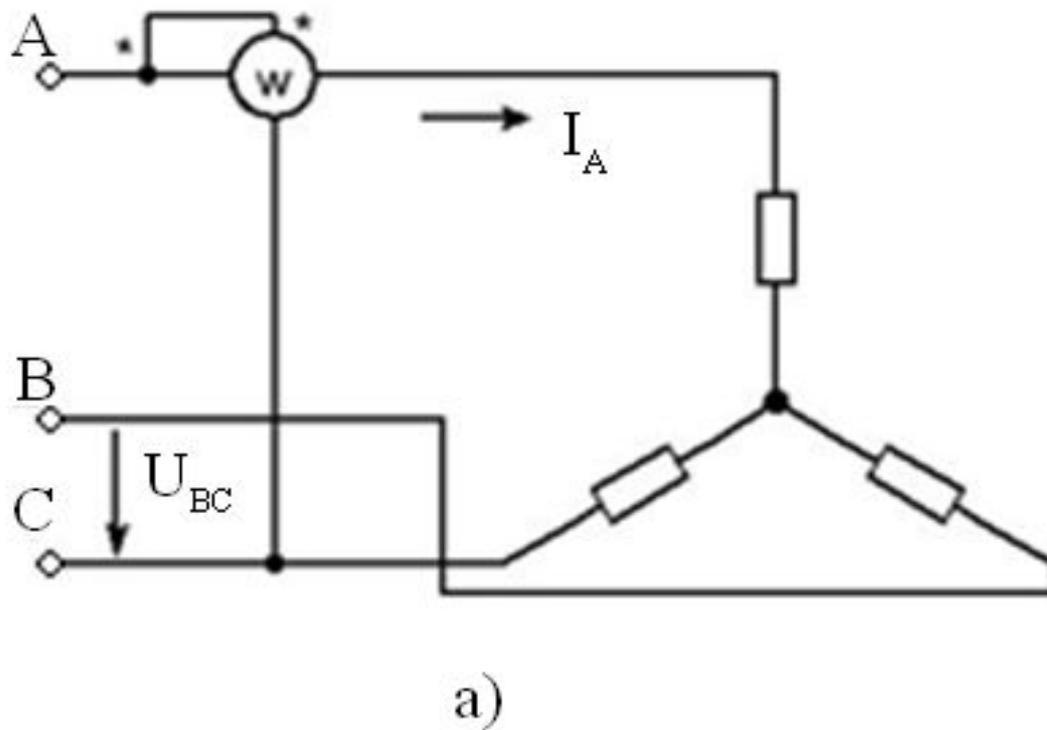
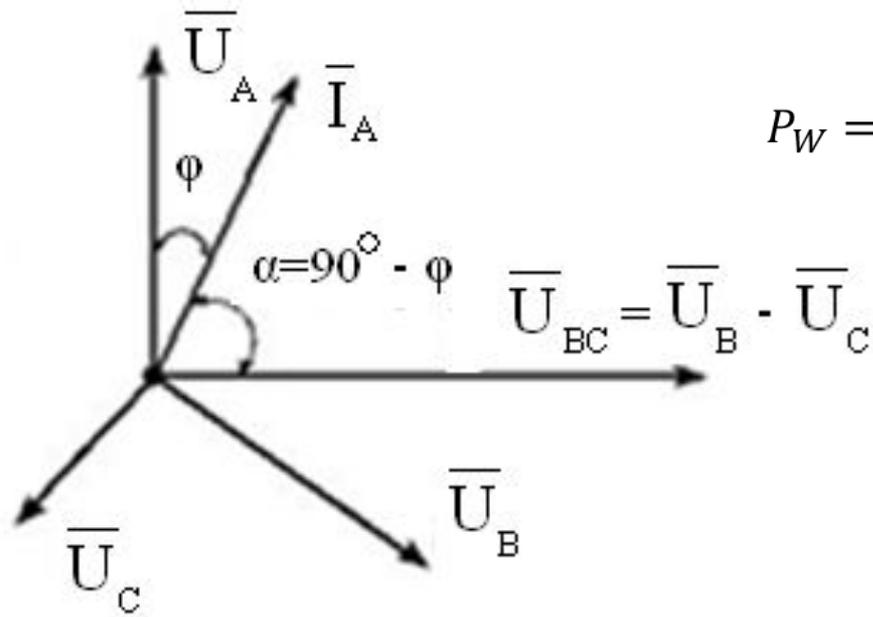


Рис. 4.26. Измерение реактивной мощности в трехфазной цепи  
а) электрическая схема



$$\alpha = 90^\circ - \varphi$$

$$P_W = U_{BC} I_A \cos(90^\circ - \varphi) = U_L I_L \sin \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} P_W$$

б)

Рис. 4.27. Измерение реактивной мощности в трехфазной цепи  
 б) векторная диаграмма

## 9. Вращающееся магнитное поле

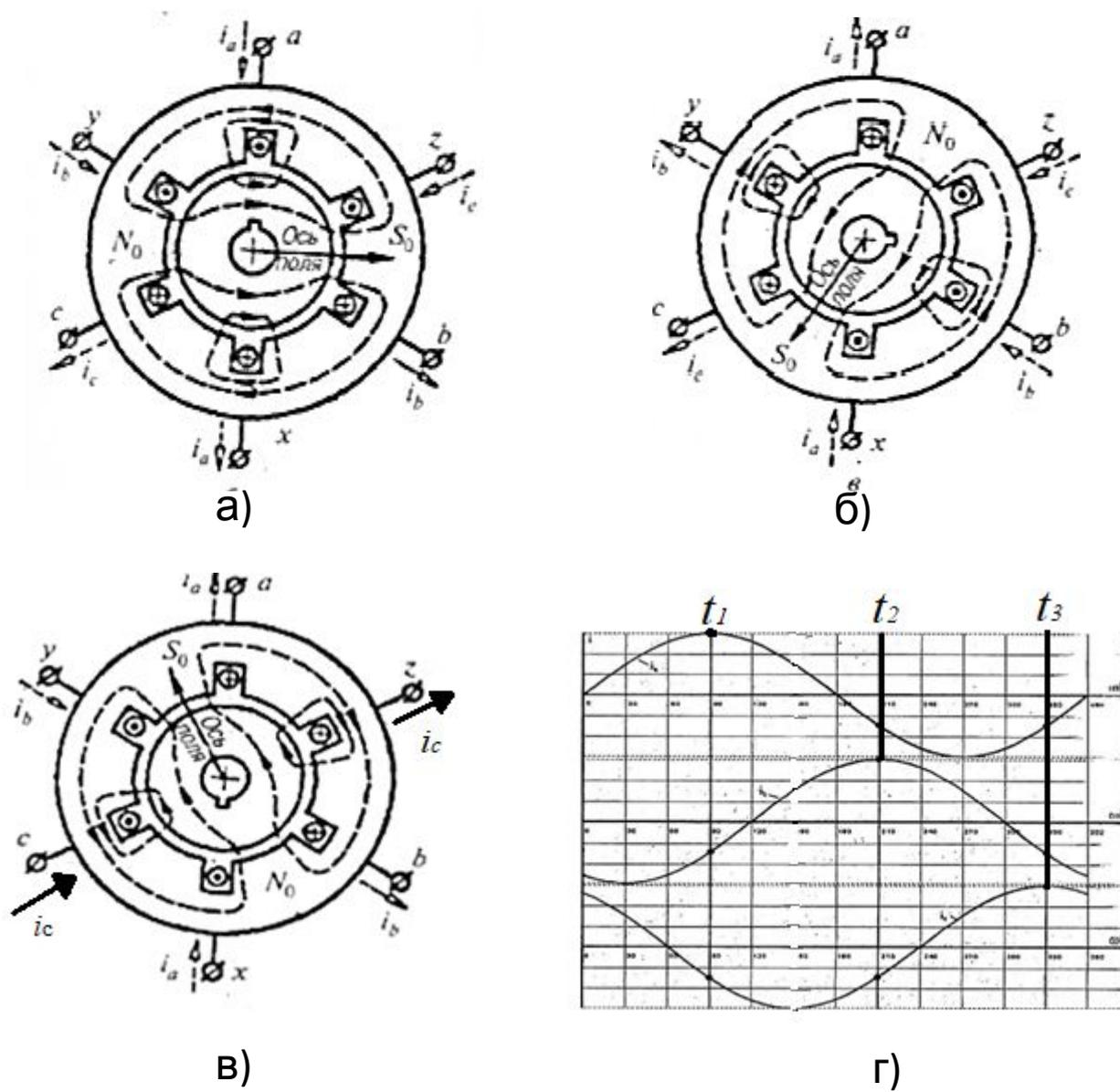
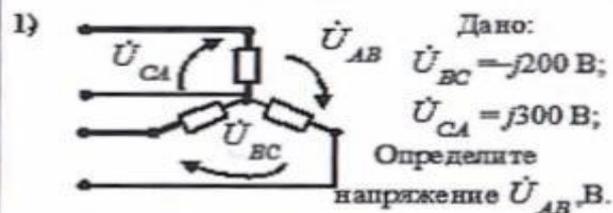
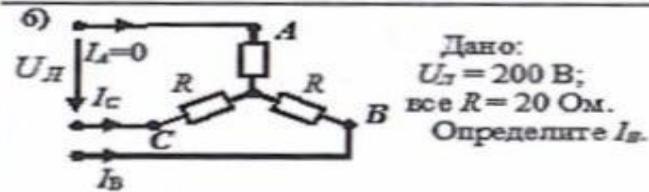


Рис. 4.28 К объяснению вращающегося магнитного поля

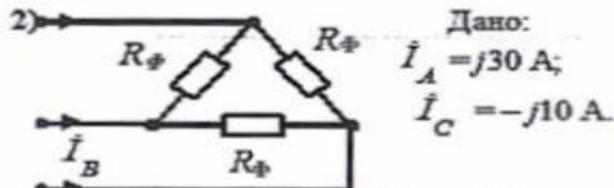
# **Задачи для самоконтроля**



- 100     $j100$      $j500$      $-j500$      $-j100$   
 1.    2.    3.    4.    5.



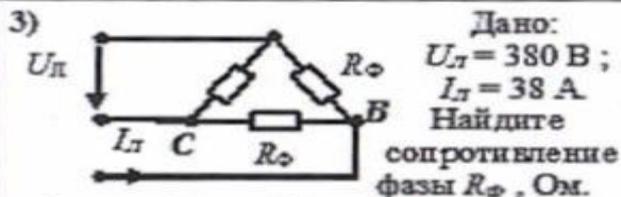
- 5,7    10    20    38    40  
 1.    2.    3.    4.    5.



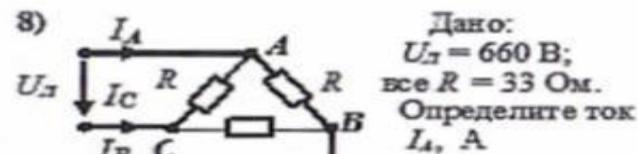
- 10    20    31,6    35    40  
 1.    2.    3.    4.    5.



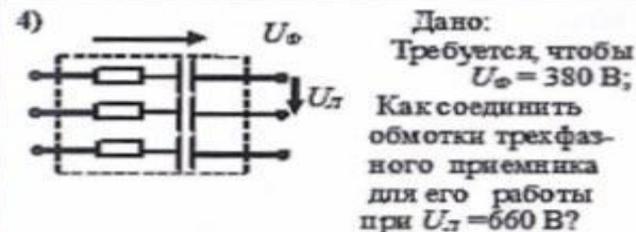
- 10    12,7    30    0    20  
 1.    2.    3.    4.    5.



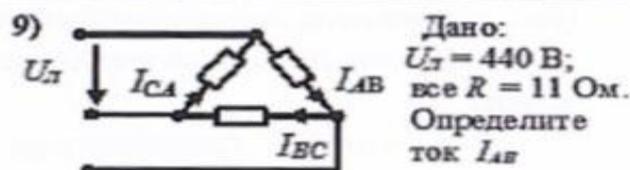
- 8    6    10    17,3    22  
 1.    2.    3.    4.    5.



- 20    34,7    40    60    120  
 1.    2.    3.    4.    5.



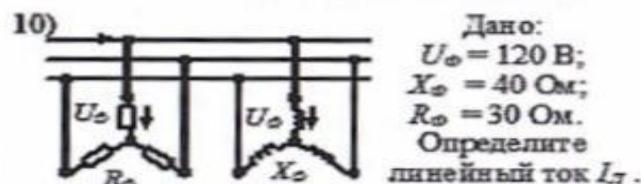
- треугол. параллел. звездой последов.  
 1.    2.    3.    4.



- 68    80    0    23    40  
 1.    2.    3.    4.    5.



- 5,26    7,25    9,12    11,4    15,2  
 1.    2.    3.    4.    5.



- 8    7    6    5    4  
 1.    2.    3.    4.    5.

# Ответы

## Правильные ответы

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер правильного ответа	5	2	4	3	1	1	4	1	4	4

# V Переходные процессы в линейных электрических цепях

Переходные процессы возникают в электрических цепях при различных воздействиях, приводящих к изменению режима их работы, т.е. при действии различного рода аппаратуры, например ключей, переключателей, при обрывах цепи, при коротком замыкании отдельных участков цепи и т.д.

Физической причиной возникновения переходных процессов в цепях является наличие в них катушек индуктивности и конденсаторов. Это связано с тем, что энергия магнитного и электрического полей этих элементов не может измениться скачком при коммутации в цепи.

# 1 Классический метод расчета переходных процессов.

1. Составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции и т.д., описывающих состояние цепи после коммутации. Исключением переменных получить одно дифференциальное уравнение, в общем случае, неоднородное относительно искомого тока  $i$  или напряжения  $u$ . Для простых цепей получается дифференциальное уравнение первого или второго порядка, в котором в качестве искомой величины выбирают либо ток в *индуктивном* элементе, либо напряжение в *емкостном* элементе.

2. Составить общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения цепи в виде *суммы частного решения* неоднородного дифференциального уравнения и *общего решения* соответствующего однородного дифференциального уравнения.

В общем решении  $i = i_y + i_{св}$ ,  $u = u_y + u_{св}$  следует найти постоянные интегрирования которые определяют из *начальных условий*, которые получают из *законов коммутации*, согласно которым *ток в индуктивном элементе и напряжение на емкостном элементе не могут изменяться скачком*, что записывается с следующим виде:

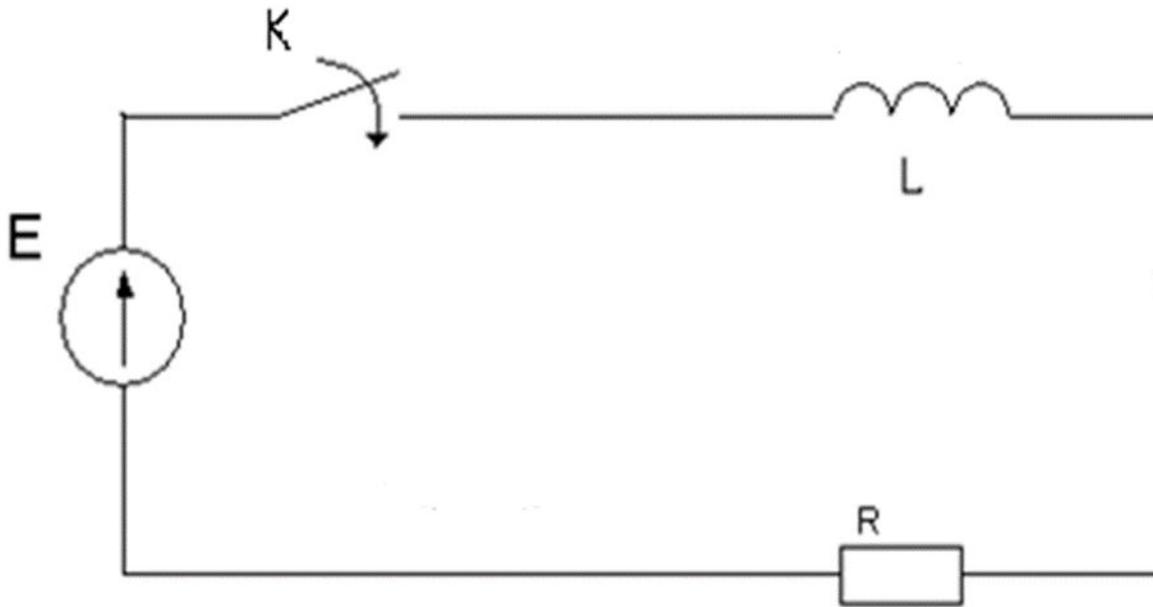
$i_L(t -) = i_L(t +)$  и  $U_C(t -) = U_C(t +)$  – законы коммутации

$$U_L = L \frac{di}{dt} \quad i_C = C \frac{dU_C}{dt}$$

$i_L(t)$  и  $U_C(t)$  – начальные условия

$i_L(t) = 0$  и  $U_C(t) = 0$  – нулевые начальные условия

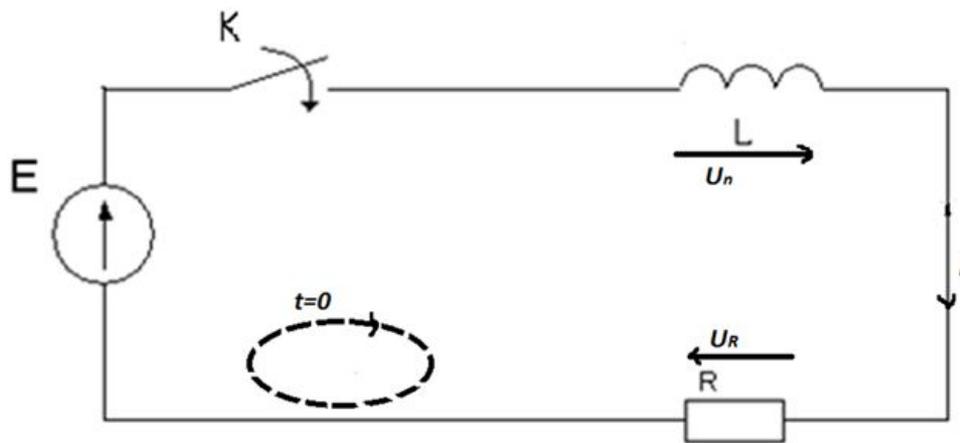
# Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним индуктивным элементом (RL – цепь)



Составим систему уравнений, описывающих состояние цепи на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и закона электромагнитной индукции

$$U_L + U_R = E \qquad U_L = L \frac{di}{dt} \qquad U_R = R \dot{i};$$

*Рис. 5.1. Подключение источника постоянной ЭДС к неразветвленной цепи с резистивным и индуктивным элементами*



$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

Исключаем переменные  $U_R$  и  $U_L$  получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. И найдем общее его решение соответствующего однородного дифференциального уравнения.

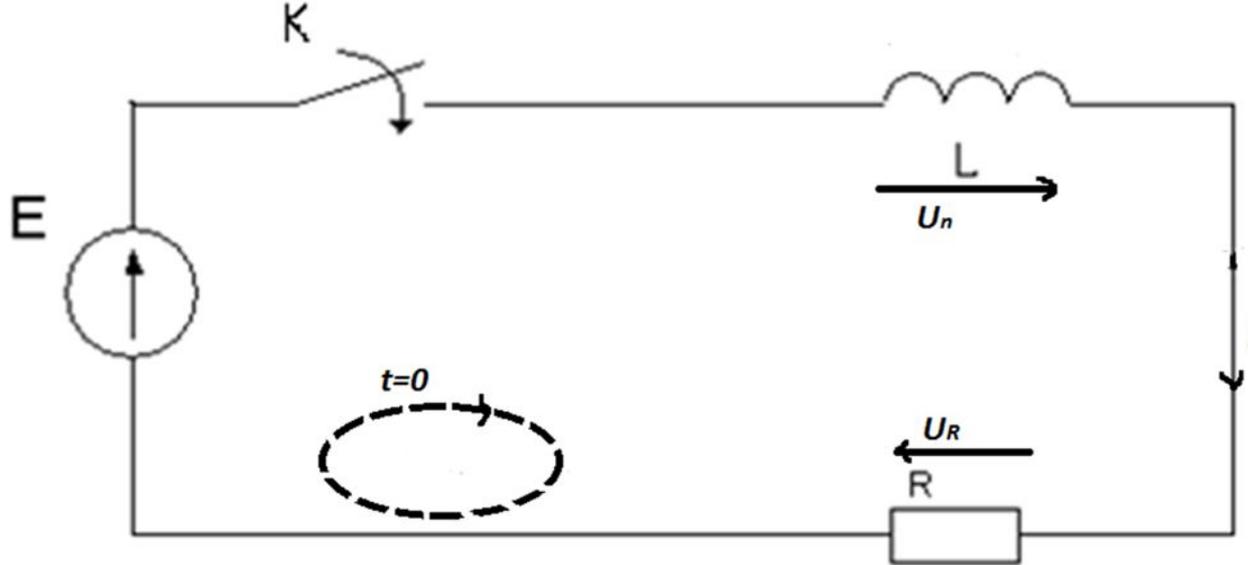
$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$i_y = \frac{E}{R} - \text{установившийся ток;}$$

$$i_{св} = Ae^{Pt}, \text{ где } P = -R/L - \text{корень характерист. ур - я. } LP + R = 0$$

$$i = i_y + i_{св} = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} - \text{общее решение неоднородного диф уравнения}$$

*Рис. 5.1. Подключение источника постоянной ЭДС к неразветвленной цепи с резистивным и индуктивным элементами*



Определим постоянную интегрирования  $A$  в общем решении уравнения. =

Для этого обратимся к закону коммутации для индуктивного элемента в момент замыкания ключа.  $t=0$ .

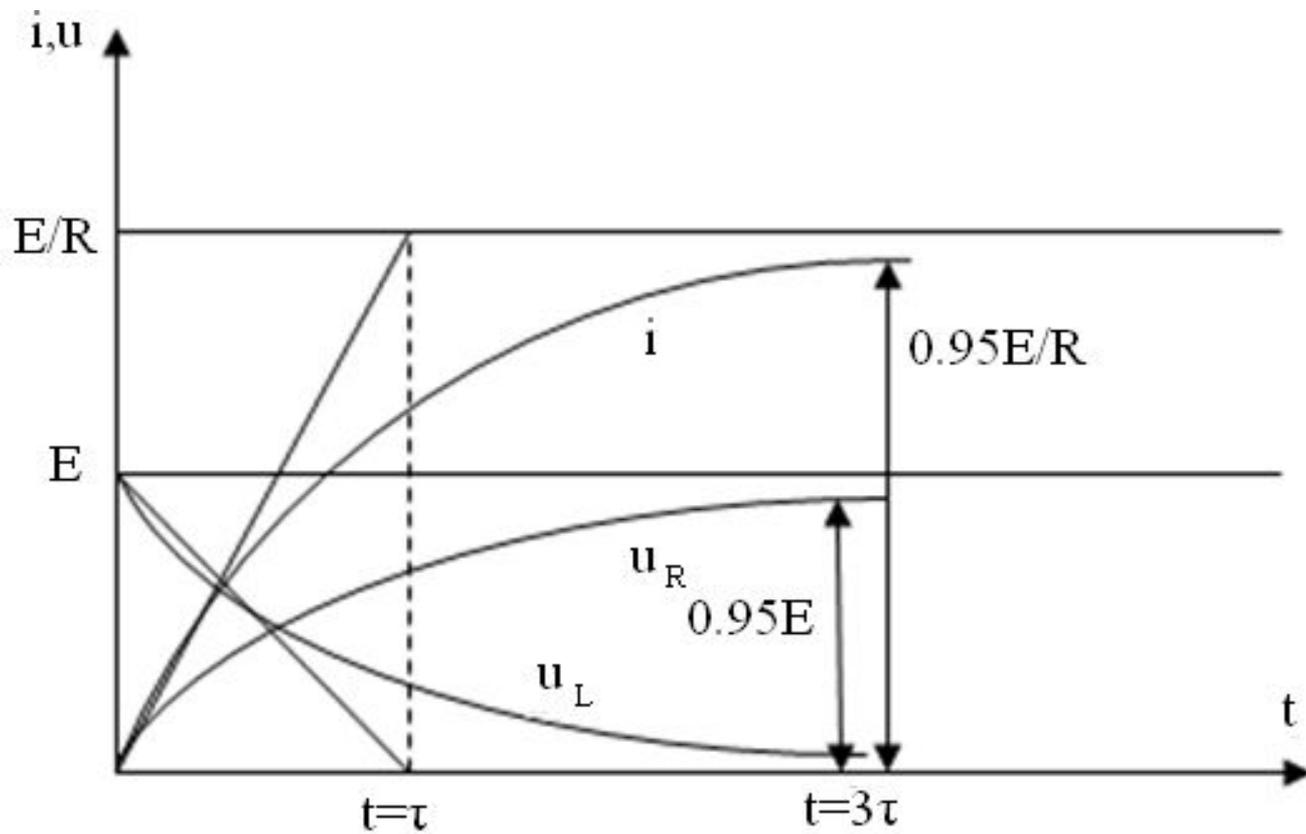
Изменение тока в индуктивном элементе скачком невозможно:  $i_L(t-0) = i_L(t+0)$ , т.е. ток может измениться скачком  $i_L(0) = 0 = i(0+) = \frac{E}{R} + A; A = -\frac{E}{R}$ ;

Тогда:

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - \text{Закон нарастания тока в цепи}$$

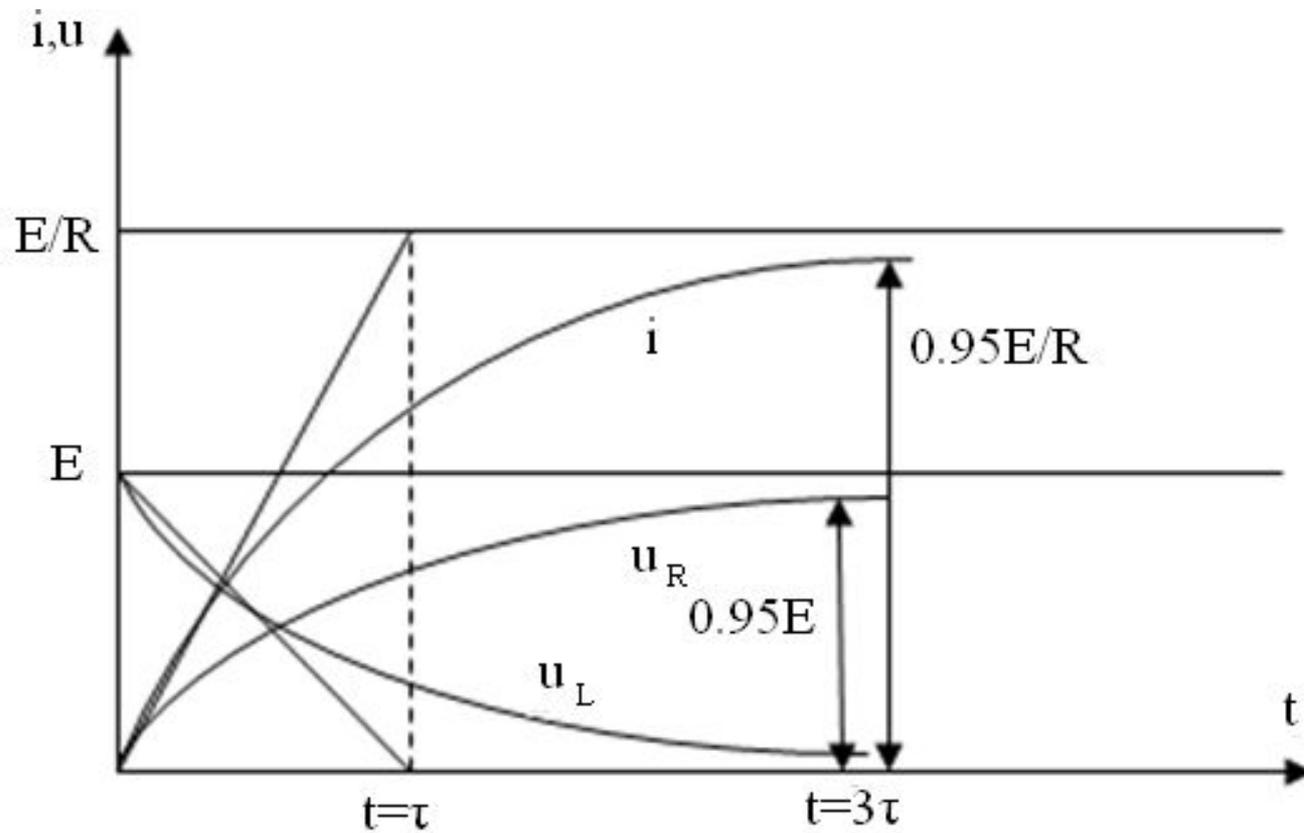
, где  $\tau = L/R$  – постоянная времени цепи.

*Рис. 5.1. Подключение источника постоянной ЭДС к неразветвленной цепи с резистивным и индуктивным элементами*



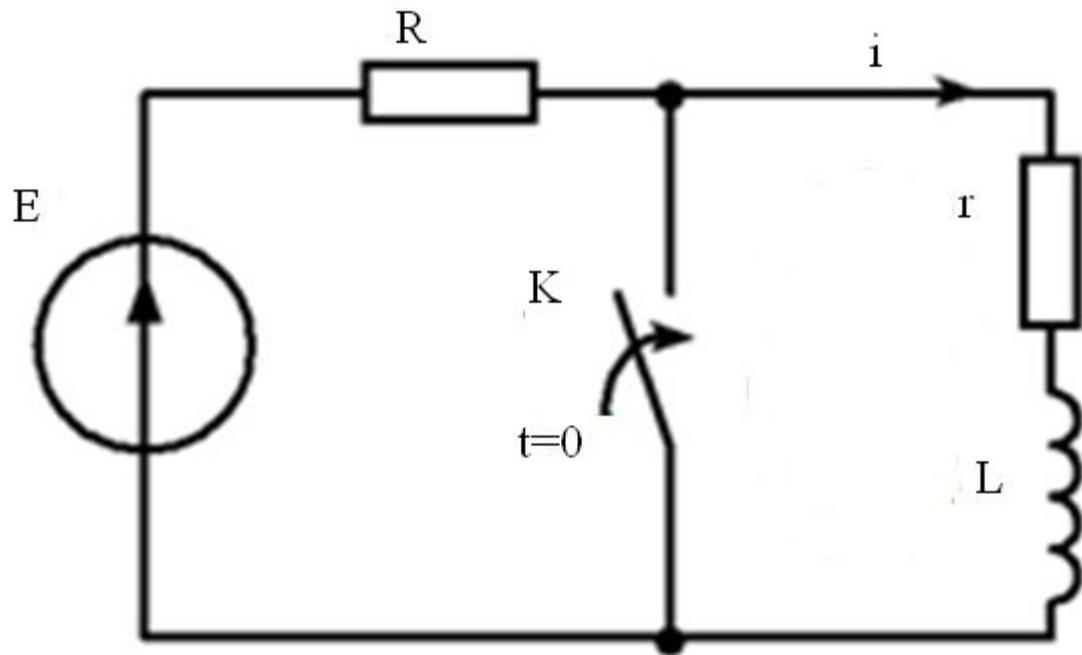
$$U_R = R \cdot i = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}});$$

*Рис. 5.2 Изменение токов и напряжений*

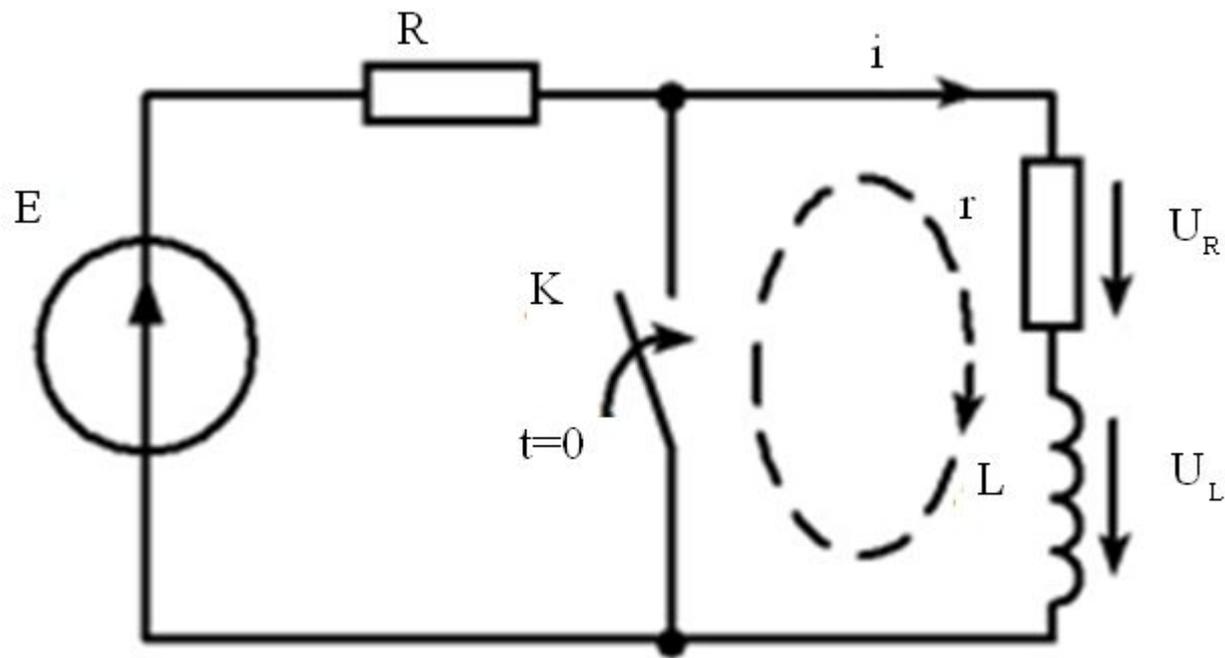


$$U_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau}};$$

Рис. 5.2 Изменение токов и напряжений



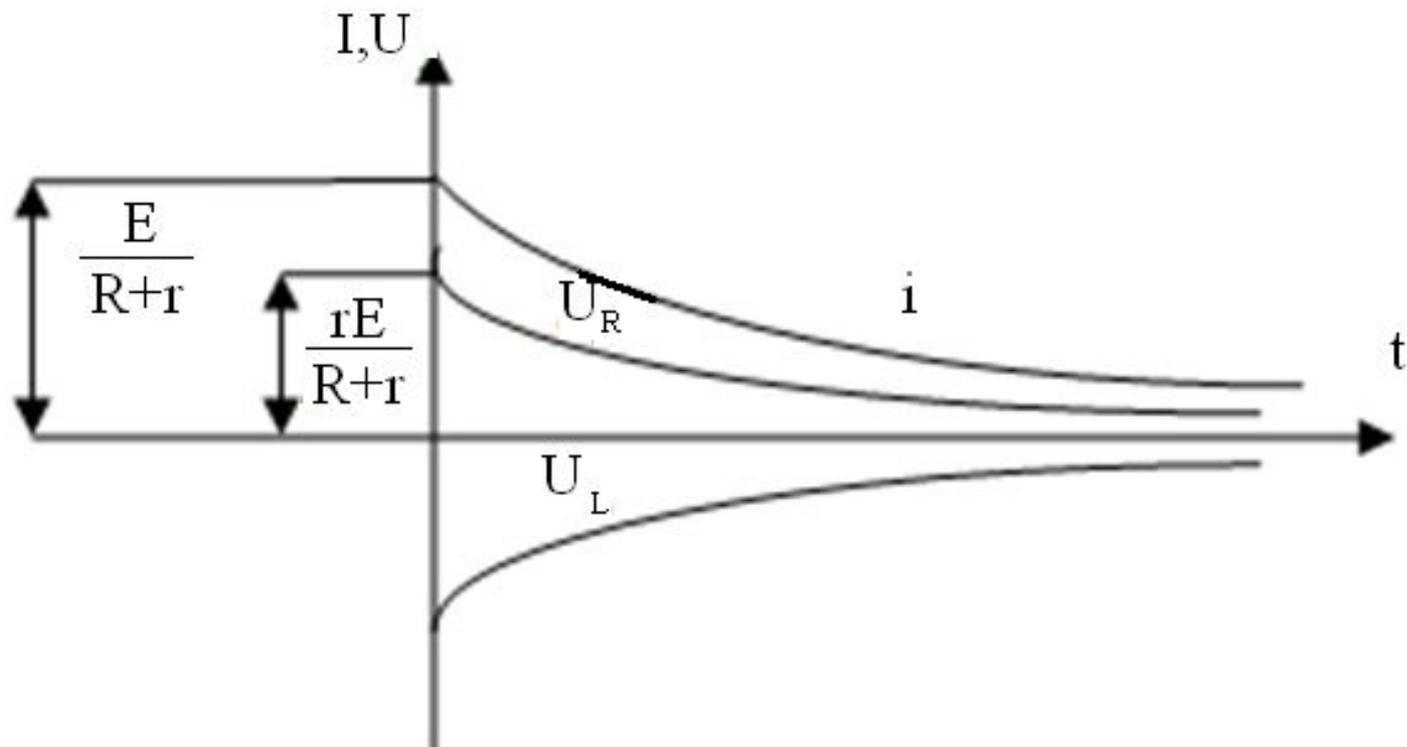
*Рис. 5.3 Короткое замыкание катушки индуктивности с током*



$$U_L + U_R = L \frac{di}{dt} + Ri = 0; \quad \tau = L/R; \quad i(0-) = E/(R+r) = i(0+) = A;$$

$$i = i_{CB} = Ae^{-t/\tau} \quad [i_L(t-) = i_L(t+)]; \quad i = \frac{E}{R+r} e^{-t/\tau};$$

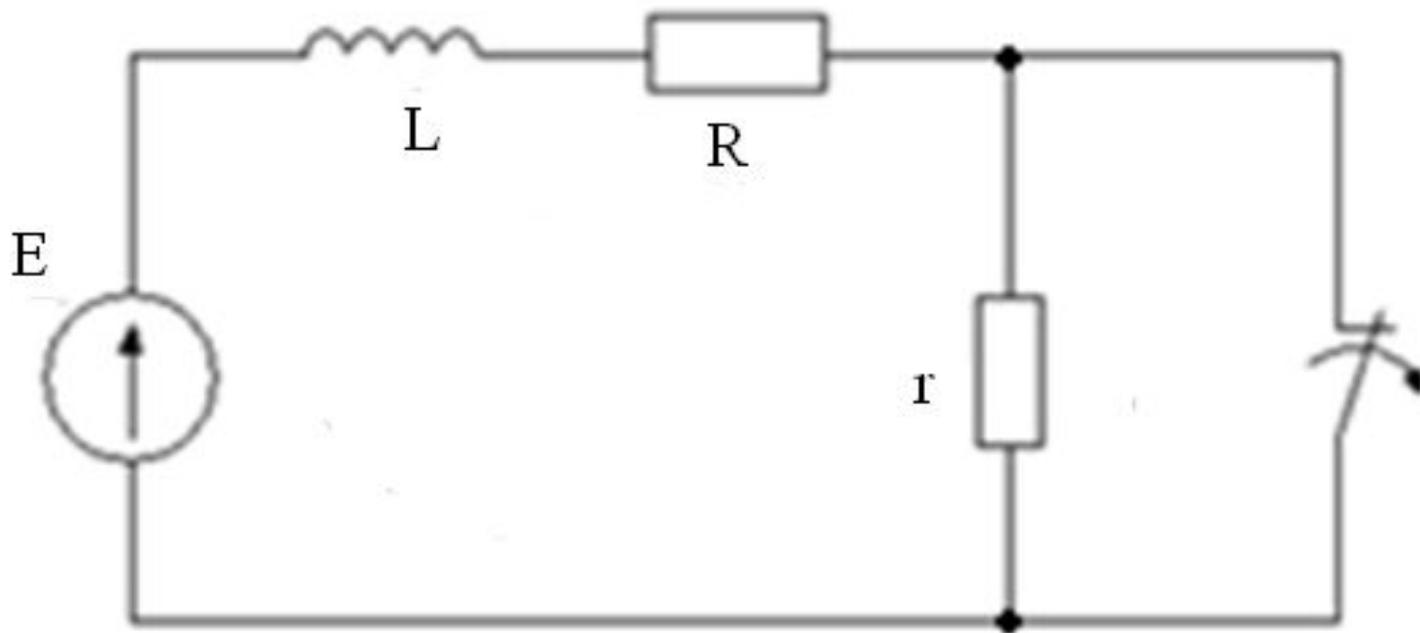
Рис. 5.3 Короткое замыкание катушки индуктивности с током



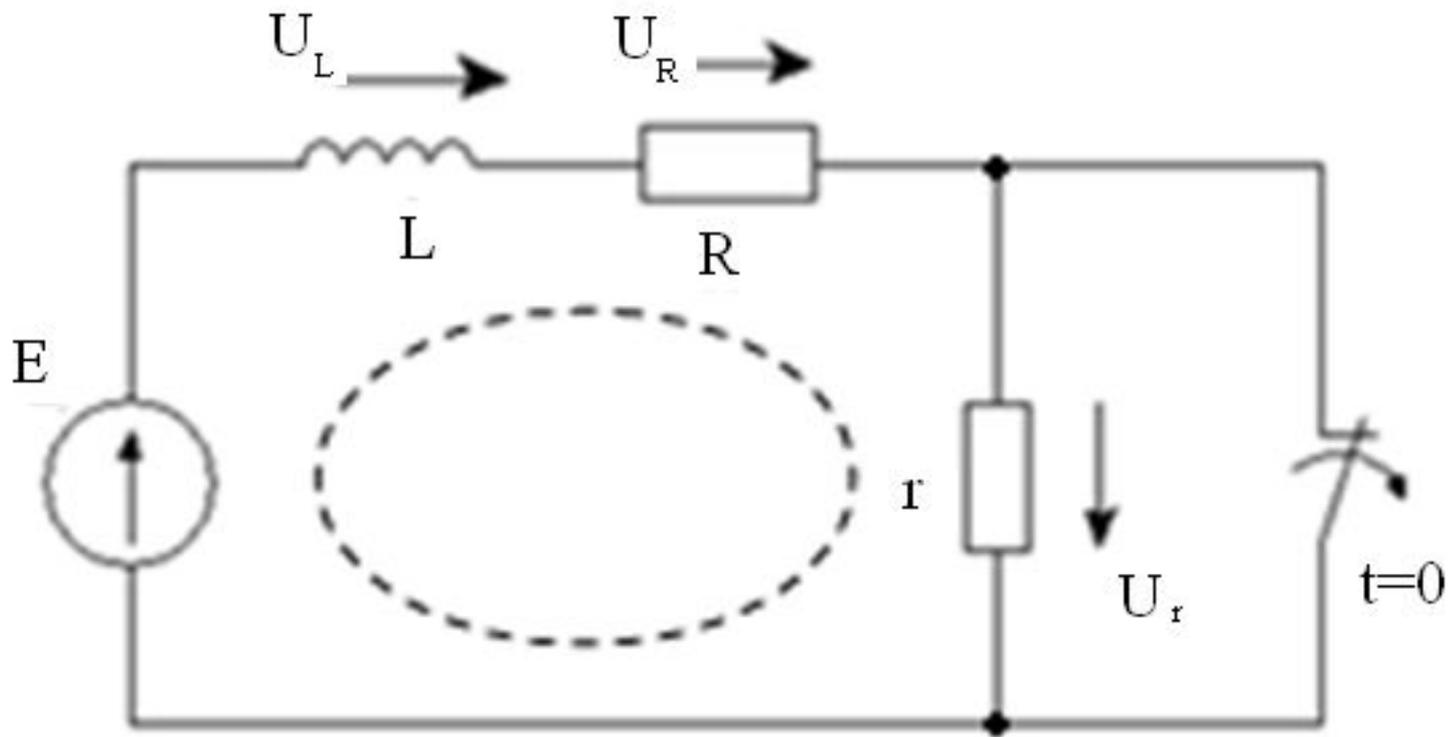
$$U_R = R \cdot i = \frac{rE}{r+R} e^{-t/\tau}$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{rE}{R+r} e^{-t/\tau}$$

Рис. 5.4 Изменение токов и напряжений при коротком замыкании катушки



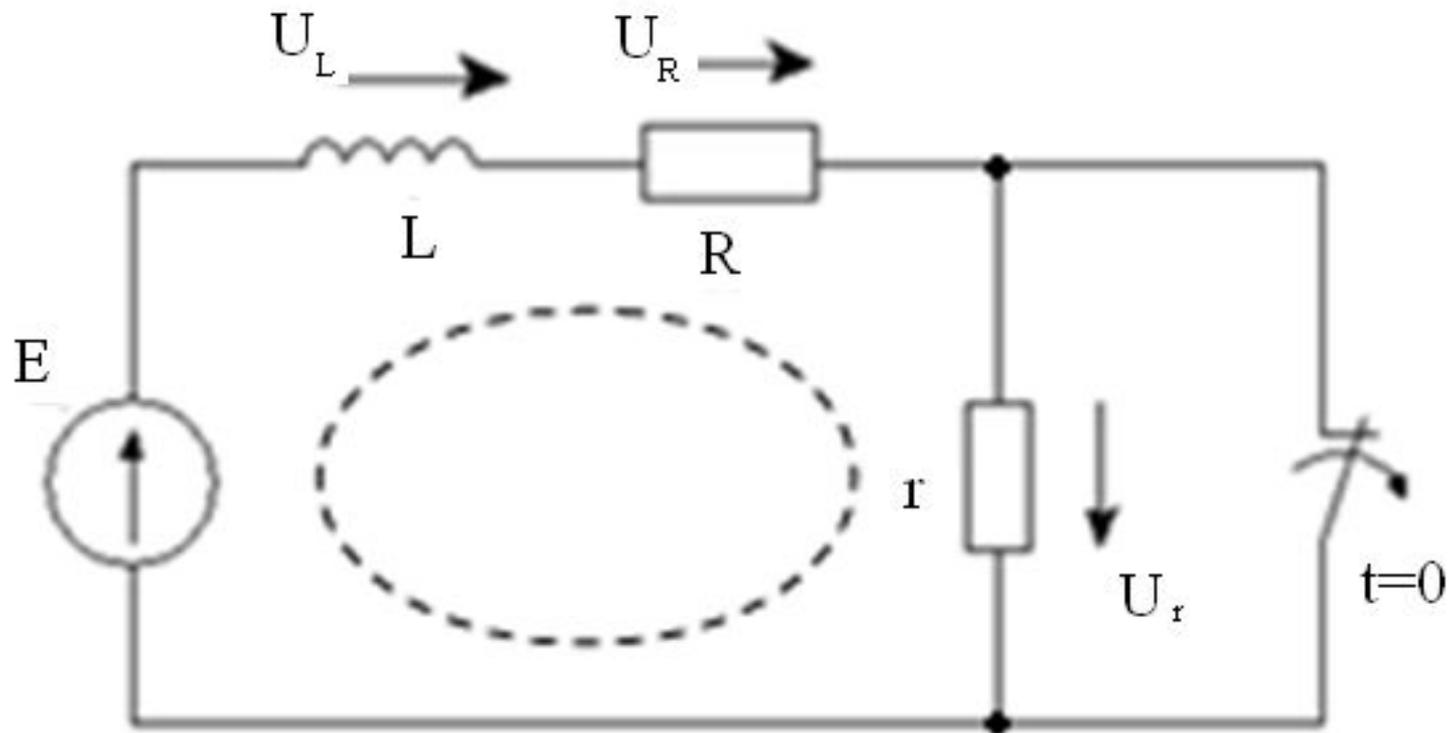
*Рис. 5.5 Размыкание цепи с катушкой индуктивности*



$$U_L + U_R + U_r = L \frac{di}{dt} + Ri + ri = E \quad i = i_y + i_{\text{CB}} = \frac{e}{R+r} + Ae^{\frac{R+r}{L}}, \text{ где } i_y = E/(R+r);$$

$$L \frac{di}{dt} + i(R+r) = E \quad i = i(0-) E/R = i(0+) = \frac{E}{R+r} + A;$$

Рис. 5.5 Размыкание цепи с катушкой индуктивности

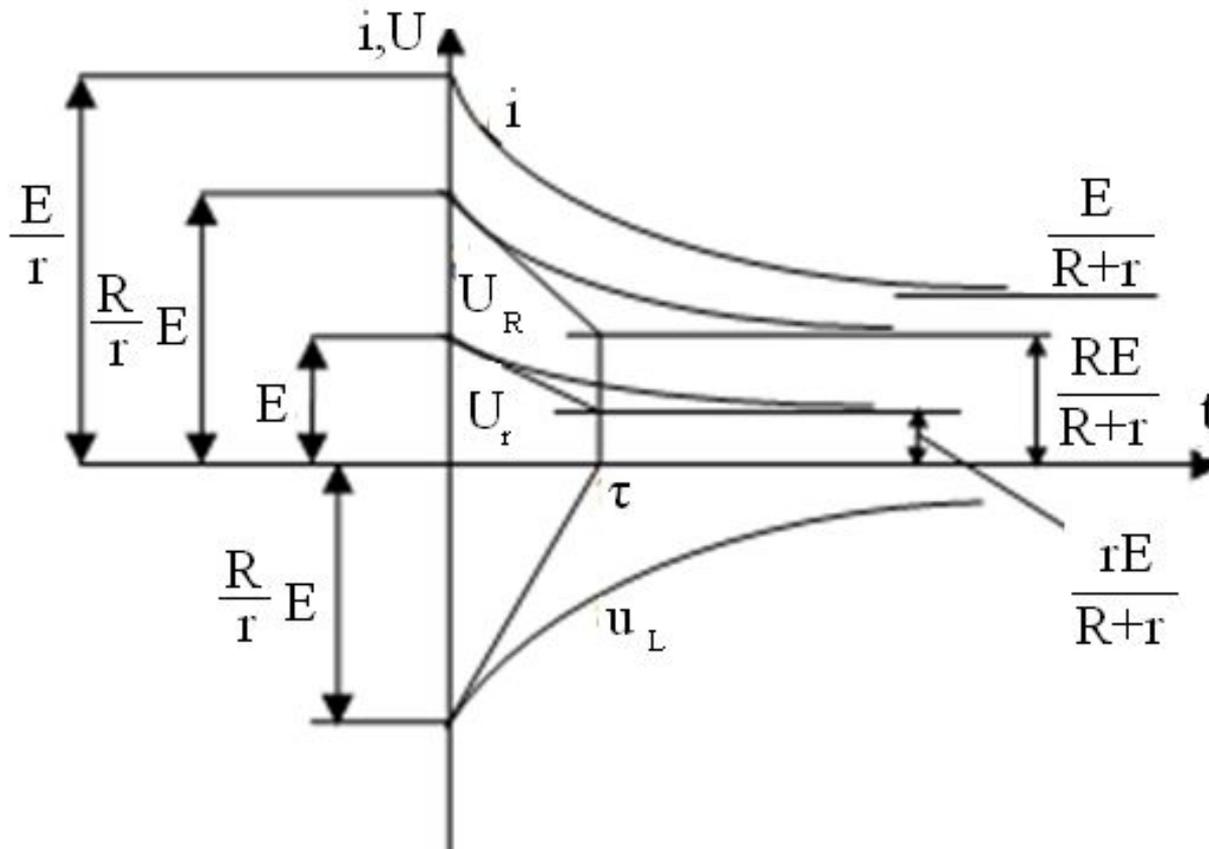


$$A = \frac{E}{r} - \frac{E}{R+r} = \frac{rE}{R(R+r)}$$

$$i = \frac{E}{R+r} \left( 1 + \frac{r}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

*Рис. 5.5 Размыкание цепи с катушкой индуктивности*



$$U_R = Ri = \frac{RE}{R+E} \left(1 - \frac{r}{R} e^{-t/\tau}\right) \quad U_r = r i = \frac{rE}{R+r} \left(1 + \frac{r}{R} e^{-t/\tau}\right)$$

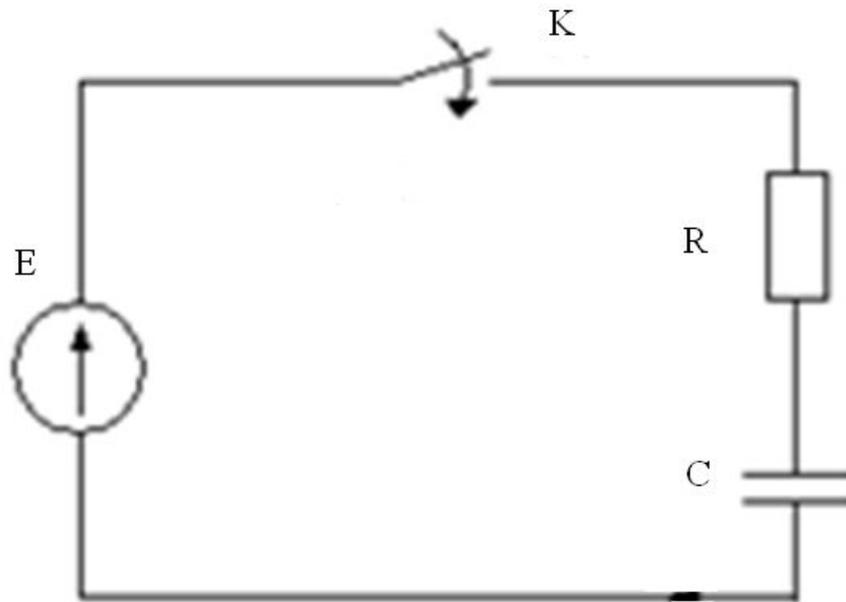
$$U_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{r}{R} E \cdot e^{-t/\tau}$$

Рис. 5.6 Изменение токов и напряжений и размыкание цепи

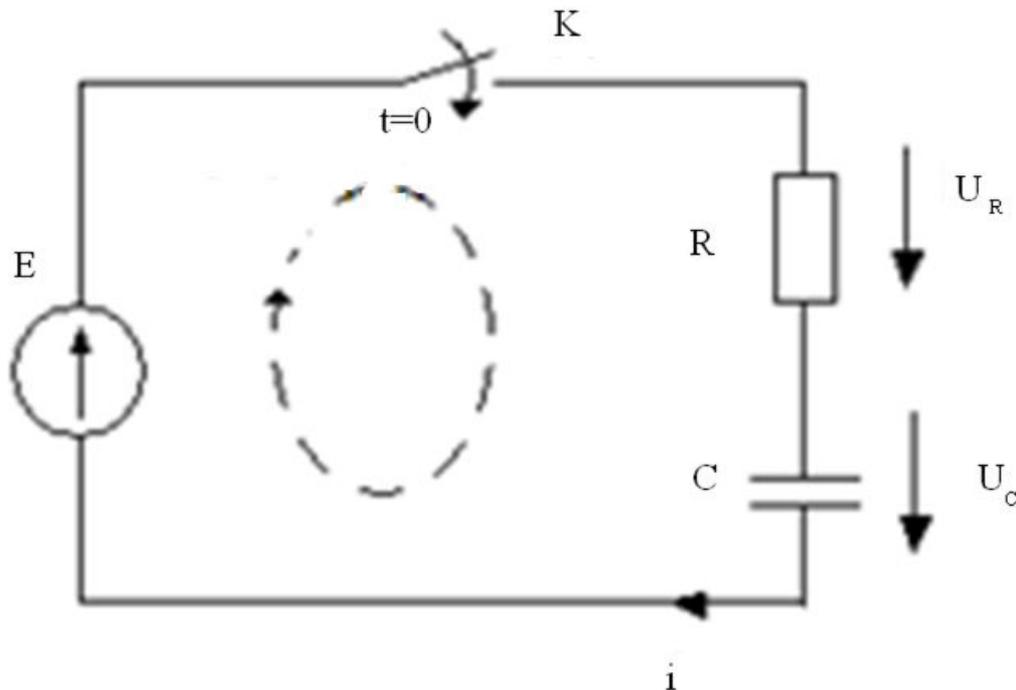
Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним емкостным элементом (цепи RC)

Проанализируем переходный процесс при замыкании ключа  $K(t=0)$ .

Для этого выберем положительные направления тока и напряжения и составим систему уравнений, описывающих состояние цепи на основе второго закона Кирхгофа, закона Ома и закона электромагнитной индукции.



*Рис. 5.7 Зарядка емкостного элемента от источника постоянного ЭДС через резистивный элемент*

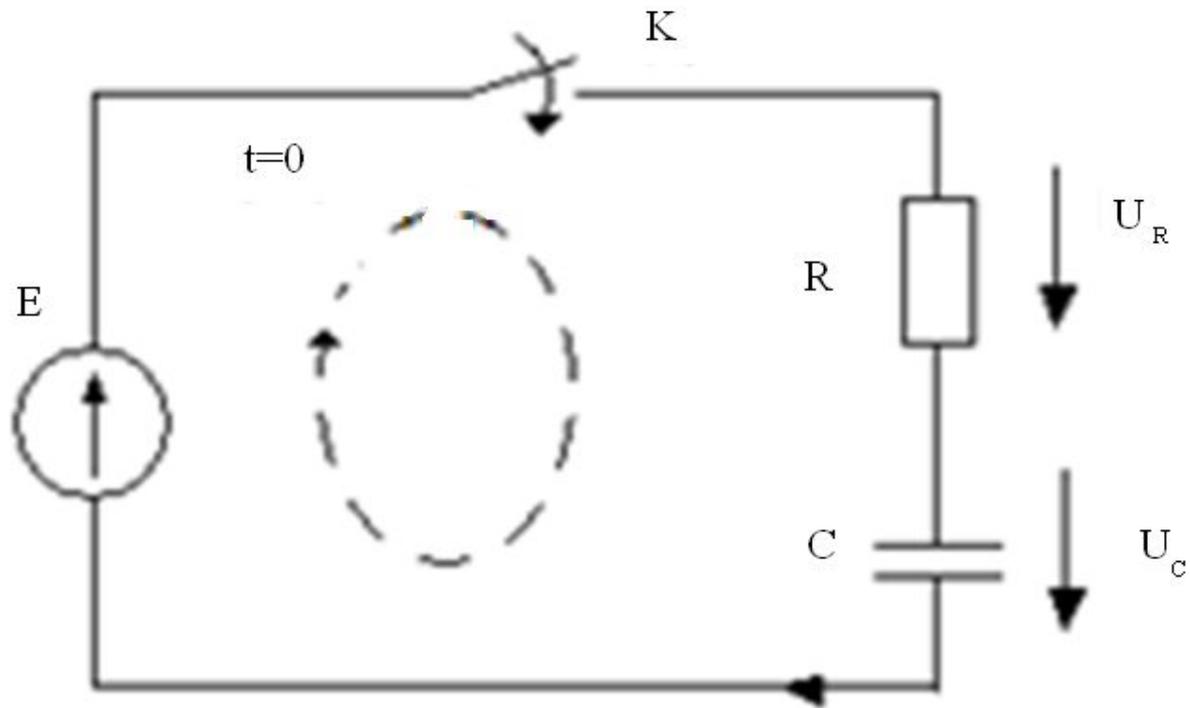


$$i = C \frac{dU_C}{dt}$$

$$U_R + U_C = Ri + U_C = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = E; U_C = U_{Cy} + U_{Ccb};$$

Исключая переменные  $U_R$  и  $U_C$  получим однородное дифференциальное уравнение  $\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$ .

*Рис. 5.7* Зарядка емкостного элемента от источника постоянного ЭДС через резистивный элемент



$$RCP + 1 = 0;$$

$$U_C = U_{cy} + U_{cb} = E + A e^{-t/RC}$$

$$U_C(t-) = U_C(t+)$$

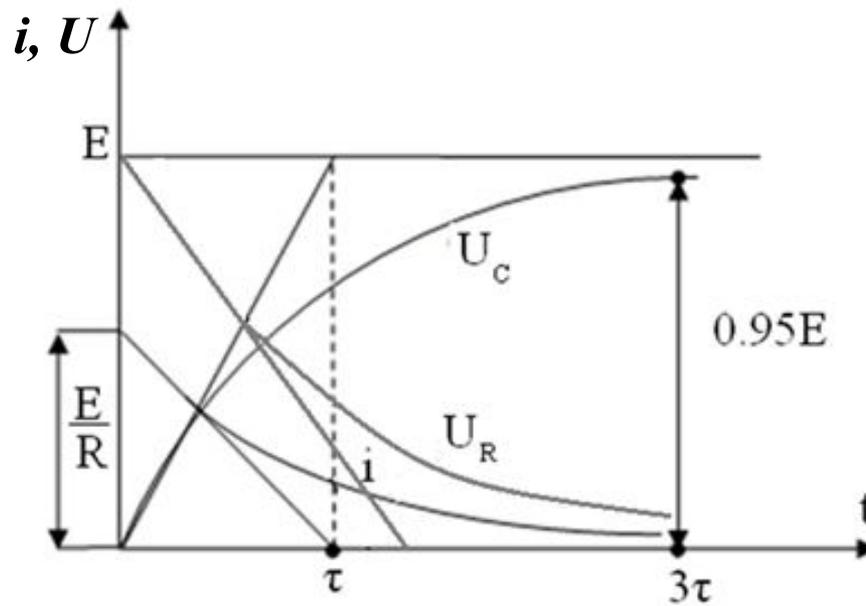
$$U_C(0-) = 0 = U_C(0+) = E + A$$

$$A = -E;$$

$$U_{C_{cb}} = A e^{Pt}, \text{ где } P = -1/RC;$$

$$R_C \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

Рис. 5.7 Зарядка емкостного элемента от источника постоянного ЭДС через резистивный элемент

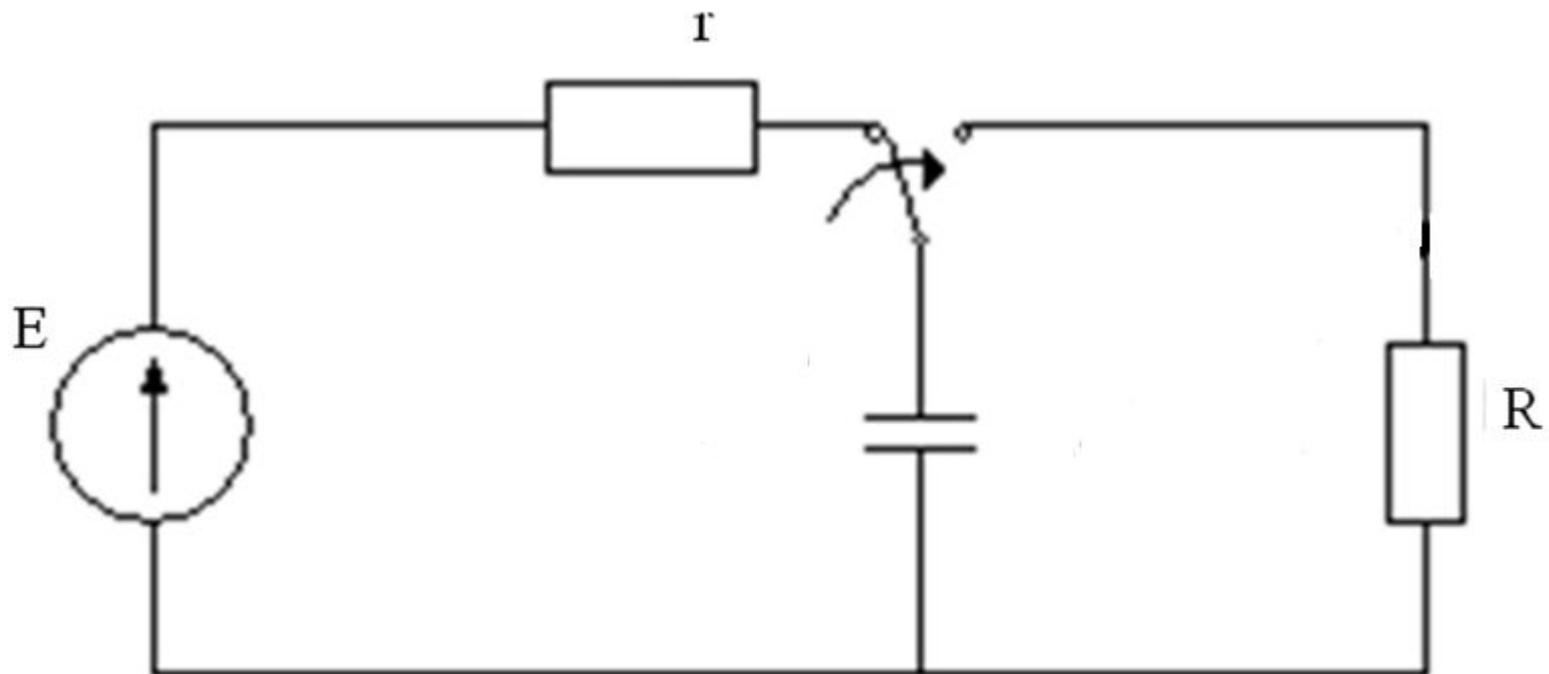


$$U_C = E \left( 1 - e^{-t/\tau} \right), \quad \text{где } \tau = RC \text{ — постоянная времени цепи}$$

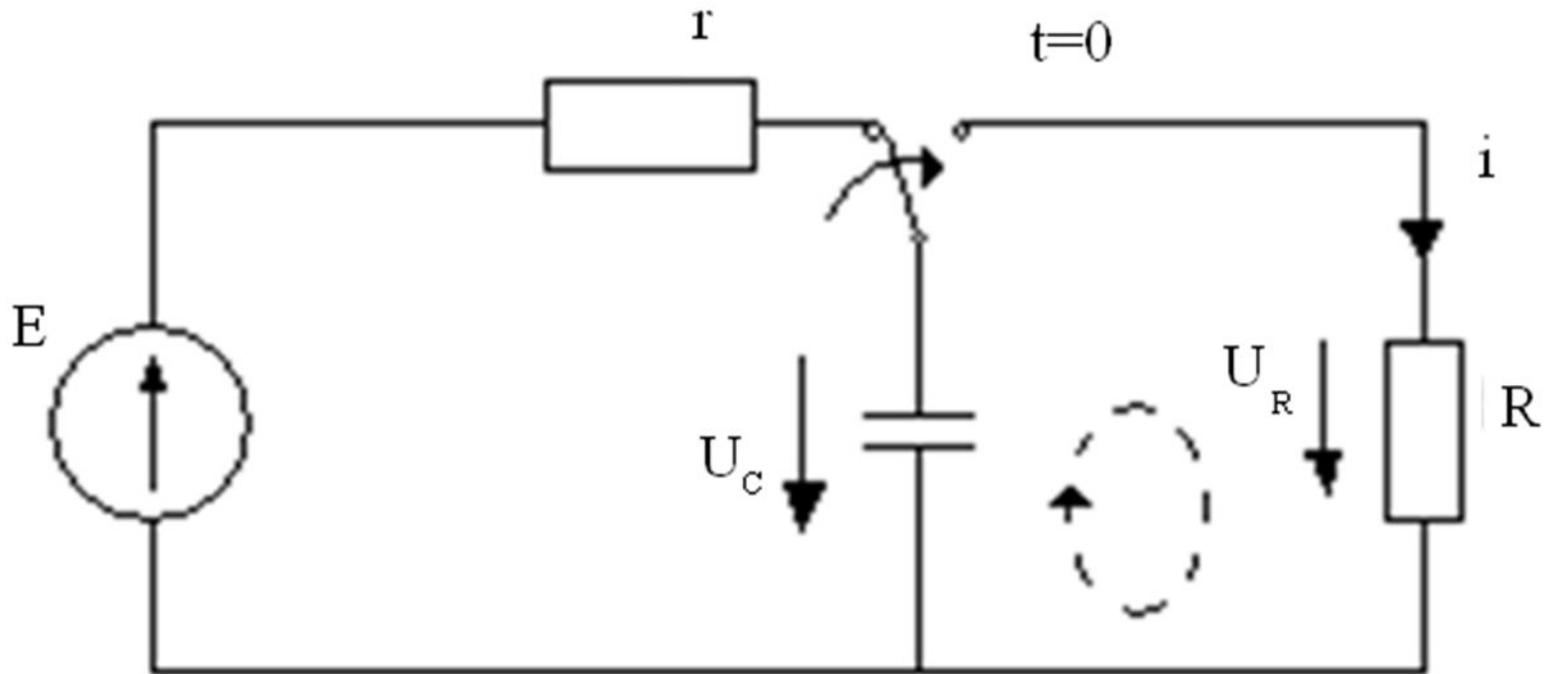
$$i_C = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$U_R = R \cdot i = E e^{-t/\tau}$$

Рис. 5.8 Изменение токов и напряжений при зарядке конденсатора



*Рис. 5.9 Разрядка емкостного элемента через резистивный элемент*



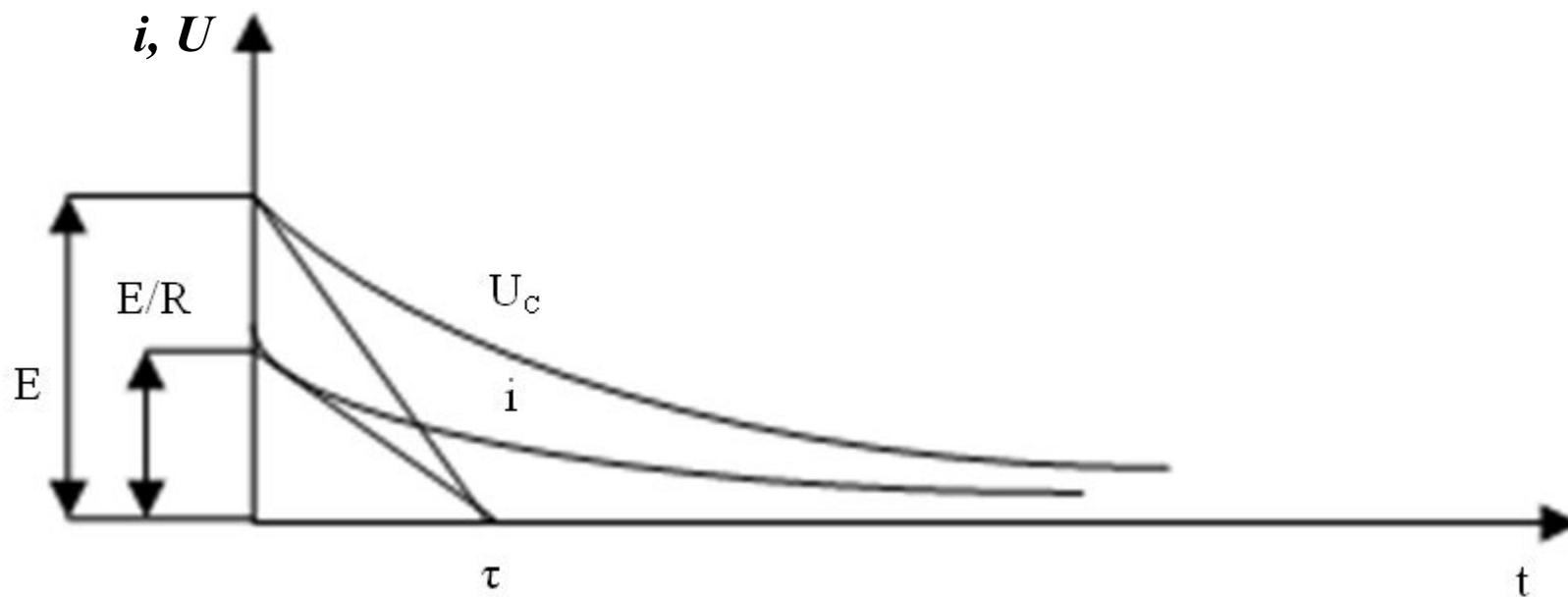
$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU_C}{dt};$$

$$U_{C_{CB}} = Ae^{-t/(RC)};$$

$$U_R - U_C = R \cdot i - U_C = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0;$$

$$U_C(0-) = E = U_C(0+) = A;$$

*Рис. 5.9 Разрядка емкостного элемента через резистивный элемент*

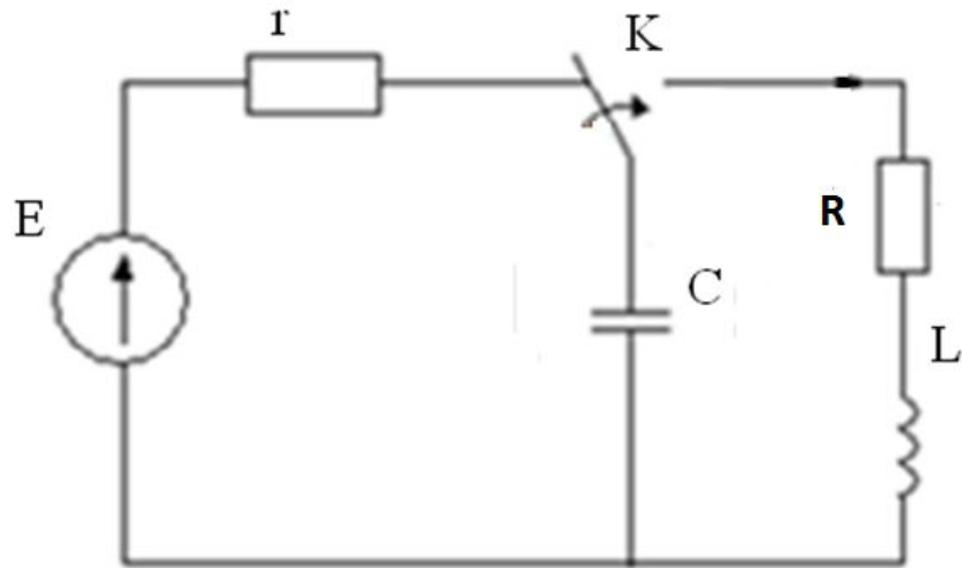


$$U_C = E e^{-t/\tau} \text{ где } \tau = RC;$$

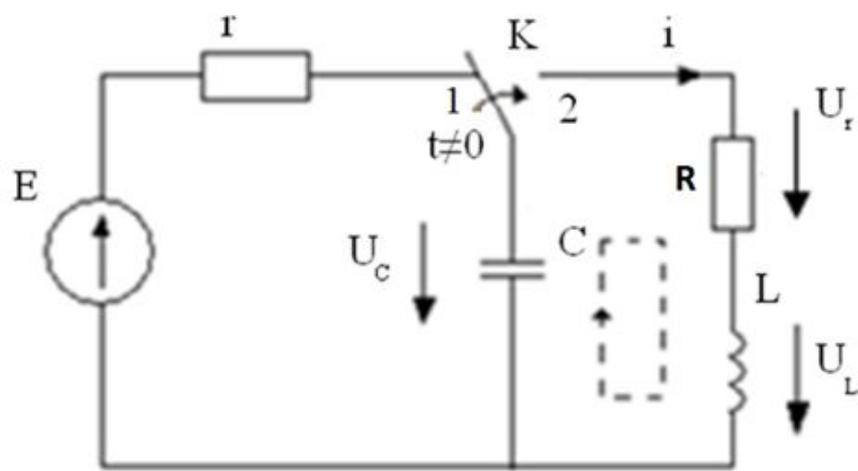
$$i = -C \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau};$$

*Рис. 5.10 Изменение токов и напряжений при разрядке конденсатора*

Переходные процессы в цепи постоянного тока с резистивным, емкостным и индуктивными элементами.



*Рис. 5.11 Разрядка емкостного элемента в цепи с  $R$  и  $L$*



$$-U_C + U_R + U_L = -U_C + R_i + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$i = -C \frac{dU_C}{dt}$$

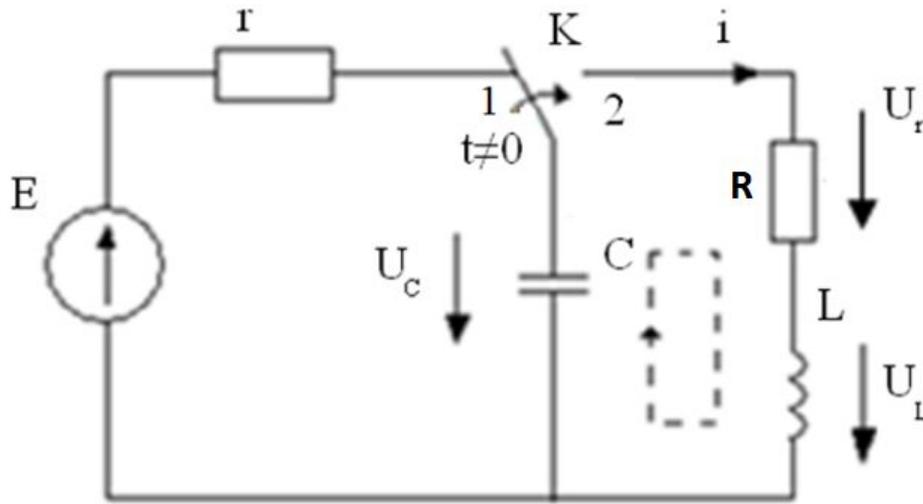
$$U_C = U_{C_{CB}} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \text{ — корни х. у.}$$

Рис. 5.11 Разрядка емкостного элемента в цепи с R и L



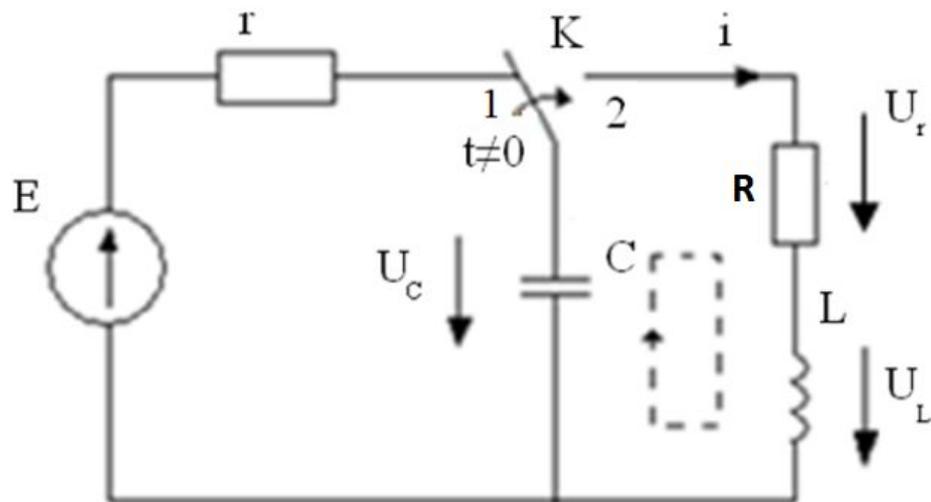
$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \text{ — аperiodический процесс;}$$

$$P_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0;$$

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \text{ — колебательный характер;}$$

$$\delta = R/2L \text{ — коэффициент затухания;}$$

Рис. 5.11 Разрядка емкостного элемента в цепи с R и L

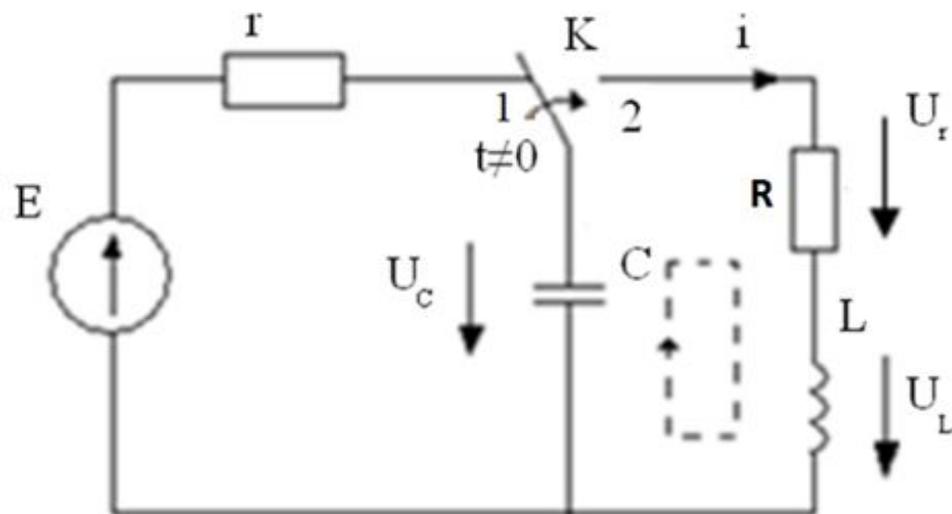


$\omega_0 = \sqrt{1/(LC - \delta^2)}$  – обобщенная угловая частота колебательного процесса;

$$U_C = e^{-\delta t}(A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t});$$

$$i = -C \frac{dU_C}{dt} = -C e^{-\delta t} [-\delta(A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}) + j\omega_0(A_1 e^{j\omega_0 t} - A_2 e^{-j\omega_0 t})];$$

Рис. 5.11 Разрядка емкостного элемента в цепи с R и L

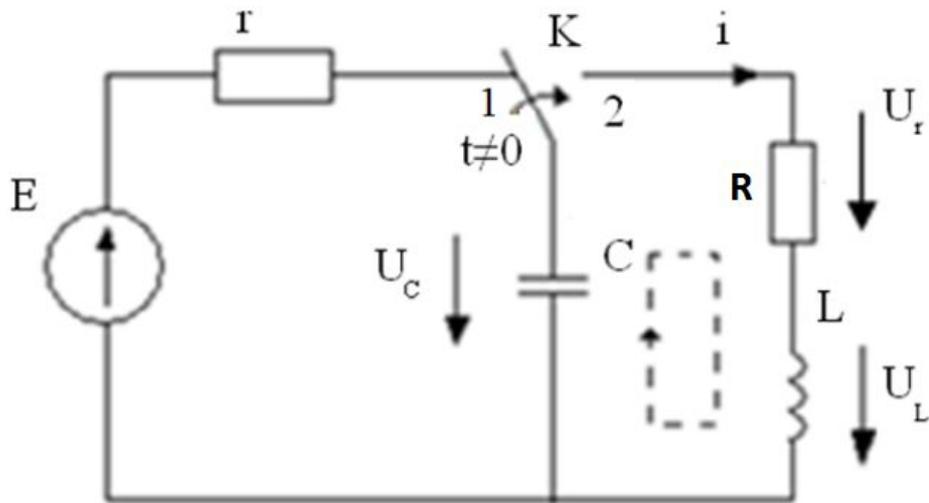


$$U_c(0^-) = E = U_c(0^+) = A_1 + A_2$$

$$i(0) = 0 = i(0^+) = C[\delta(A_1 + A_2) - j\omega_0(A_1 - A_2)];$$

$$A_1 = E \frac{(\delta + j\omega_0)}{2j\omega_0}; A_2 = E \frac{(j\omega_0 - \delta)}{2j\omega_0}$$

Рис. 5.11 Разрядка емкостного элемента в цепи с R и L

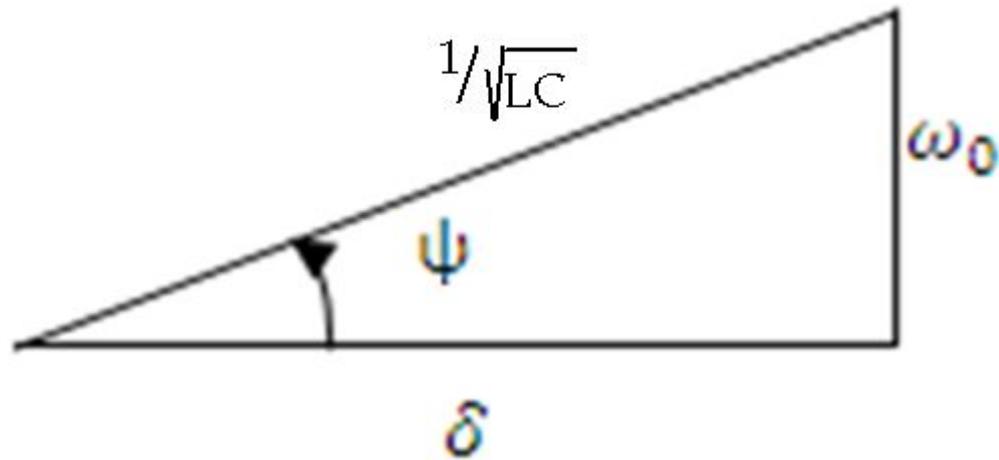


$$U_C = \frac{E}{\omega_0} e^{-\delta t} (\omega_0 \cos \omega_0 t + \delta \sin \omega_0 t)$$

$$U_C = \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi) \quad \text{— учитывая формулу Эйлера}$$

$$e^{\pm \omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm j \sin \omega_0 t$$

Рис. 5.11 Разрядка емкостного элемента в цепи с R и L



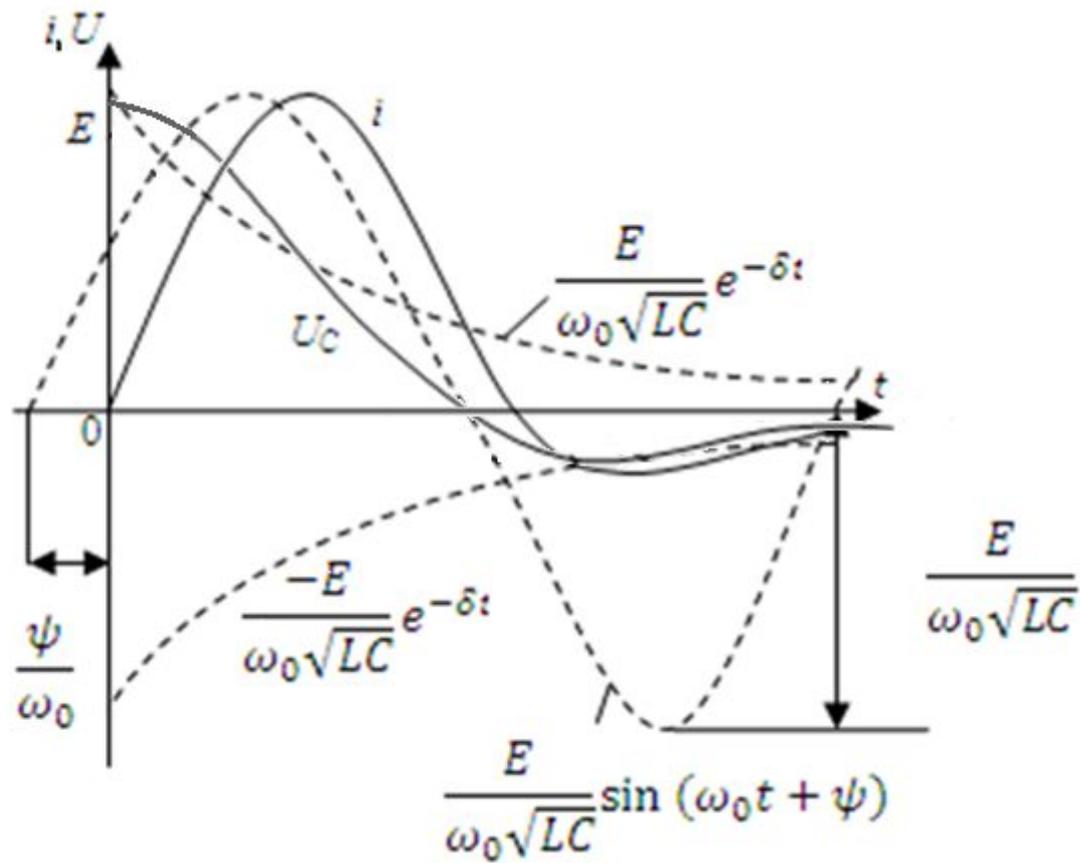
$$\omega_0 / \delta = \operatorname{tg} \Psi;$$

$$\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} = \sqrt{1/(LC - \delta^2 + \delta^2)} = 1/\sqrt{LC}; \text{ Разделив и умножив выражения для } U_C \text{ на } 1/\sqrt{LC};$$

$$U_C = E \omega_0 L C e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 t + \Psi); \quad U_C = (E/\omega_0 \sqrt{LC})^{-\delta t} e \operatorname{Sin}(\omega_0 t + \Psi)$$

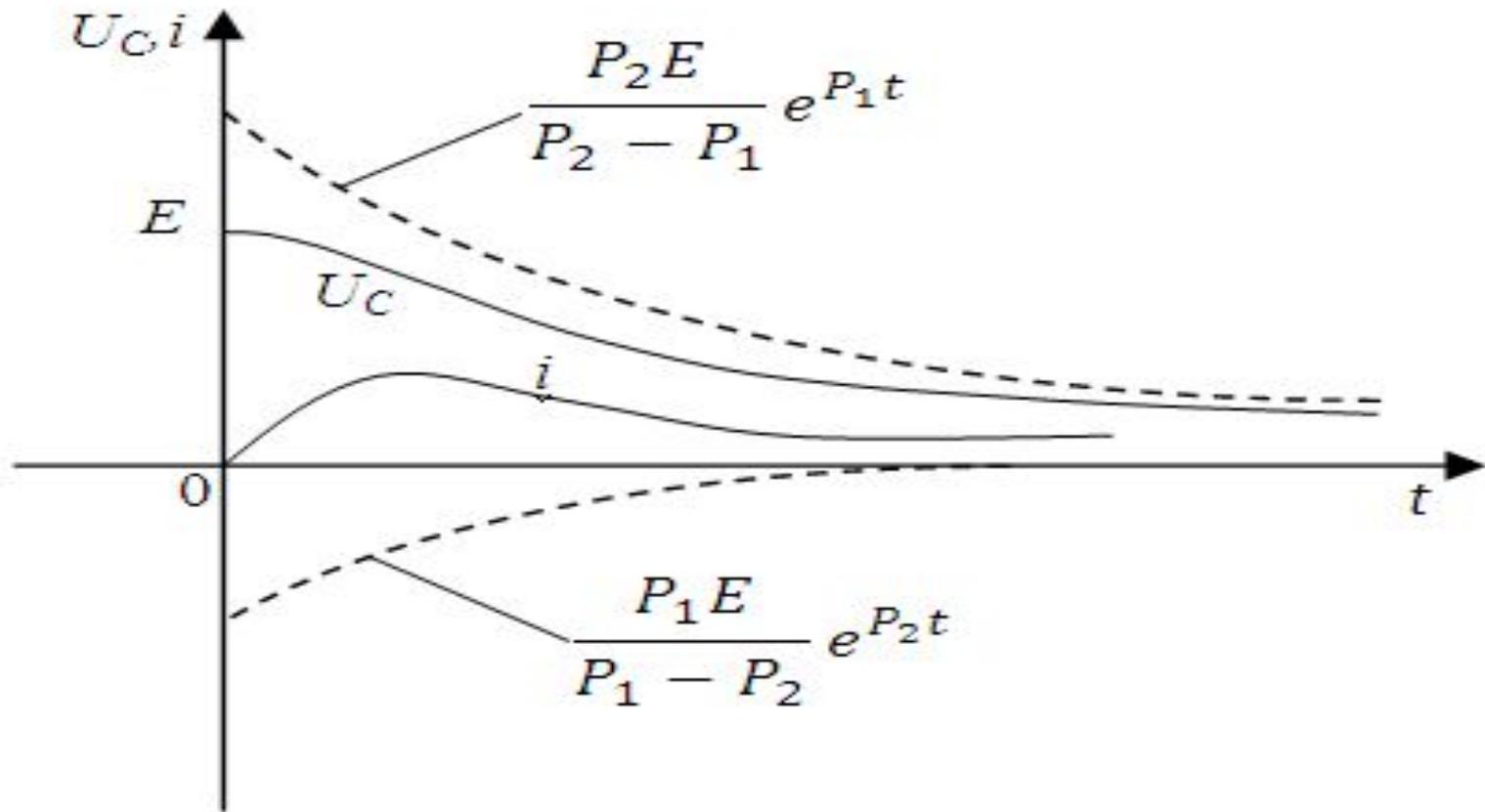
$$i = -C \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta} \sin \omega_0 t$$

Рис. 5.12 Прямоугольный треугольник с катетами  $\omega$  и  $\sigma$



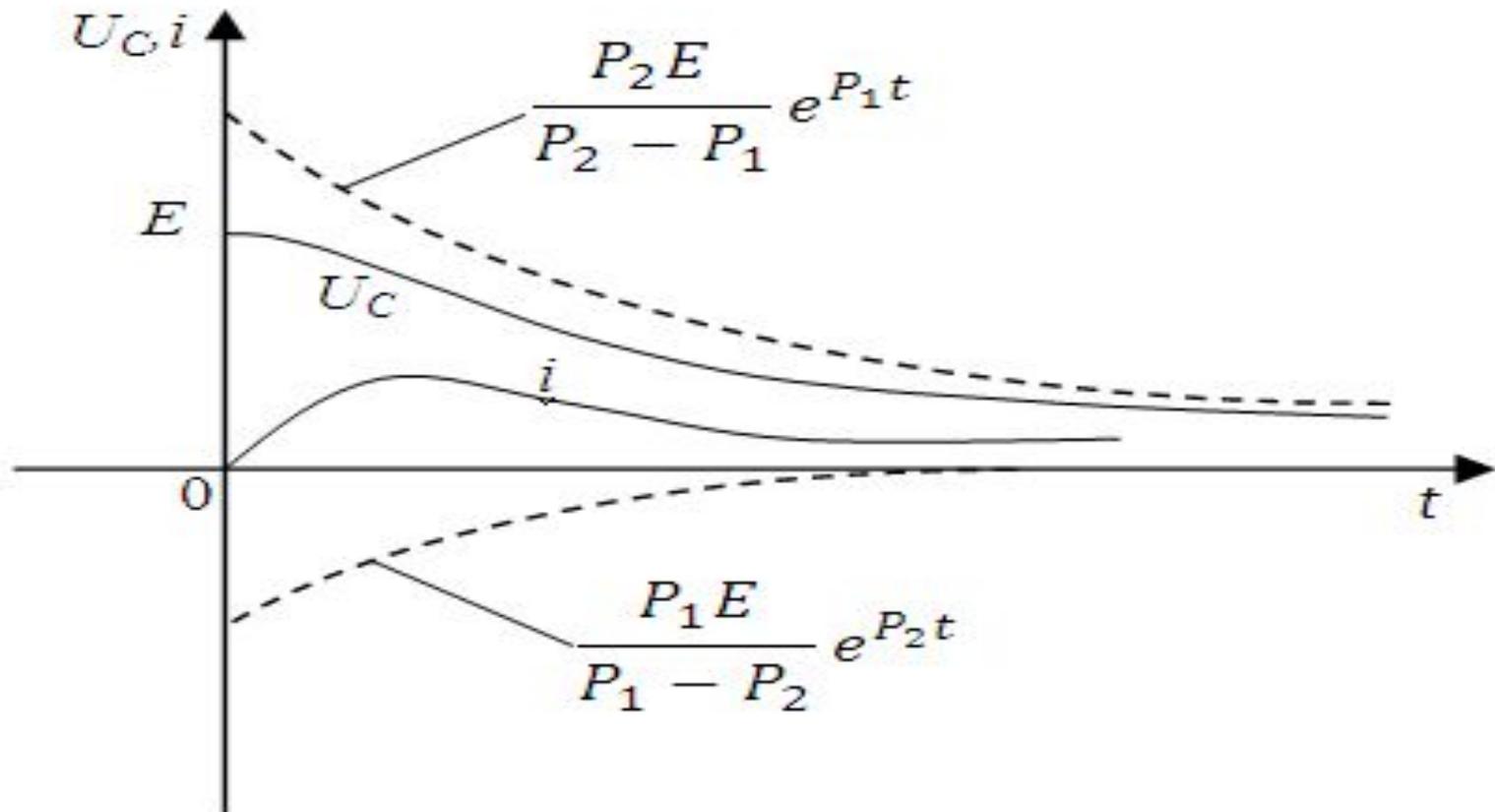
$$\tau = 1/\delta = \frac{2L}{R}$$

Рис. 5.13 Изменение токов и напряжений при колебательном процессе разрядки



$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}; P_2 < P_1 < 0;$$

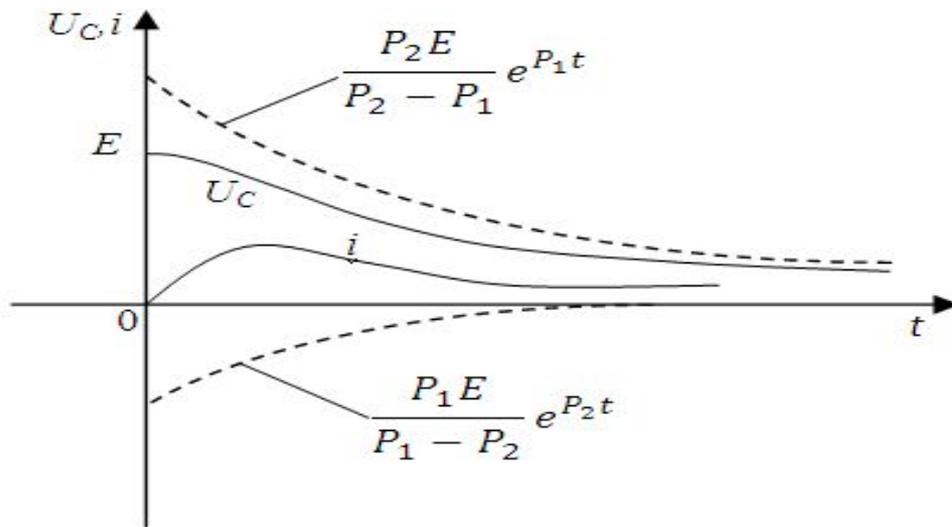
Рис. 5.14 Изменение токов и напряжений при аperiodическом режиме разрядки



$$i(0-) = 0 = i(0+) = -C \frac{dU_C}{dt} \Big|_{t=0} = -C(P_1 A_1 + P_2 A_2);$$

$$U_C(-0) = E = U_C(0+) = A_1 + A_2;$$

Рис. 5.14 Изменение токов и напряжений при апериодическом режиме разрядки



$$A_1 = \frac{P_2 E}{P_2 - P_1} > 0 \quad A_2 + \frac{P_1 E}{P_1 - P_2} < 0 ; \quad U_C = \frac{P_2 E}{P_2 - P_1} e^{P_1 t} + \frac{P_1 E}{P_1 - P_2} e^{P_2 t};$$

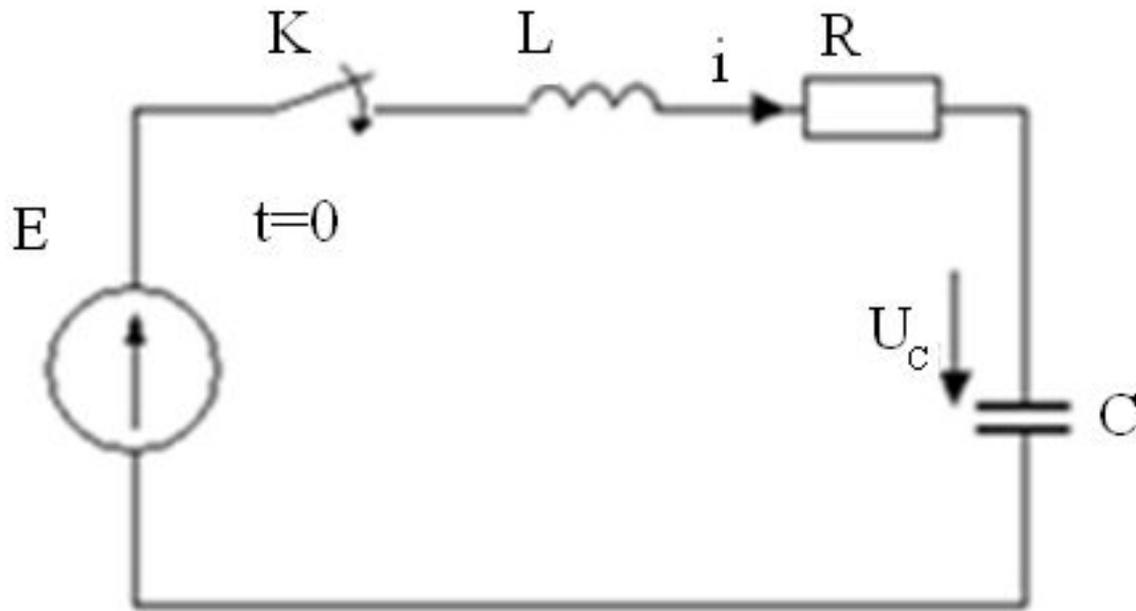
$$i = -C \frac{dU_C}{dt} = \frac{P_1 P_2 E C}{P_2 - P_1} (e^{P_1 t} - e^{P_2 t});$$

При  $R^2/(4L^2) = 1/(LC)$ ;  $P_1 = P_2 = P = -R/2L$

$$U_C = (A_1 + A_2 t) e^{Pt}$$

$$UC = \left[ \left( 1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{-\frac{R}{2L} t} \right] i = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L} t}$$

Рис. 5.14 Изменение токов и напряжений при аperiodическом режиме разрядки



$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = E$$

$$U_{Cy} = E; U_C = E + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t};$$

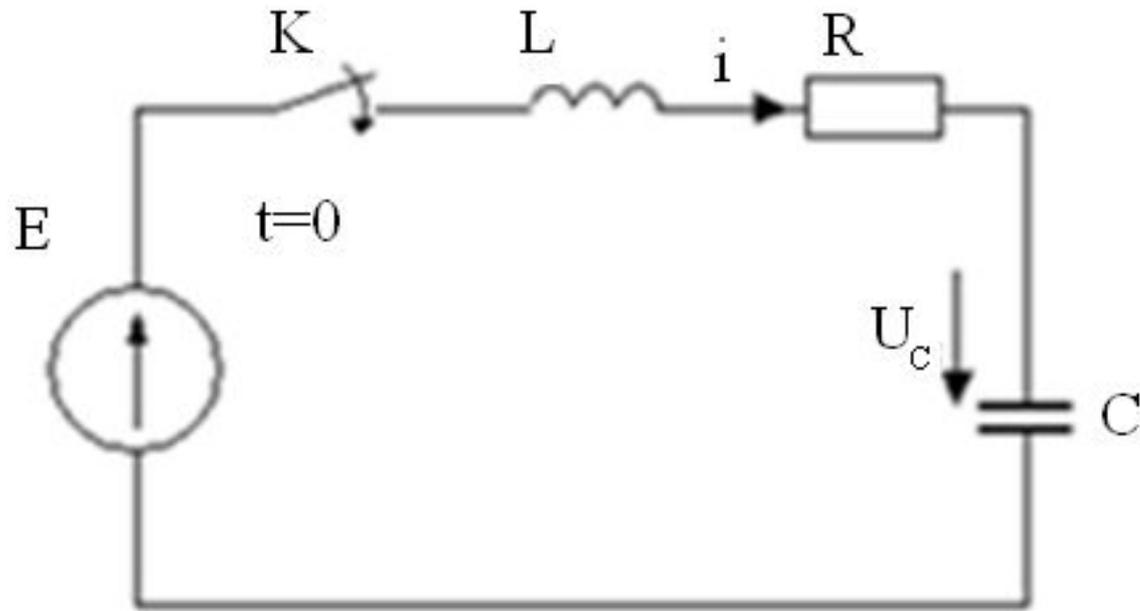
$$U_C = U_{Cy} + U_{C_{CB}}; U_{C_{CB}} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}.$$

$$i = C \frac{dU_C}{dt} = P_1 C A_1 e^{P_1 t} + P_2 A_2 e^{P_2 t};$$

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} \pm \frac{1}{LC}} \text{ корни х. у.}$$

$$U_C(-0) = 0 = U_C(0+) = E + A_1 + A_2;$$

*Рис. 5.15 Подключение неразветвленной цепи с R, L, C элементами к источнику постоянной ЭДС*



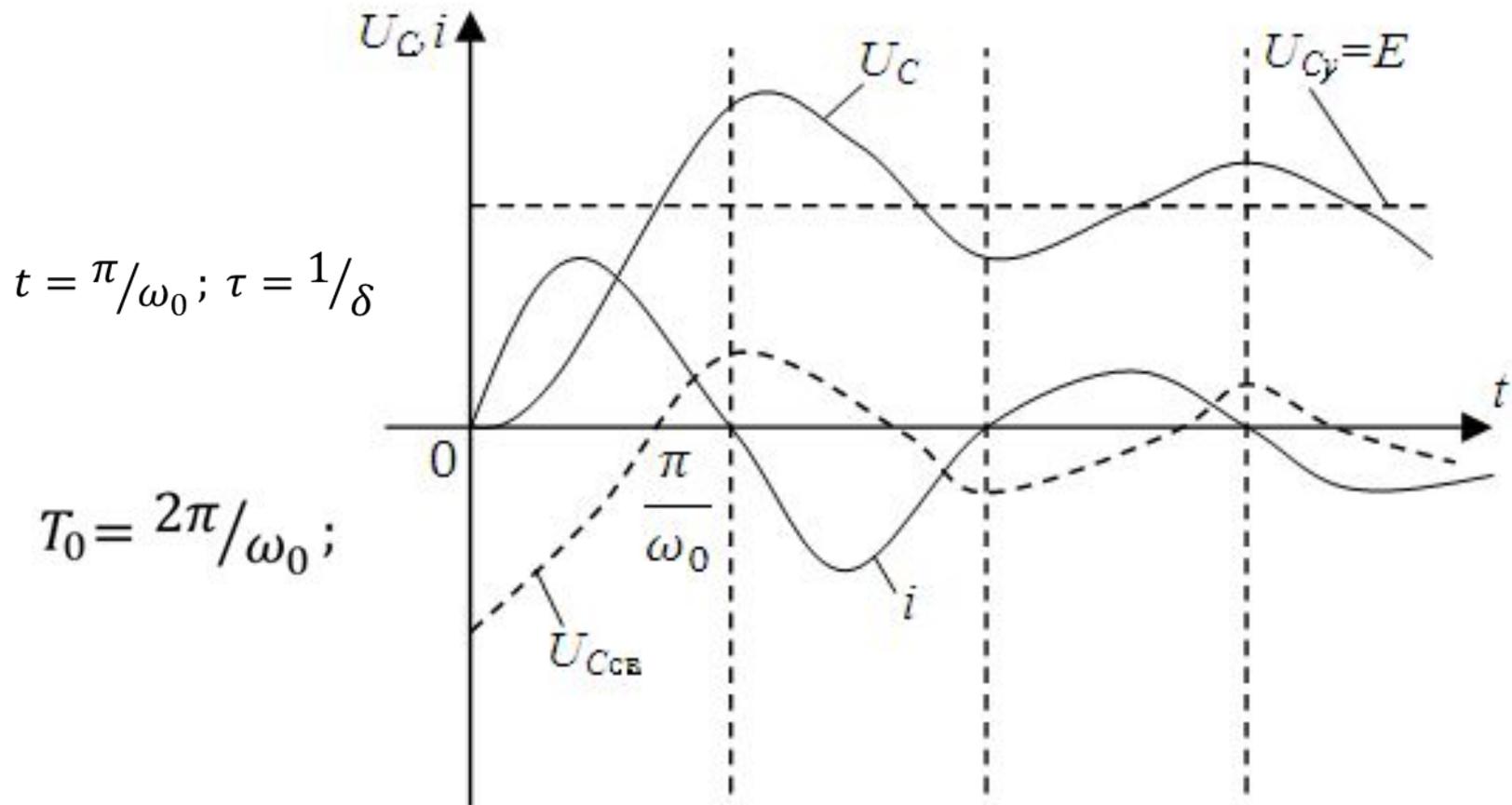
$$i(-0) = 0 \quad i(0+) = P_1 A_1 + P_2 A_2;$$

$$A_1 = P_2 E / (P_1 - P_2); \quad A_2 = P_1 E / (P_2 - P_1)$$

$$P_{12} = -\delta \pm j\omega_0, \text{ где } \delta = R/2L \text{ — коэф. затухания.}$$

$$\omega_0 = \sqrt{1/(LC - \delta^2)} \text{ — собственная угловая частота колебательных процессов.}$$

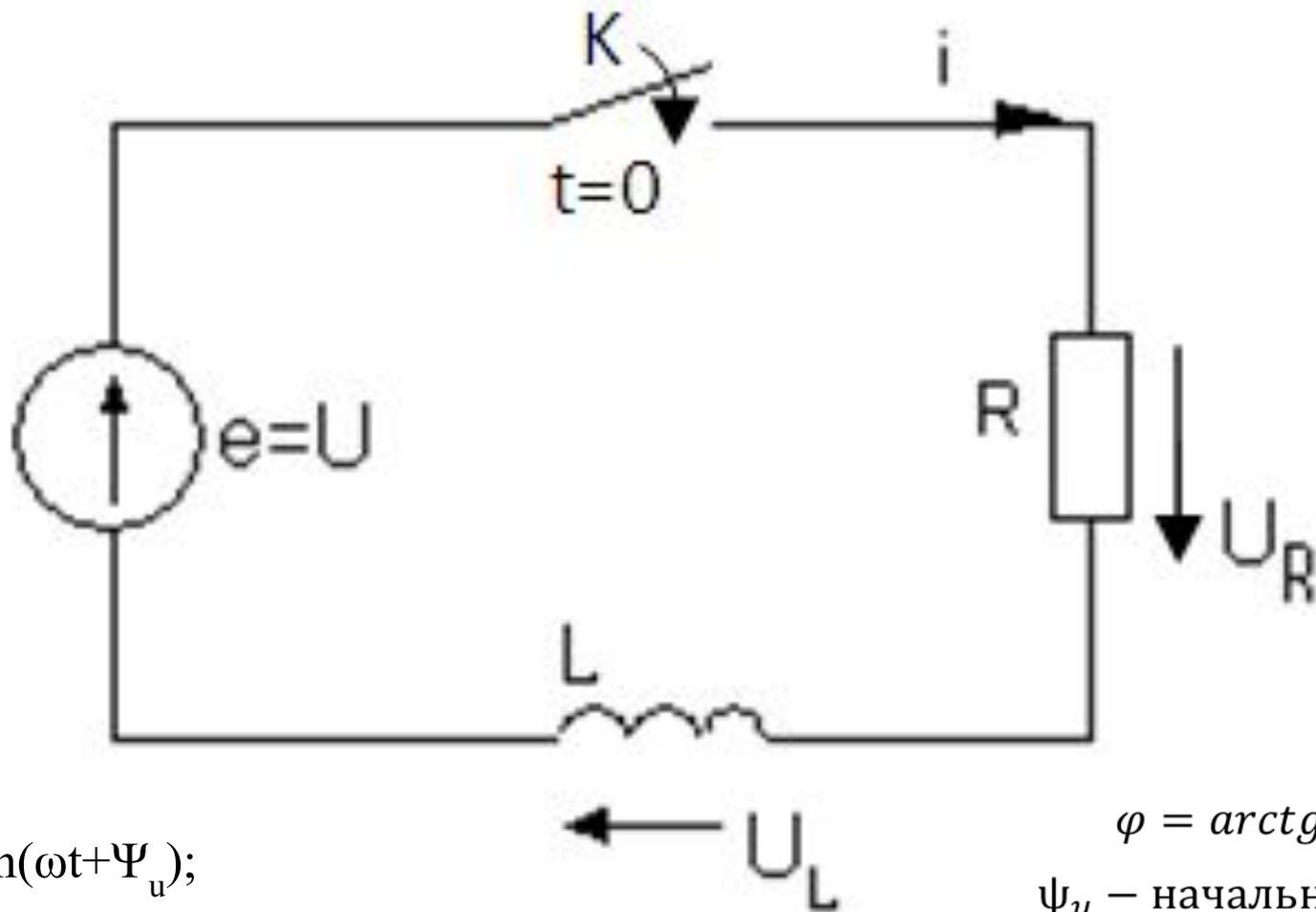
*Рис. 5.15 Подключение неразветвленной цепи с R, L, C элементами к источнику постоянной ЭДС*



$$U_C = U_{C_y} + U_{C_{св}} = E - \frac{E}{\omega_0 \sqrt{LC}} \times e^{-\delta t(\sin \omega_0 t + \psi).};$$

$$i = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\delta t(\sin \omega_0 t).};$$

Рис. 5.16 Изменение тока и напряжений в цепи R,L,C



$$e=u=u_m \sin(\omega t + \Psi_u);$$

$$i_y = I_m \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi);$$

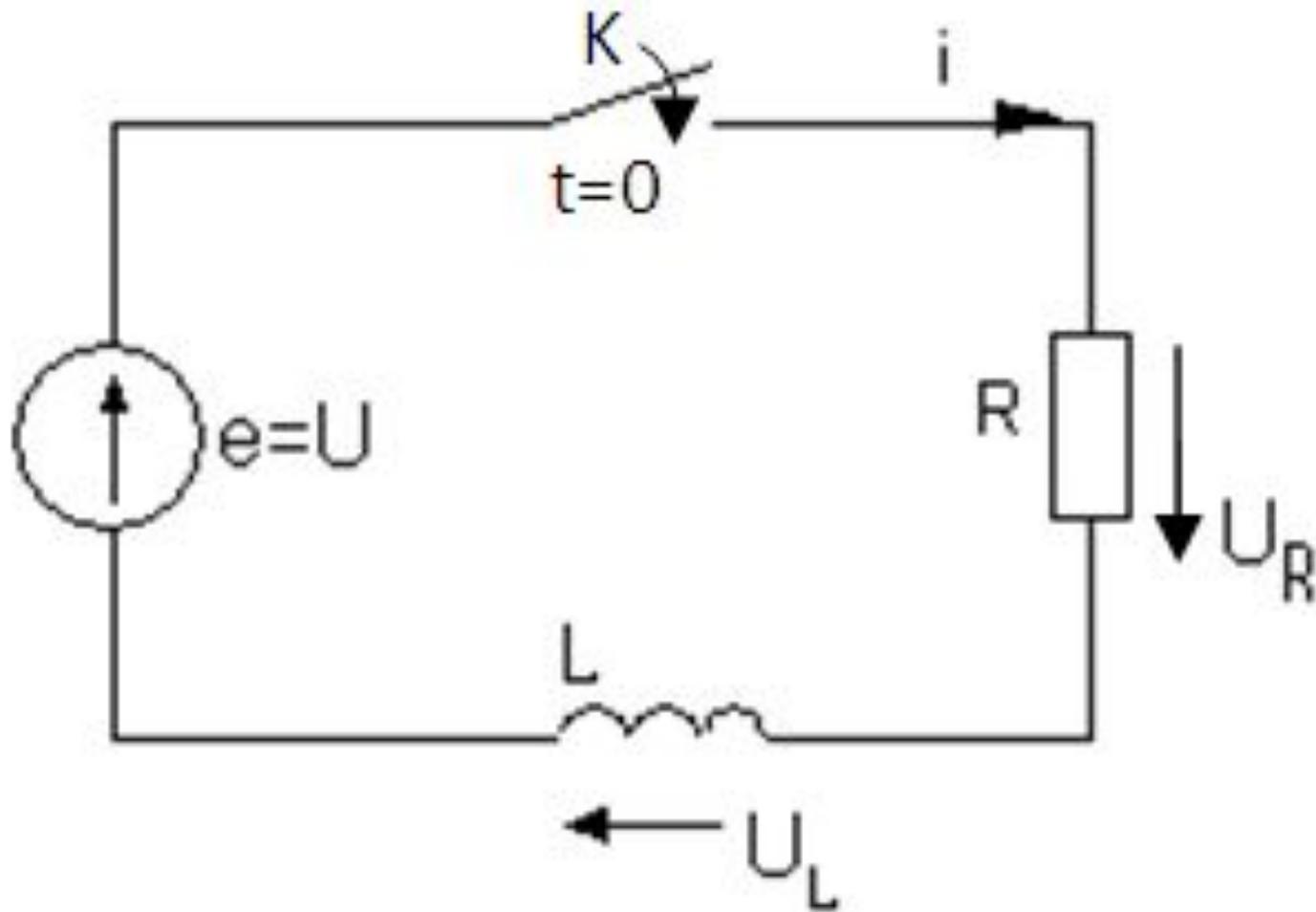
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R};$$

$\Psi_u$  – начальная фаза.

$$U_L + U_R = L \frac{di}{dt} + Ri = e$$

Рис. 5.17 Подключение неразветвленной цепи с  $R$  и  $L$  к источнику синусоидальной ЭДС

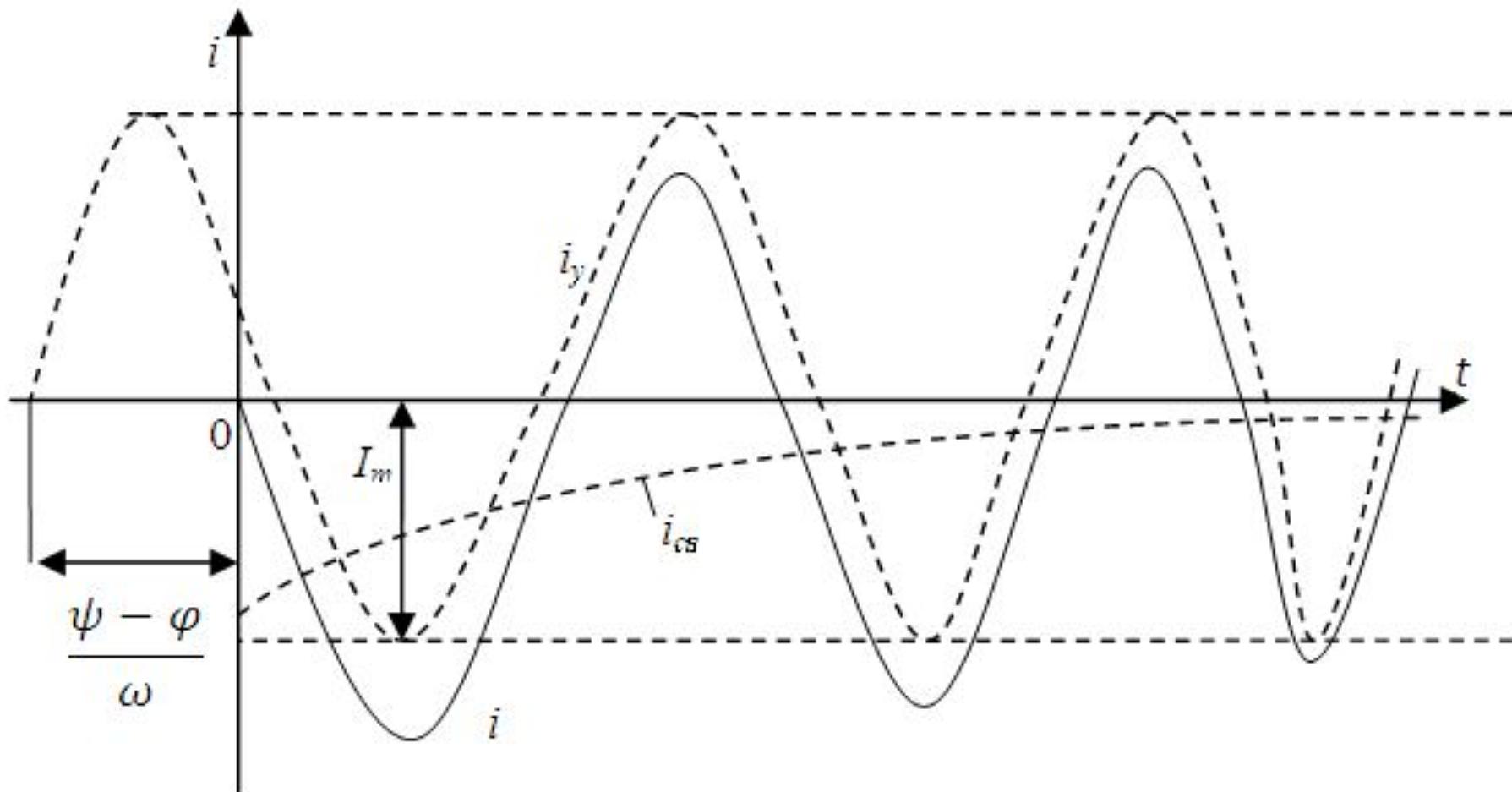


$$i = i_{\text{св}} + i_y = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-R/L};$$

$$A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi);$$

$$i = (0-) = 0 = i(0+) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A;$$

Рис. 5.17 Подключение неразветвленной цепи с  $R$  и  $L$  к источнику синусоидальной ЭДС



$$i = i_y + i_{cs} = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-t/\tau}; \quad \tau = L/R$$

Рис. 5.18 Изменение синусоидальной с свободной составляющей тока

#### 4.6. Пример расчёта переходных процессов в линейных электрических цепях

В цепи постоянного тока (рис. 5.19) происходит коммутация.

Дано:  $R_1 = R_2 = 5 \text{ Ом}$ ;  $L = 10 \text{ мГц}$ ;  $U = 10 \text{ В}$ . Определить ток  $i(t)$  в цепи и напряжение на индуктивном элементе  $U_n(t)$  в переходном режиме классическим методом.

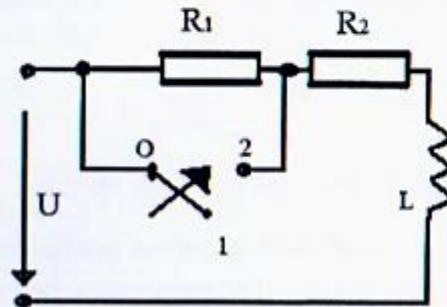


Рис. 5.19. Цепь постоянного тока

##### Решение

1. Определим начальные условия, т. е. ток  $i_L(-0)$  в индуктивном эле-

менте в докоммутационной цепи:  $i_L(-0) \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{10}{5+5} = 1 \text{ А}$ .

2. Составим по второму закону Кирхгофа уравнение и используя уравнения связи между мгновенным  $i(t)$  и  $u(t)$ , приведем его к дифференциальному виду, в котором неизвестным является искомый ток в цепи  $i(t) = i_L(t)$ :

$$U_L + U_{R_2} = U; L + R_2 I = U.$$

3. Находим решение дифференциального уравнения в виде суммы установившегося тока  $i_y$  и свободного тока  $i_{св}$ :  $i = i_y + i_{св}$ , где установившийся

постоянный ток в цепи  $i_y = U / R_2 = 10 / 5 = 2 \text{ А}$ , а свободный ток определяем из решения однородного дифференциального уравнения

$$L \frac{di_{св}}{dt} + R_2 i_{св} = 0$$

в виде  $i_{св} = A e^{Pt}$ , где  $P = -R_2/L = 5 \cdot 10^2$  — корень характеристического уравнения  $LP + R_2 = 0$ .

Таким образом, решение дифференциального уравнения принимает вид

$$i = i_y + A e^{-5 \cdot 10^2 t}.$$

4. Находим постоянную интегрирования  $A$  с учётом начального условия и закона коммутации:

$$i_L(-0) = i_L(+0) = 1 \text{ А}.$$

Подставив в решение дифференциального уравнения  $t = 0$  и найденное значение  $i(0) = 1$ , получим  $1 = 2 + A$ , откуда  $A = -1$ . В результате этого выражение для мгновенного тока в переходном режиме принимает вид

$$i = 2 - e^{5 \cdot 10^2 t} \text{ А}.$$

Подставив в уравнение связи  $U_L = L \frac{di}{dt}$  выражение для тока  $i$ , получим напряжение на индуктивном элементе в переходном режиме:

$$U_L = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^2 e^{-5 \cdot 10^2 t} \text{ В}.$$

Сократив, получим  $U_L = 5 e^{-5 \cdot 10^2 t} \text{ В}$ .

*Задания для  
самопроверки*

1. Цепь с последовательным соединением сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  включается под постоянное напряжение  $U$  (рис. 4.59).

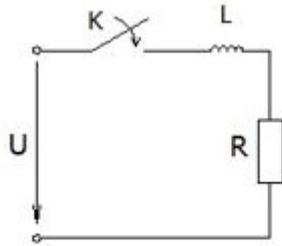


Рис. 4.59. Последовательное соединение резистора ( $R$ ) и индуктивности ( $L$ )

Указать характер изменения тока во времени  $i(t)$  при переходном процессе после включения (рис. 4.60).

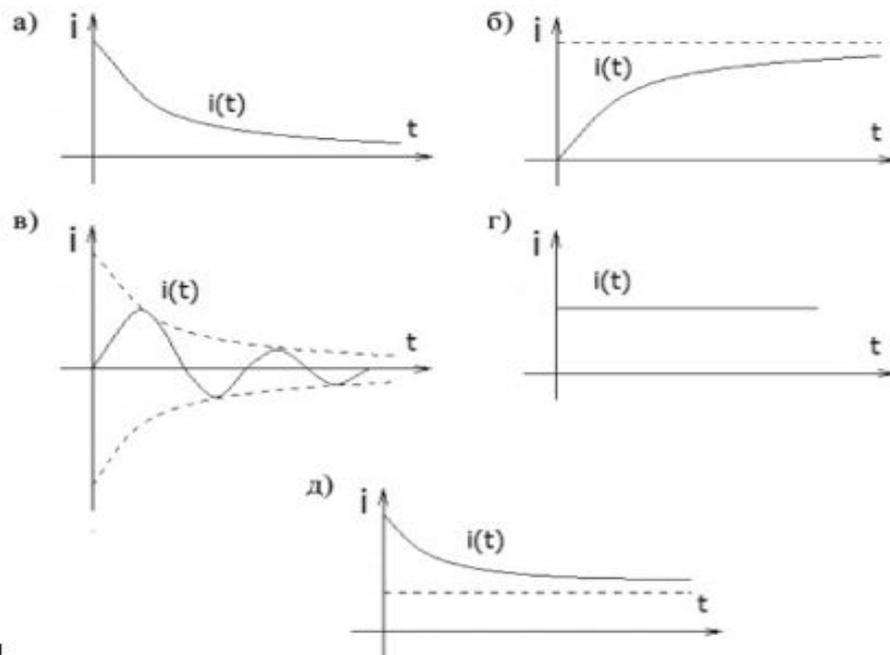


Рис. 4.60. Изменения тока во времени  $i(t)$  при переходном процессе после включения:  $a$  — 4 с;  $б$  —  $4 \cdot 10^{-3}$ с;  $в$  — 1 с;  $г$  —  $1 \cdot 10^{-4}$ с;  $д$  — 10 с

2. Цепь  $RL$ (см. рис. 4.59). Чему равно время переходного процесса, если  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $L = 100 \text{ мГн}$ ?

3. Цепь с последовательным соединением сопротивления  $R$  и емкости  $C$  включается под постоянное напряжение  $U$ (рис. 4.61).

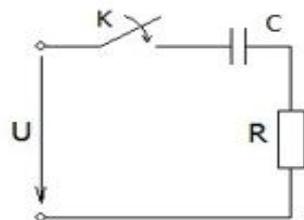


Рис. 4.61. Последовательное соединение резистора  $R$  и емкости  $C$

Указать характер изменения тока во времени  $i(t)$  при переходном процессе после включения (см. рис. 4.62).

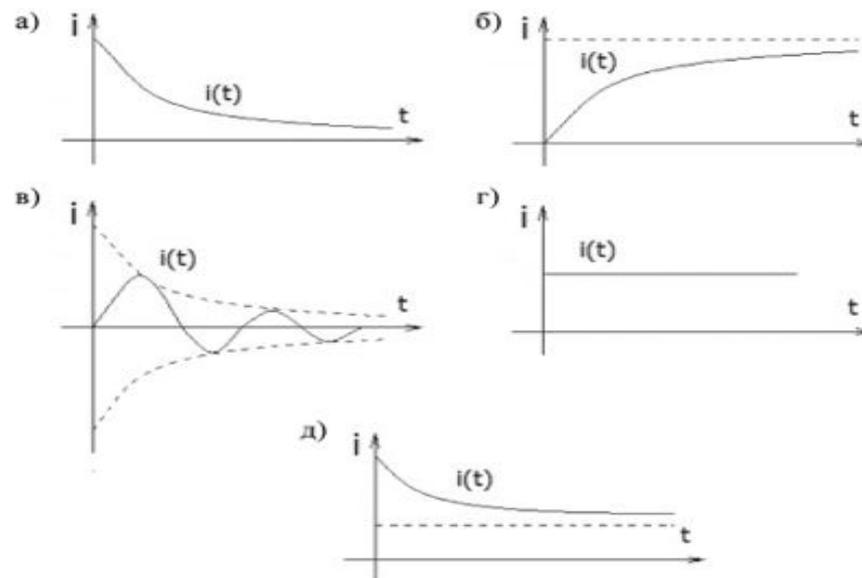


Рис. 4.62. Изменения тока во времени  $i(t)$  при переходном процессе после включения:  $a$  — 4 с;  $б$  —  $4 \cdot 10^{-3}$  с;  $в$  — 1 с;  $г$  —  $1 \cdot 10^{-4}$  с;  $д$  — 10 с

4. Цепь  $RC$  (см. рис. 4.61). Чему равно время переходного процесса, если  $R = 10$  Ом,  $C = 100$  мкФ?

5. В какой момент времени следует определять начальные условия:
- до коммутации;
  - после коммутации;
  - для ответа на вопрос недостаточно данных.

6. Как используют законы коммутации при расчете переходных процессов?

- для определения начальных условий;
- для определения принужденной составляющей процесса;
- для определения постоянной времени цепи;
- для определения постоянной интегрирования при решении дифференциального уравнения;
- для ответа на вопрос недостаточно данных.

7. Принужденный (установившийся) ток в цепи определяют:

- до коммутации в момент времени, непосредственно предшествующий моменту коммутации;

– после коммутации в момент времени, непосредственно следующий за моментом коммутации;

– после коммутации при времени стремящемся, к бесконечности;

– для ответа на вопрос недостаточно данных.

8. Начальные условия используют при расчете переходных процессов:

– для определения принужденной составляющей процесса;

– для определения постоянной времени цепи;

– для определения постоянной интегрирования при решении дифференциального уравнения;

– для составления дифференциального уравнения.

9. Укажите, какие две величины являются начальными условиями?

– ток в индуктивности и ток в сопротивлении в момент времени, непосредственно прилегающий к моменту коммутации;

– ток в индуктивности и ток в емкости в момент времени, непосредственно прилегающий к моменту коммутации;

– ток в индуктивности и напряжение на емкости в момент времени, непосредственно прилегающий к моменту коммутации;

– напряжение на индуктивности и напряжение на емкости в момент времени, непосредственно прилегающий к моменту коммутации.

10. Влияют ли начальные условия на характер переходных процессов?

– влияют;

– не влияют;

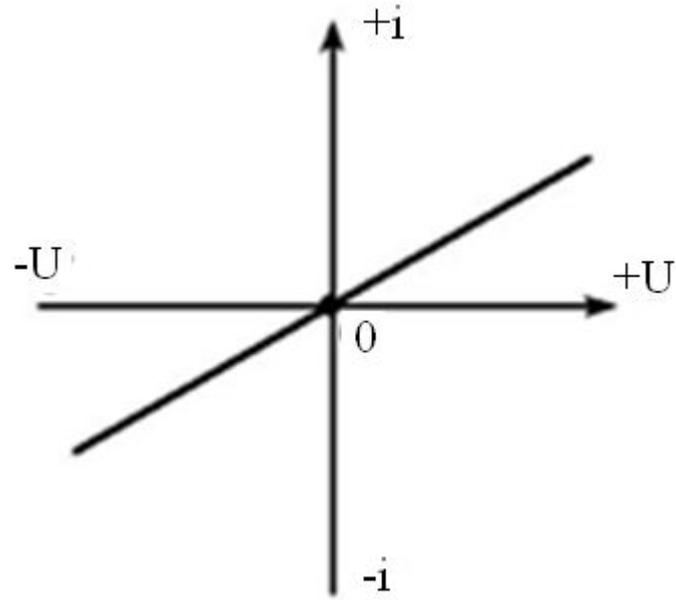
– влияют только при больших токах в индуктивностях и напряжениях на емкостях;

– для ответа на вопрос недостаточно данных.

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер правильного ответа	2	4	1	4	2	1	2	1	3	1

# VI Нелинейные электрические цепи

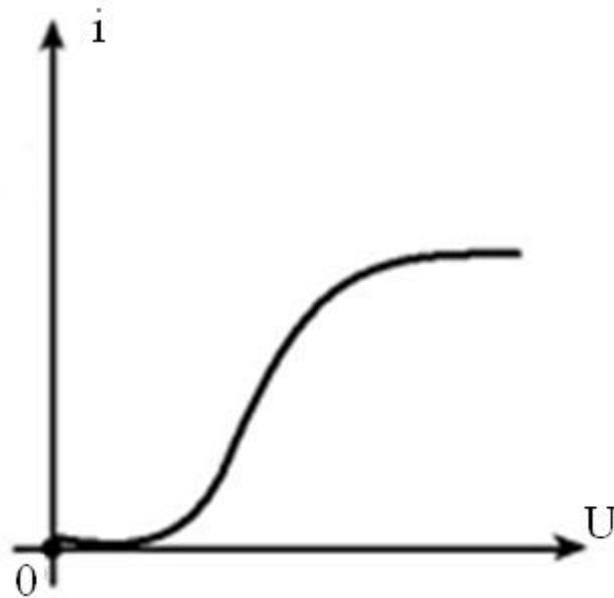
*Цепь называется нелинейной, если она содержит, хотя бы один нелинейный элемент.*



a)

$$i = \frac{1}{R}U = a_1U \quad i = a_1(U_1 + U_2) = a_1U_1 + a_1U_2 = i_1 + i_2 \quad \text{-Принцип наложения}$$

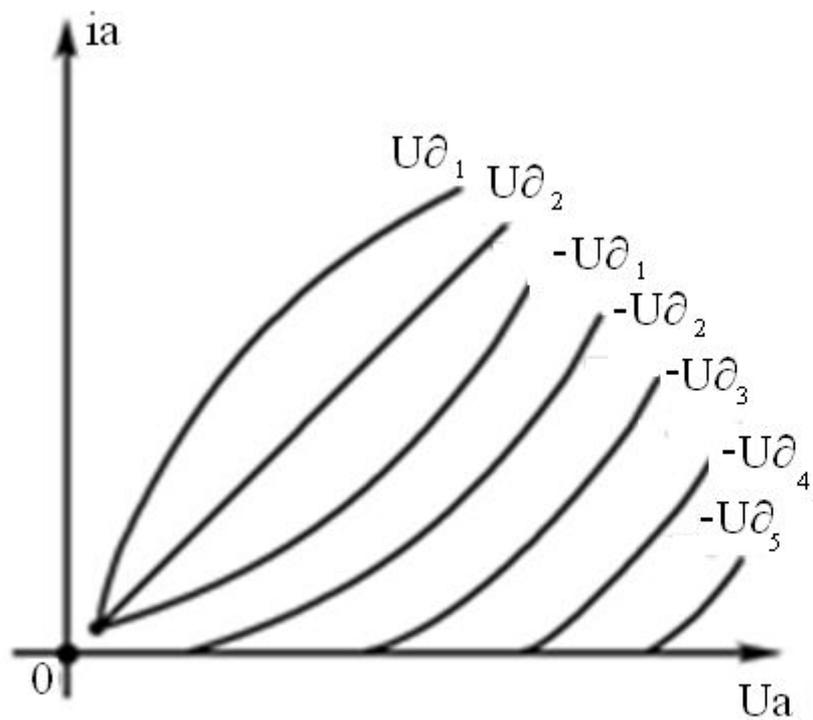
Рис. 6.1. ВАХ: а) линейного элемента



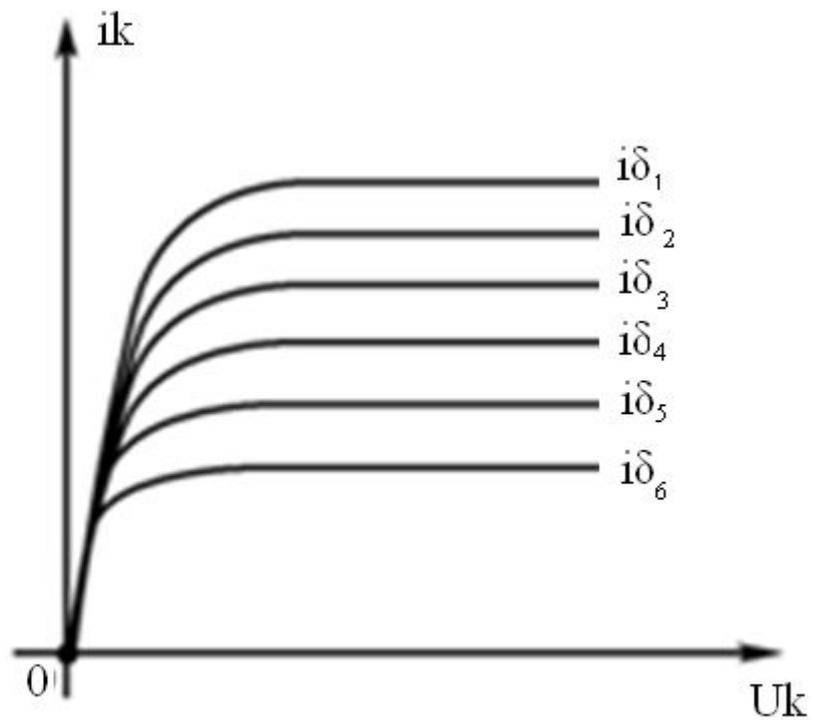
б)  
 $i = a_2 U^2; \quad i_1 = a_2 U_1^2; \quad i_2 = a_2 U_2^2; \quad i = a_2 (U_1 + U_2)^2$  -Принцип наложения не работает

$$Z_H = f(i, U)$$

Рис. 6.1. ВАХ: б) нелинейного элемента



a)



б)

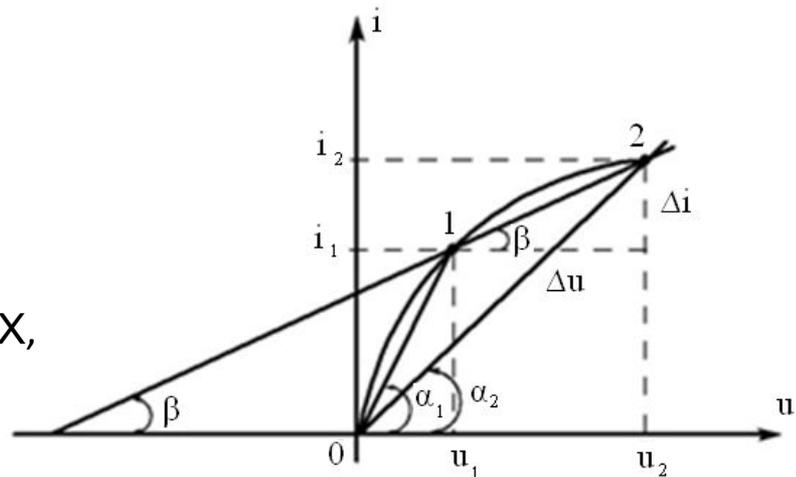
Рис. 6.2. ВАХ управляемых НЭ

Особенностью нелинейного активного элемента является то, что его сопротивления различны по величине для постоянного и переменного тока.

Сопротивление постоянному току называется отношением напряжения к току в данной точке ВАХ,

т.е.

$$R_1 = \frac{U_1}{i_1} = ctg\alpha_1; R_2 = \frac{U_2}{i_2} = ctg\alpha_2 \quad R_1 \neq R_2$$

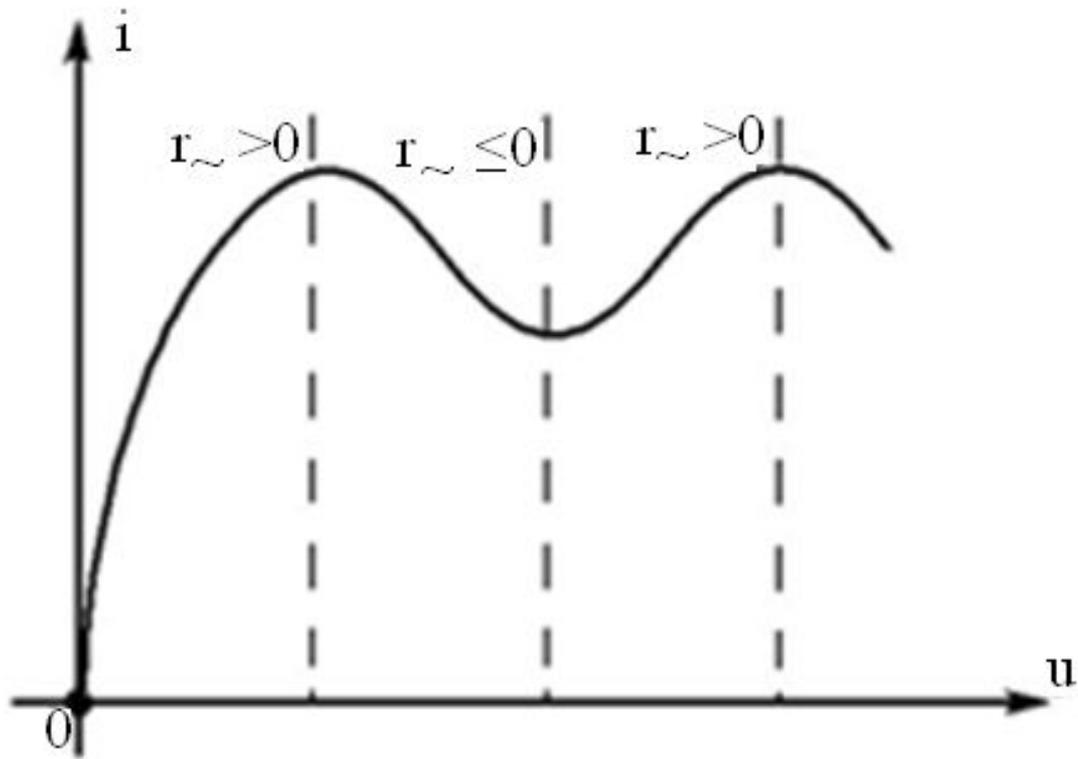


Сопротивление переменному току – это отношение приращения напряжения к приращению тока:

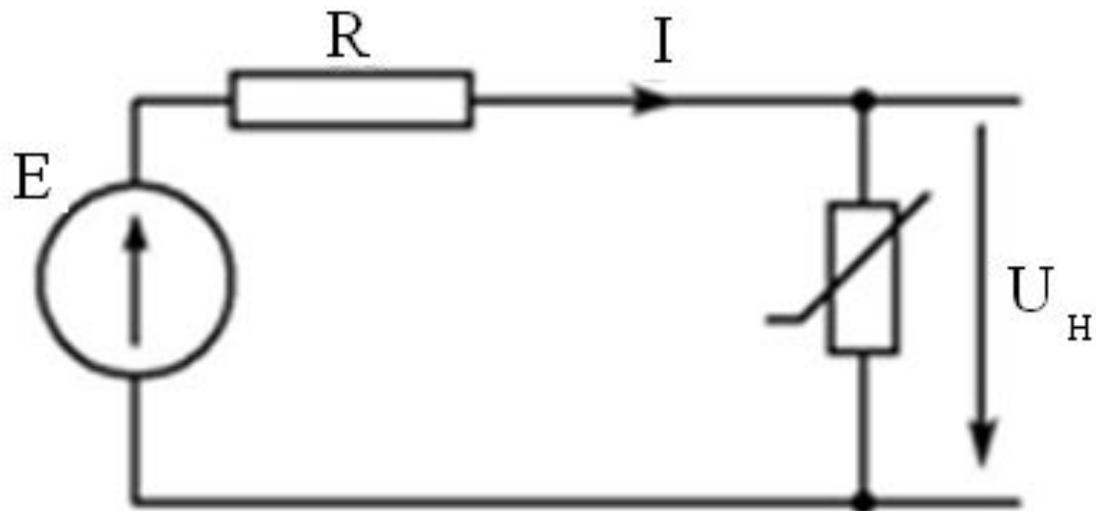
$$r = \frac{\Delta U}{\Delta i} = ctg\beta;$$

*Сопротивление нелинейного элемента постоянному и переменному току*

*Рис. 6.3*



*Рис. 6.4 Вольтамперная характеристика с падающим участком*



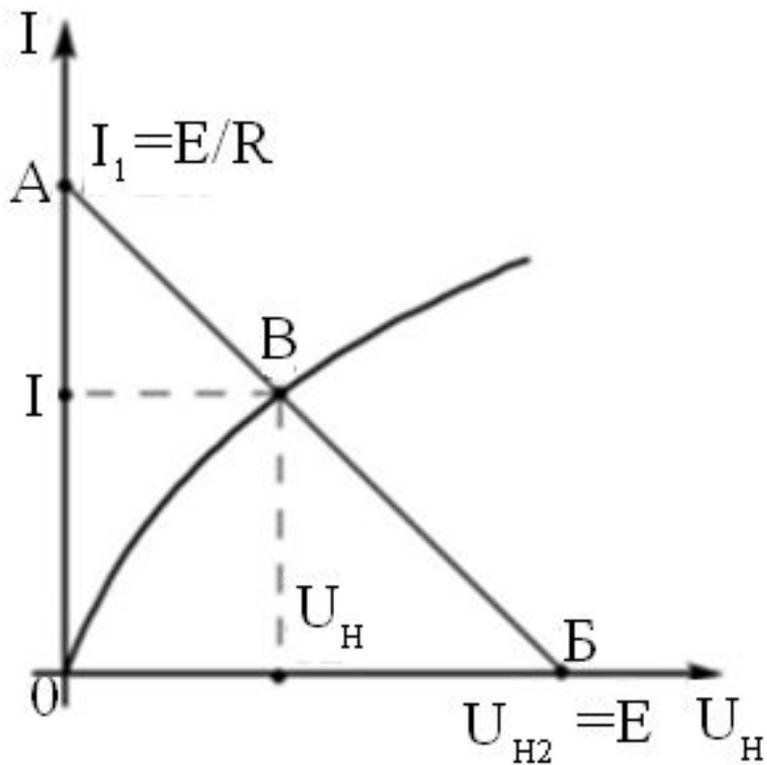
$$E = IR + U_H; \quad I = \frac{E \cdot U_H}{R}$$

*Рис. 6.5 Цепь с одним нелинейным элементом*

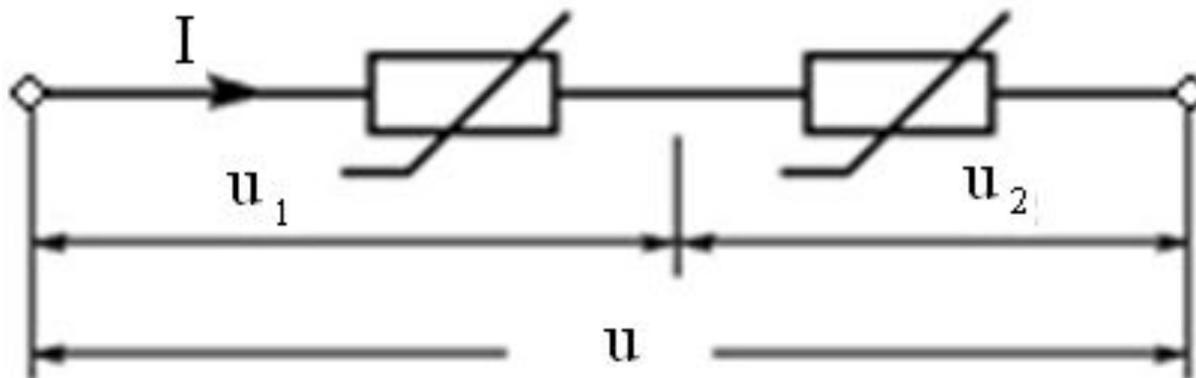
$$I = \frac{E - U_H}{R}$$

$$U_{H_1} = 0; I_1 = \frac{E}{R};$$

$$U_{H_2} = E; I_2 = 0;$$



*Рис. 6.6 Графический расчет цепи с одним нелинейным элементом*



$$I = I_1 = I_2$$

$$U = U_1 + U_2$$

Рис. 6.7 Последовательное соединение нелинейных элементов

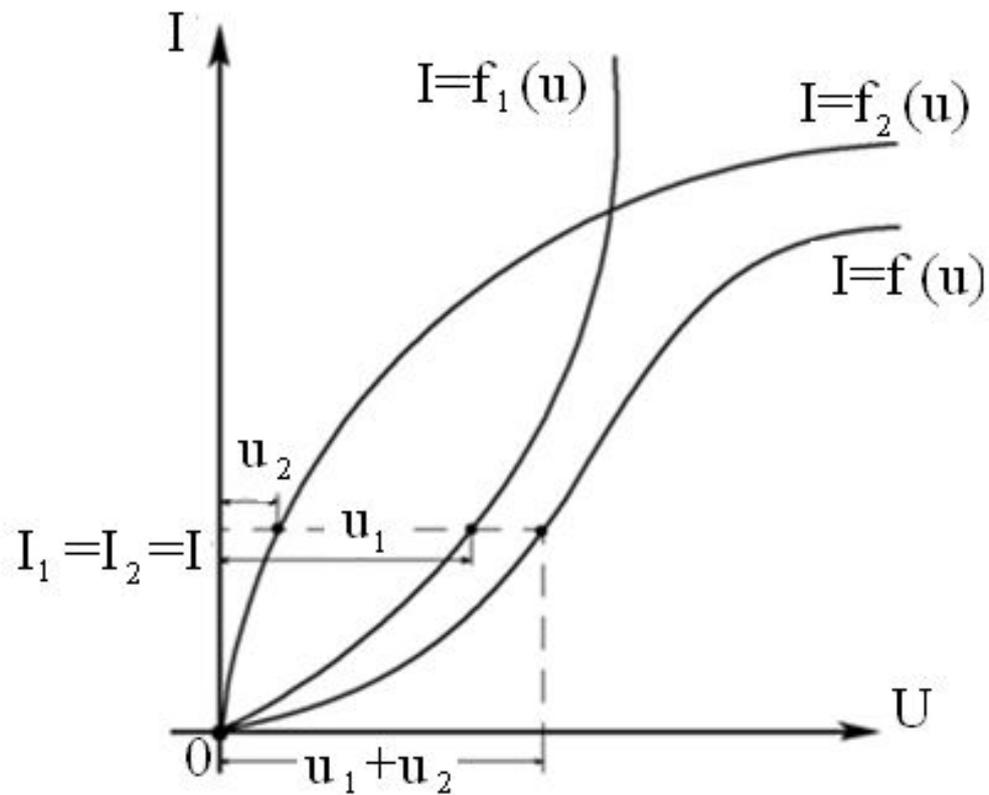
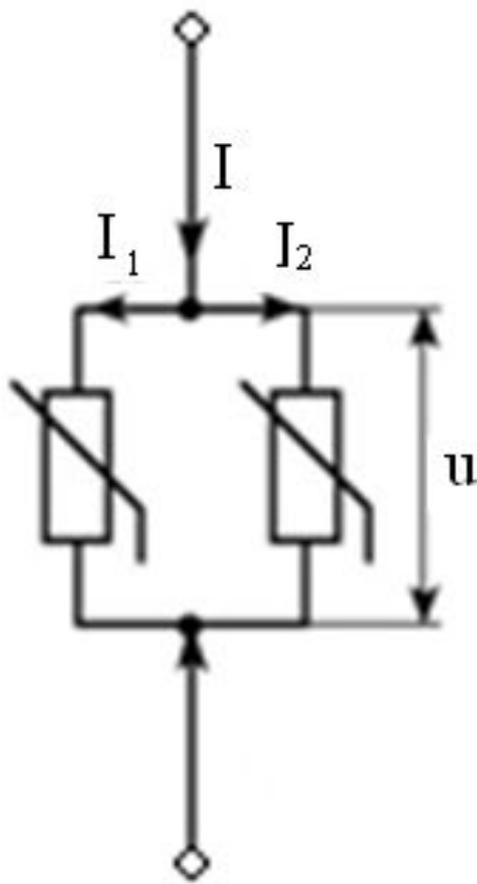


Рис. 6.8. Построение ВАХ последовательного соединения НЭ

$$U = U_1 = U_2$$

$$I = I_1 + I_2$$



a)

Рис. 6.9. Параллельное соединение НЭ (а) и построение ВАХ (б)

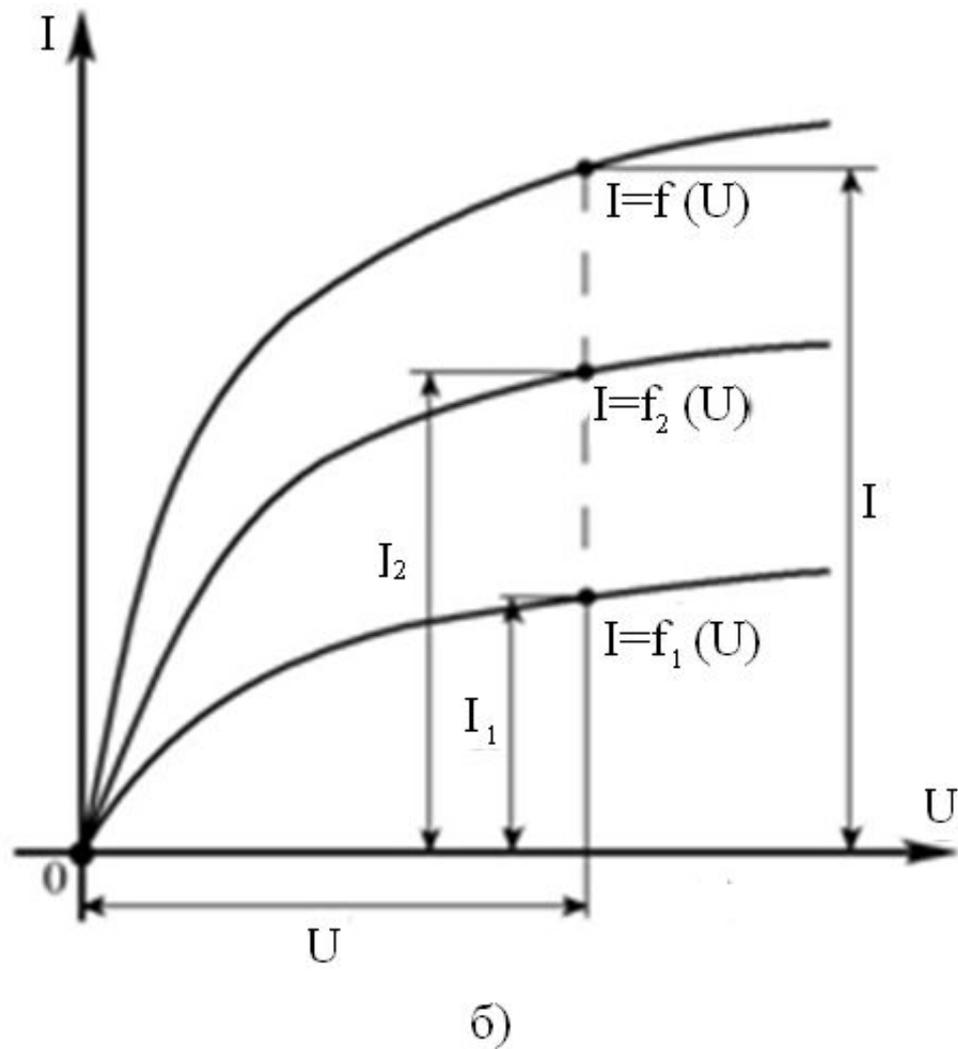


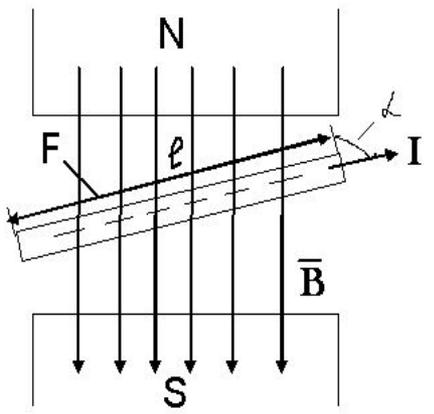
Рис. 6.10. Параллельное соединение НЭ (а) и построение ВАХ (б)

## VII Магнитные цепи

*Магнитной цепью (магнитопроводом) называется совокупность различных ферромагнитных и неферромагнитных частей электротехнических устройств, для создания магнитных полей нужной конфигурации и интенсивности.*

Магнитное поле создается движущимися зарядами или изменяющимся во времени электрическим полем и проявляет себя по той силе, с которой оно взаимодействует с проводником с током

в магнитном поле проводник с током  $I$  длиной  $l$ . на этот проводник будет действовать механическая сила  $F$  в направлении в соответствии с правилом левой руки.



$F = B l I \sin \alpha$ ;  $\alpha = \pi/2$ ;  $F = B \cdot l \cdot I$ ; -Закон электромагнитных сил

$B = \frac{F}{Il}$  ,Тл;  $\vec{B}$  – магнитная индукция

При перемещении проводника длиной  $L$  в магнитном поле с индукцией  $B$  со скоростью  $U_0$  возникает электродвижущая сила(ЭДС), направление которой определяется правилом правой руки.

$e = B l v_0$  ,В. -Закон электромагнитной индукции

$\Phi = B \cdot S$  ,Вб;  $\Phi$ -магнитный поток,  $S$ -площадь

$B = \mu_0 H$  ,Н, А/м;  $H$  - напряженность магнитного поля.

$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$  [Гн\*м] – магнитная постоянная, абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

Рис. 7.1 Взаимодействие проводника с током с магнитным полем и возникновение ЭДС в проводнике

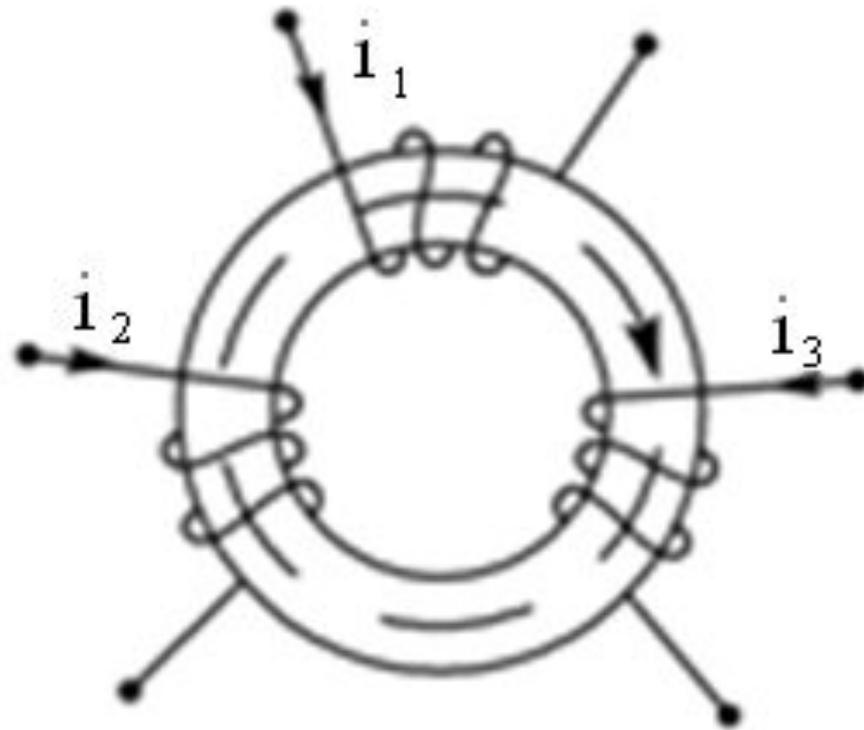
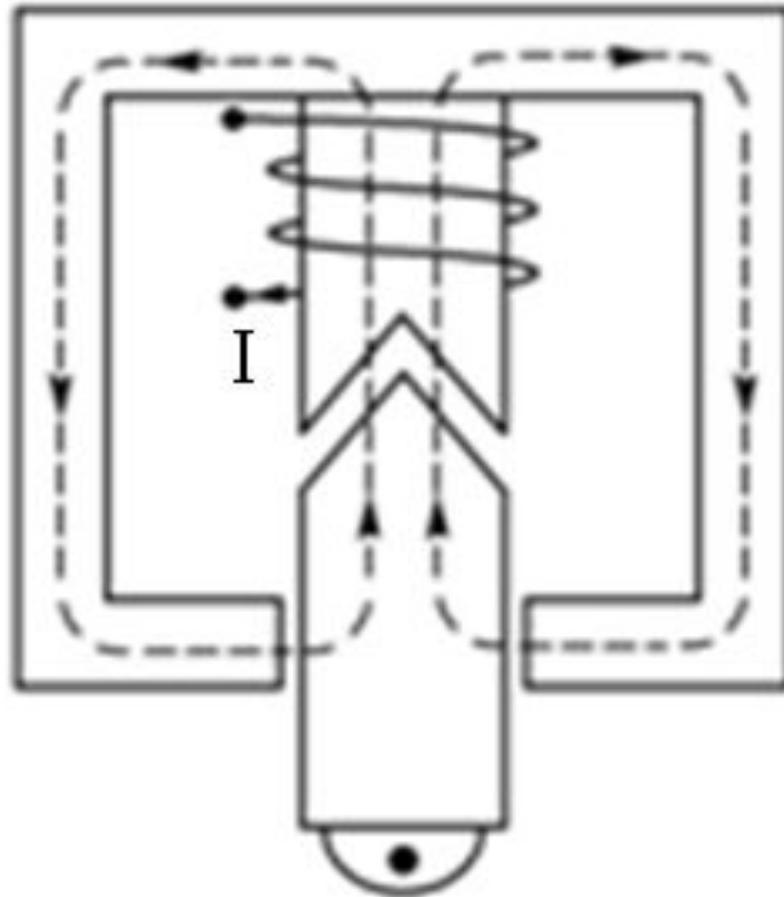
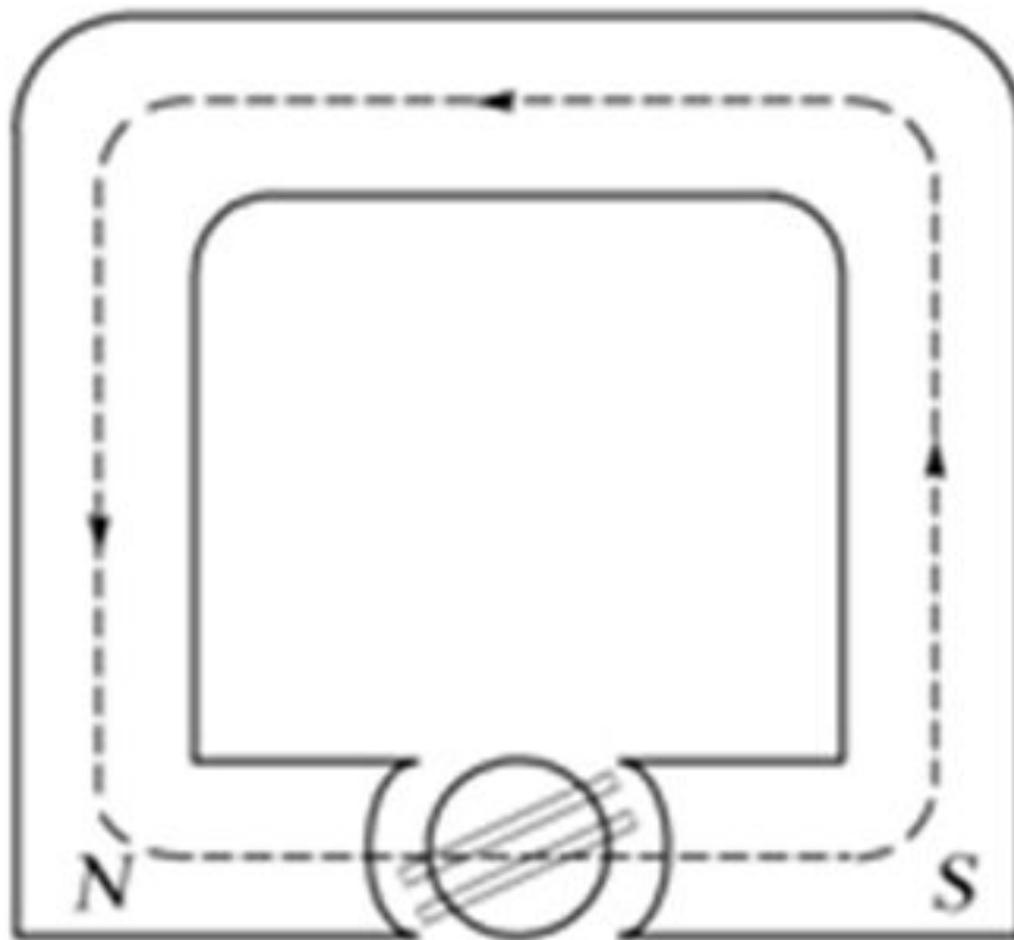


Рис. 7.2 Тороид (неразветвленная магнитная цепь)



*Рис. 7.3* Магнитная цепь с вытягивающейся подвижной частью  
(разветвленная магнитная цепь)



*Рис. 7.4 Магнитная цепь с постоянным магнитом  
(неразветвленная магнитная цепь)*

*Закон полного тока:*

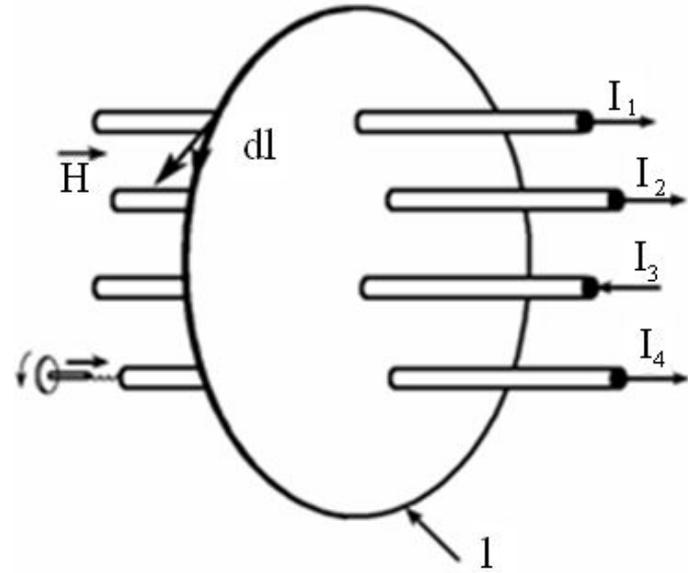
*Интеграл от напряжённости магнитного поля по любому замкнутому контуру (циркуляция вектора напряженности) равен алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром:*

$$\oint_L H dl = \sum I$$

$$\oint_L H dl = I_1 + I_2 - I_3 + I_4$$

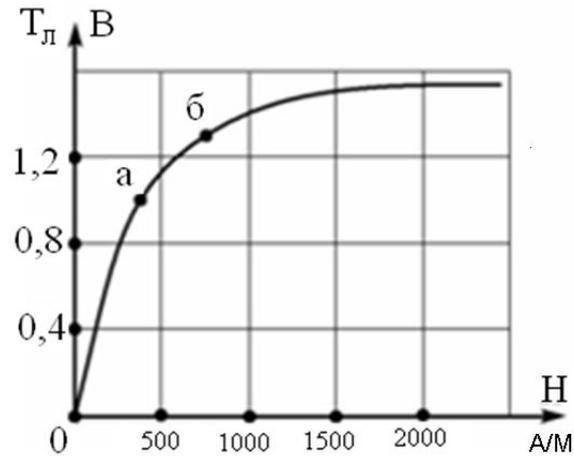
$$\sum Hl = IW$$

$$\sum Hl = \sum IW = \sum F \quad - \text{МДС.}$$



*Рис. 7.5 К закону полного тока*

**Ферромагнетики** - это материалы, обладающие большой магнитной проницаемостью.  
К ним относятся: сталь, железо, чугун, кобальт и ряд сплавов, например никеля с алюминием.



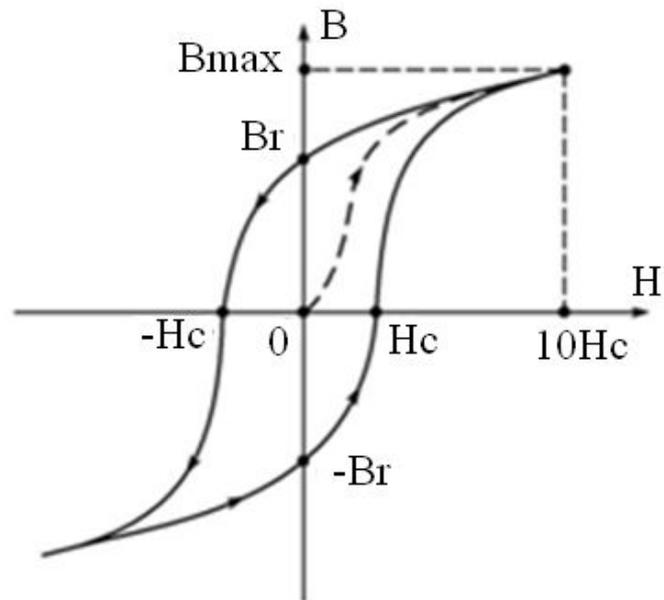
Кривая начального намагничивания состоит из:

- Прямоугольного участка 0а;
- Участок аб- колено кривой;
- Участок выше (.) б – участок магнитного насыщения

*Рис. 7.6 Начальная кривая намагничивания*

По значению  $H_c$  ферромагнетики делятся:

1. Магнитомягкие с  $H_c < 0.05 \dots 0.01 \text{ A/M}$  – используются для изготовления магнитопроводов.
2. Магнитотвердые с  $H_c > 20 \dots 30 \text{ A/M}$  – используются для изготовления магнитов.



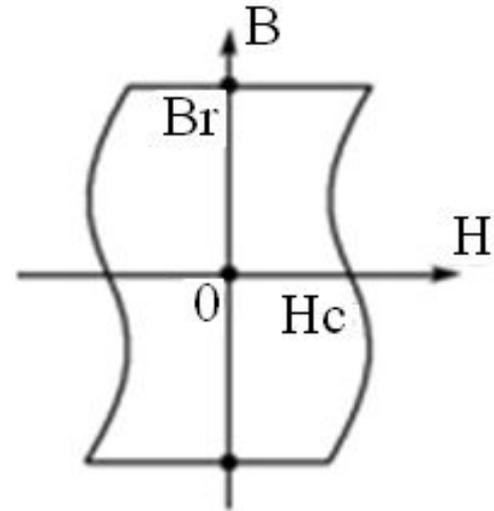
$H_c$  – коэрцитивная сила;

$B_r$  – остаточная индукция;

$$K_{\square} = \frac{B_r}{B_r - 10H_c} \text{ – коэф. прямоугольности}$$

Рис. 7.7 Статическая петля гистерезиса

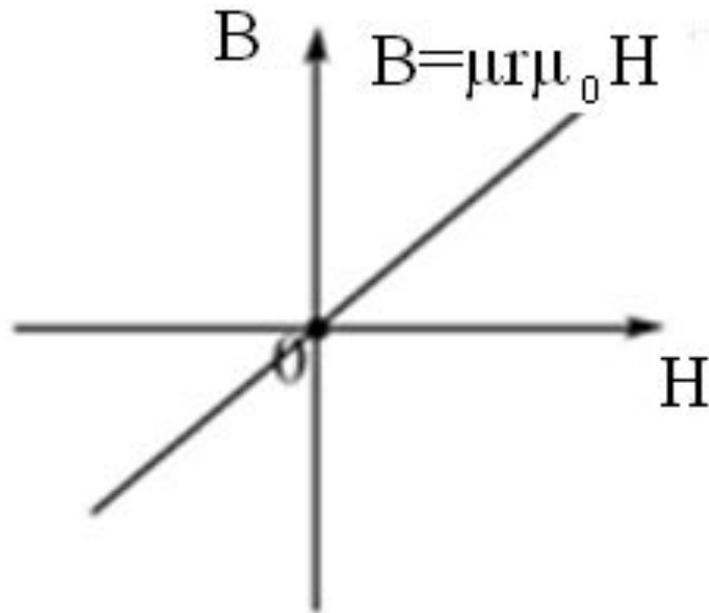
Магнитопроводы применяются в оперативной памяти ЭВМ, магнитных усилителях и других устройствах автоматики.



а)

$$K_{\square} > 0.95$$

*Рис. 7.8 Прямоугольная петля гистерезиса*



б)

$B = \mu_r \mu_0 H$ , где  $\mu_r$  - относительная магнитная проницаемость.

Рис. 7.9 Линейная зависимость  $B = f(H)$

основная кривая намагничивания - геометрическое место вершин симметричных частных циклов тонкостенного ферромагнитного тороида, полученных при синусоидальном токе низкой частоты в обмотке.

По основной кривой намагничивания ферро-магнитного материала определяют зависимость абсолютной магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля  $H$ :

$$\mu_a = \mu_r \mu_0 = B/H$$

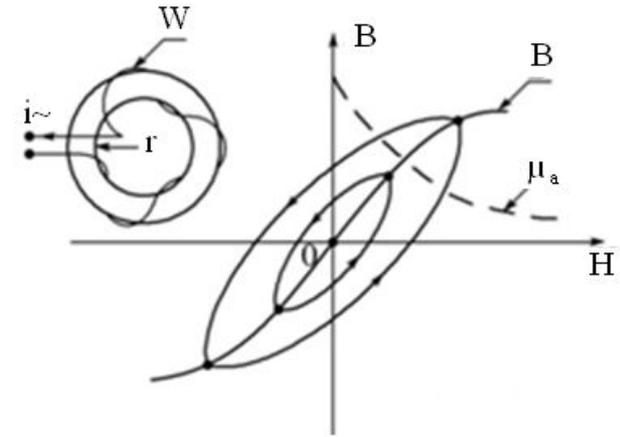


Рис. 7.10 Построение зависимости  $\mu_a = f(H)$

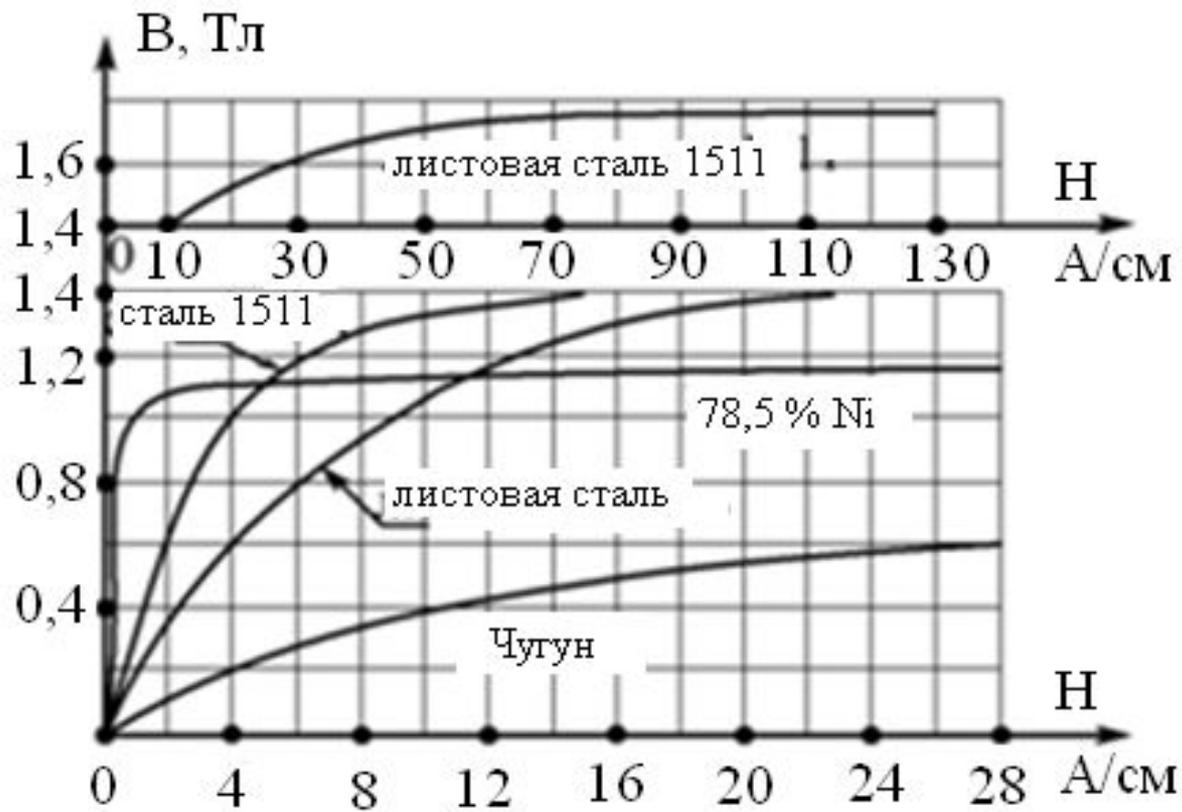


Рис. 7.11 Кривые намагничивания для различных материалов

Пример расчета неразветвленной магнитной цепи.

Задача: определение МДС  $F = IW$ , при заданных значениях магнитного потока  $\Phi$  или магнитной индукции на некотором участке магнитопровода.

$$1) M_a = M_2 M_0 = \frac{B}{H}; \quad 2) \sum_{K=1}^2 H_K \ell_K = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = U_{M1} + U_{M2} = IW = F$$

По закону полного тока

$$3) B_1 = M_a H_1; \quad B_2 = M_0 H_2 \quad 4) \Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2$$

в магнитопроводе  $B$  возд. Зазоре  $\text{Магнитный}$

моток.

Если  $\Phi$ -известен, то по 4) найдем  $B_1$  и  $B_2$ ;  $H_1$  найдем по кривой намагничивания, а по 2) найдем МДС- $F$ .

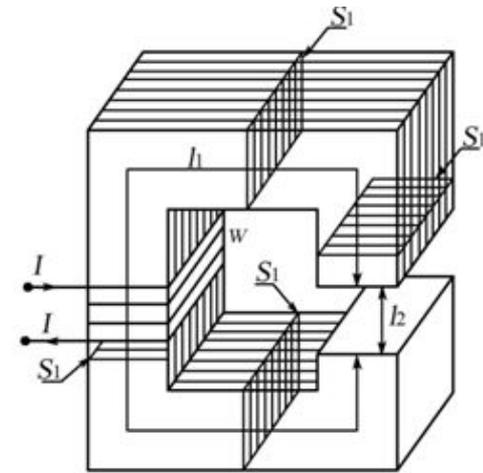


Рис. 7.12 Магнитопровод с воздушным зазором и постоянным сечением  $S_1$

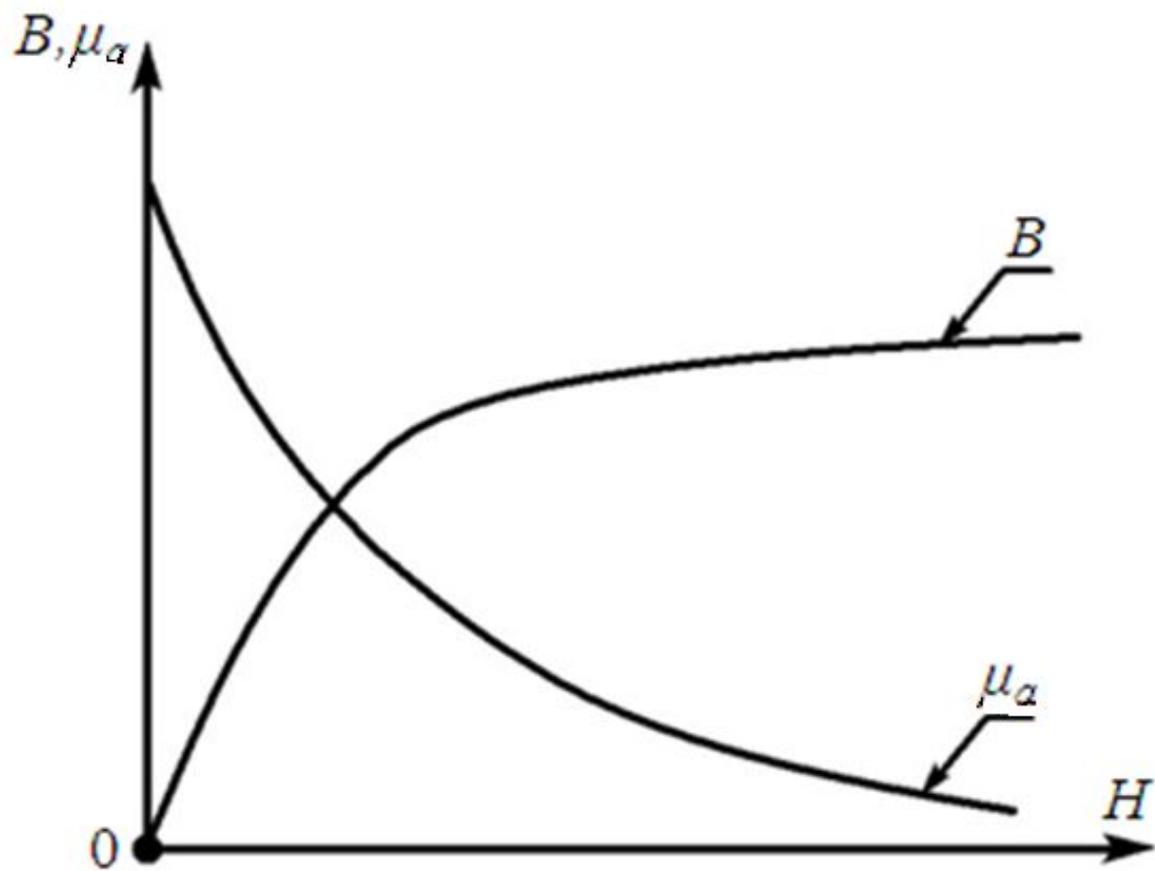


Рис. 7.13 Кривые намагничивания и абсолютной магнитной проницаемости  $\mu_a$

Расчет магнитного потока при заданной

МДС- $F$

Заменив напряженность магнитного поля на  $B_k/\mu_k$  получим

$$1) H_K = \frac{B_K}{\mu_K}; \quad 2) \frac{B_1}{\mu_{a1}} \ell_1 + \frac{B_2}{\mu_0} \ell_2 = IW = F$$

Т.к.  $\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2$ , получим;

$$3) \Phi \left( \frac{\ell_1}{S_1 \mu_{a1}} + \frac{\ell_2}{S_2 \mu_0} \right) = \Phi (r_{M1} + r_{M2}) = \Phi \sum_{K=1}^2 r_{Mk} = IW = F$$

$$4) r_{\mu k} = \frac{\ell_k}{S_2 \mu_{ak}}; \quad 5) \mu_{ak} \neq const - \text{магнитные сопротивления, } K - \text{го участка магнитной цепи}$$

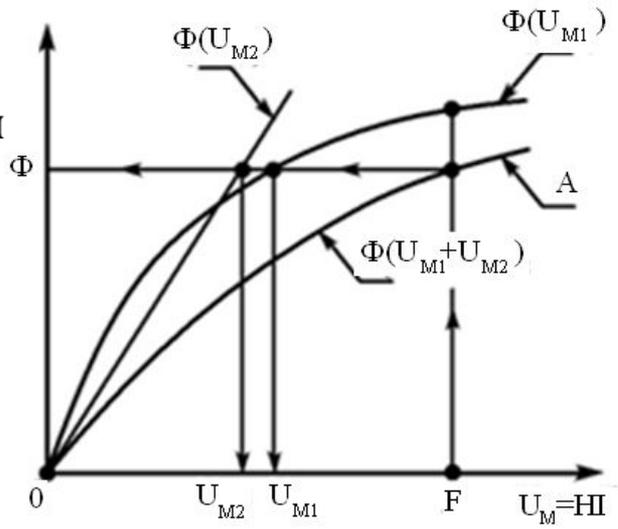
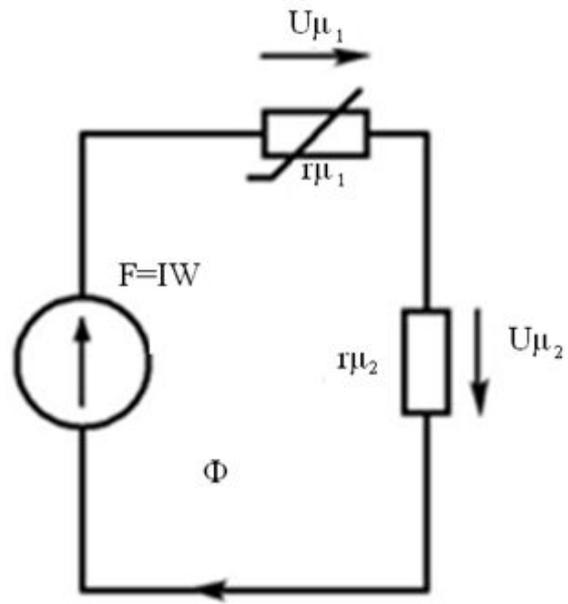


Рис. 7.14 Сложение вебер-амперных характеристик



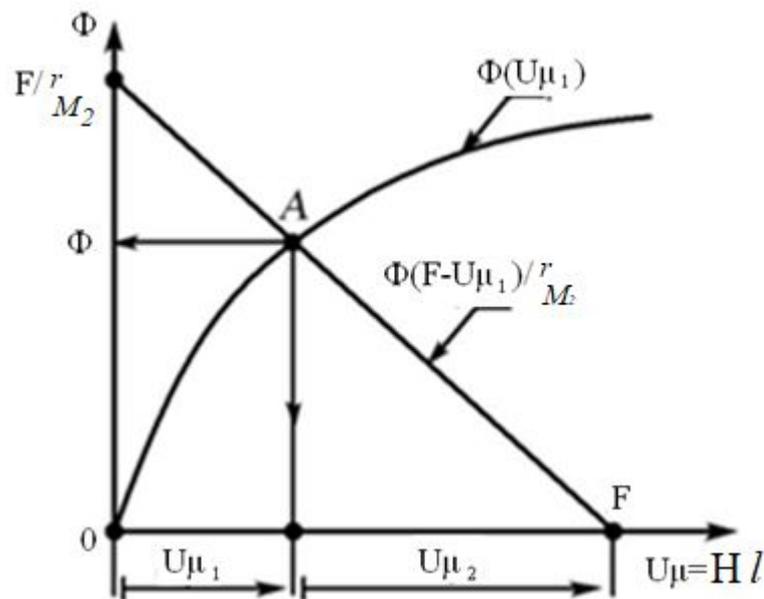
a)

$$U_M = r_M \Phi \quad \text{аналогично} \quad U = RI$$

$$\sum U_M = \sum F \quad \text{аналогично} \quad \sum U = \sum E$$

*Рис. 7.15 а) Схема замещения магнитной цепи*

Для неразветвленной магнитной цепи (рис. 3.14) и схемы замещения (рис. 7.15) применим метод сложения вебер–амперных характеристик (рис. 7.14) и метод нагрузочной характеристики

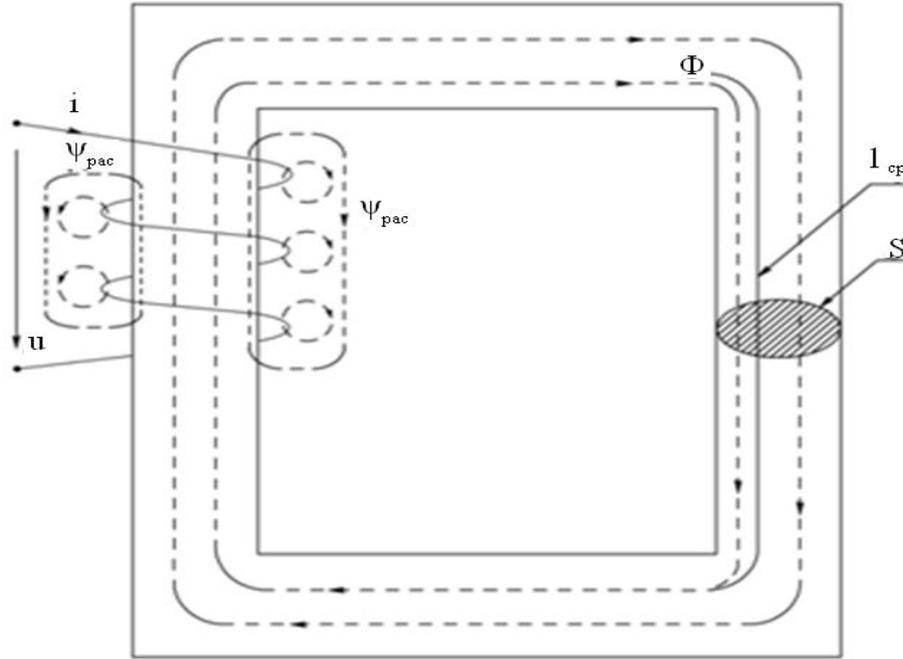


$$\bar{\Phi} = U_{M2}/r_{M2} = (F - U_{M1})/r_{M2} \quad \text{— нагрузочн. характер}$$

$$B_2 = \Phi/S_2$$

Рис. 7.15 б) графическое нахождение магнитного потока  $\Phi$  при известной МДС  $F$

# VIII Катушка с магнитопроводом в цепи переменного тока



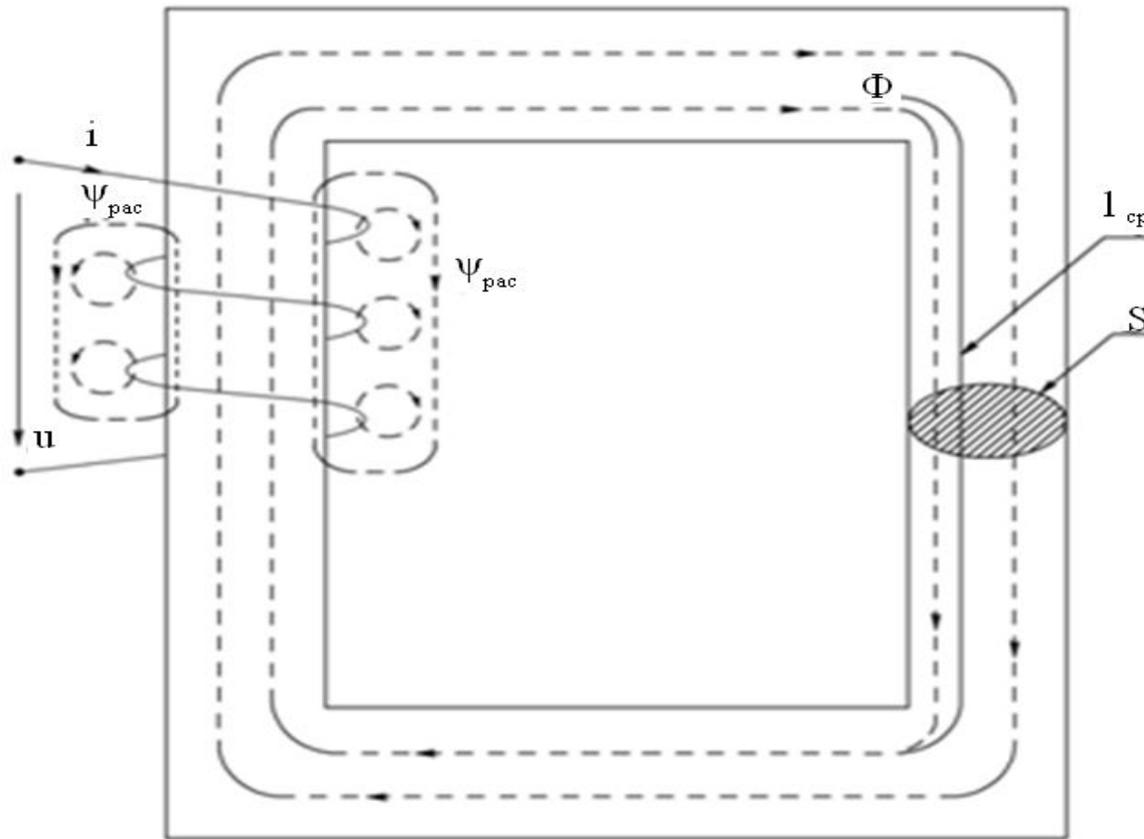
Магнитная  
индукция-

$$B = \mu_0 H; \quad \psi = w\Phi + \psi_{рас}; \quad \text{-полное потосцепление с витками}$$

$$\psi_{рас} = L_{рас} i \quad \text{-потосцепление рассеяния: катушки}$$

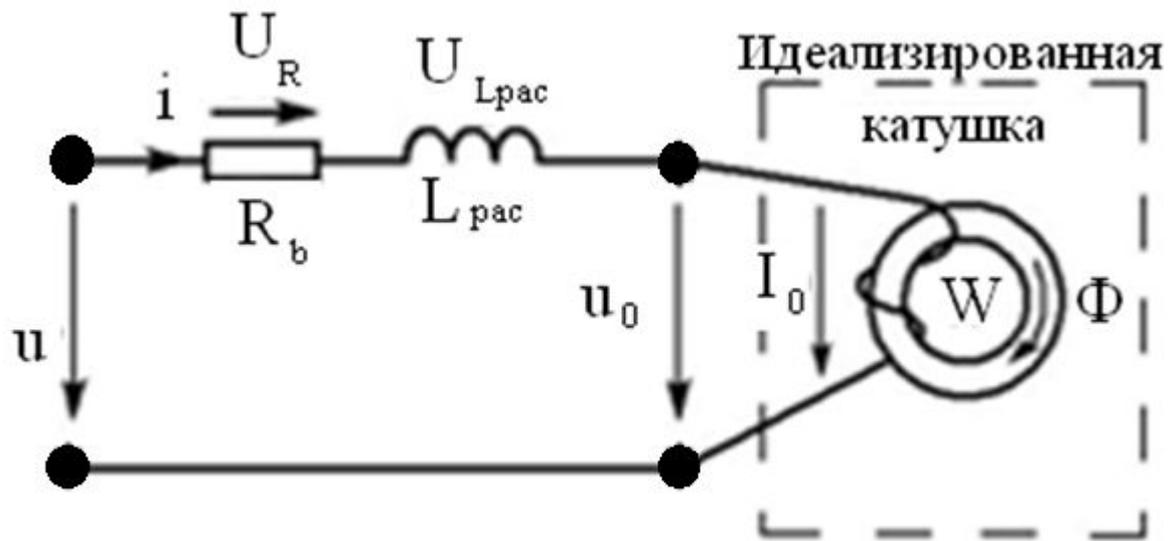
$L_{рас}$  — индуктивность рассеивания

Рис. 8.1 Катушка с магнитопроводом



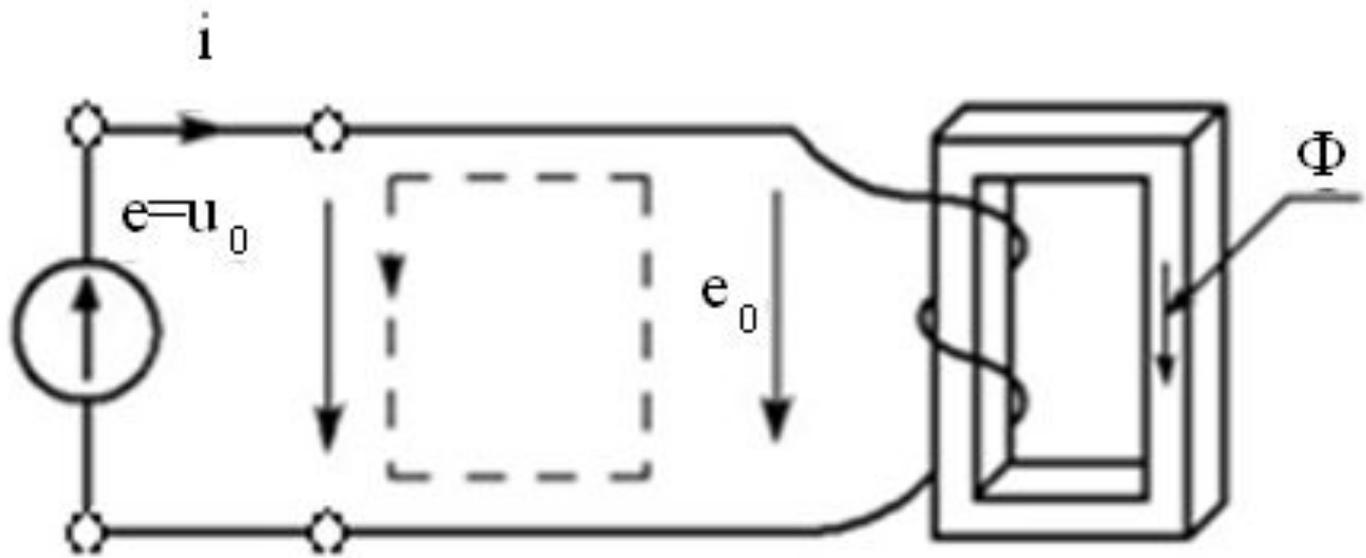
$$U = R_B i + \frac{d\psi}{dt} = R_B i + \frac{d\psi_{pac}}{dt} \cdot \frac{di}{dt} + W \frac{d\Phi}{dt} = R_B \cdot i + L_{pac} \frac{di}{dt} + W \frac{d\Phi}{dt} = U_R + U_{L_{pac}} + U_0$$

*Рис. 8.1 Катушка с магнитопроводом*



$$U_0 = -e_0 = W \frac{d\Phi}{dt};$$

Рис. 8.2 Схема замещения катушки с магнитопроводом



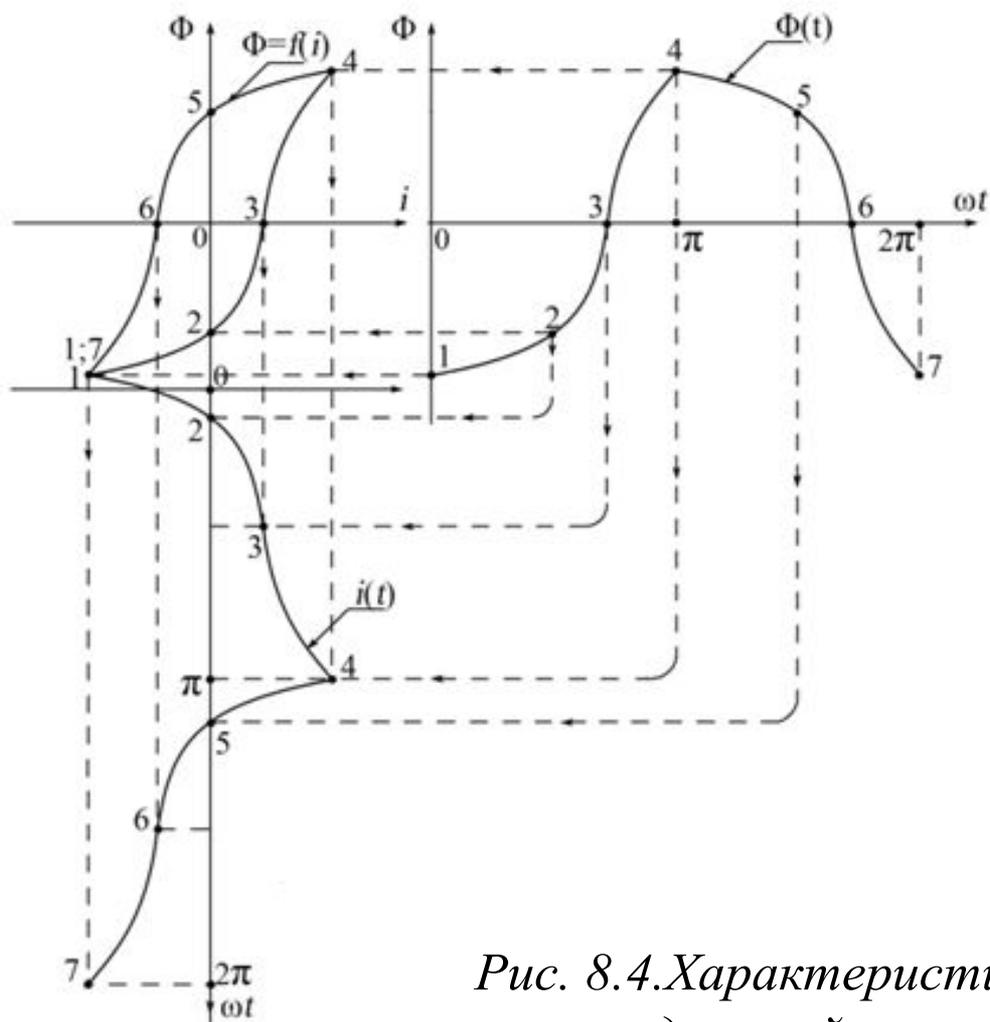
$$U_0 = -e_0 \text{ или } U_0 = U_{0m} \cdot \sin \omega t = \frac{W d\Phi}{dt}$$

$$d\Phi = \frac{U_{0m}}{W} \sin \omega t dt = -\frac{U_0}{\omega W} \cos \omega t + A = \frac{U_0 \sqrt{2}}{2\pi f W} \sin(\omega t - \pi/2) + A$$

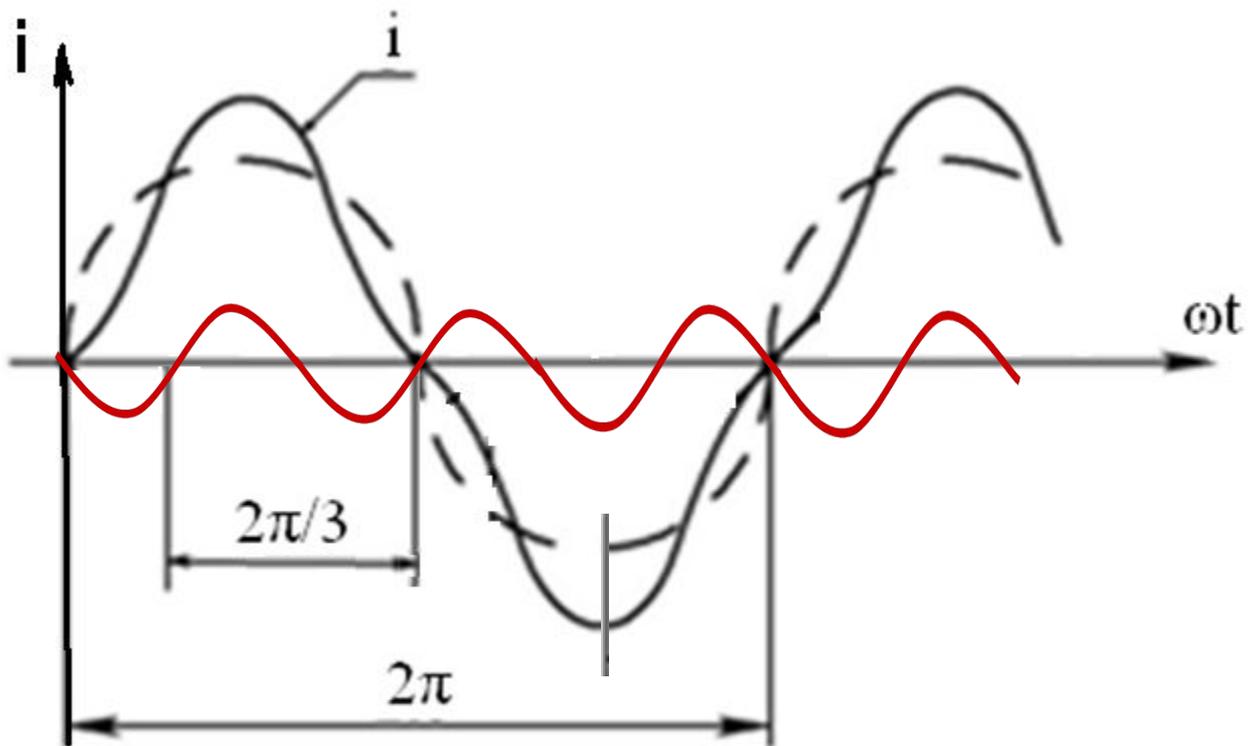
$$\Phi = \Phi_m \cdot \sin(\omega t - \pi/2), \text{ где } \Phi_m = \frac{U_0}{4,44} f W_1,$$

$$E = 4,44 f W \Phi_m;$$

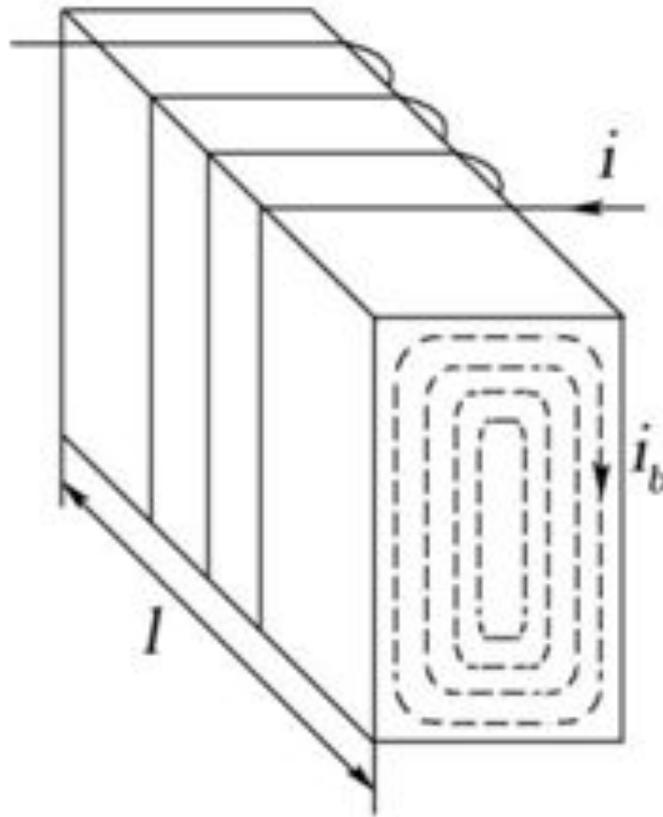
Рис. 8.3 Идеализированная катушка



*Рис. 8.4. Характеристика  $\Phi=f(i)$  а так же синусоидальный магнитный поток  $\Phi(t)$  и графическая зависимость тока в обмотке от времени  $i(t)$*



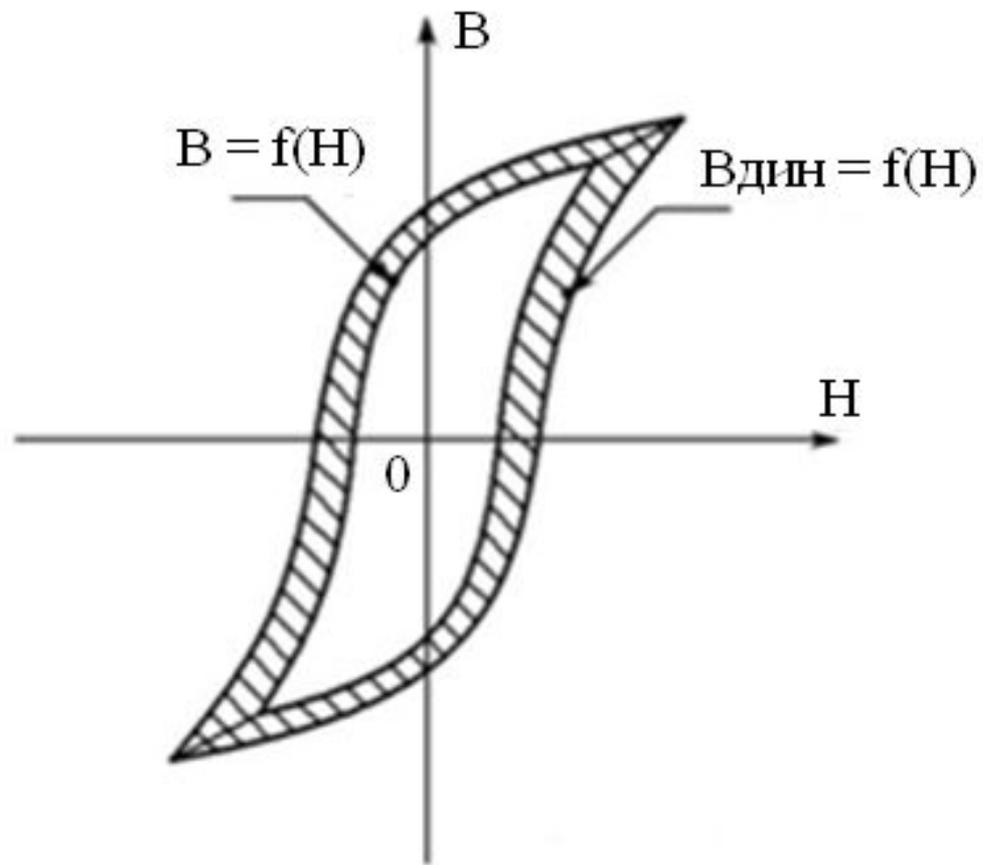
*Рис. 8.5 Разложение графика намагничивающего тока на первую и третью гармонику.*



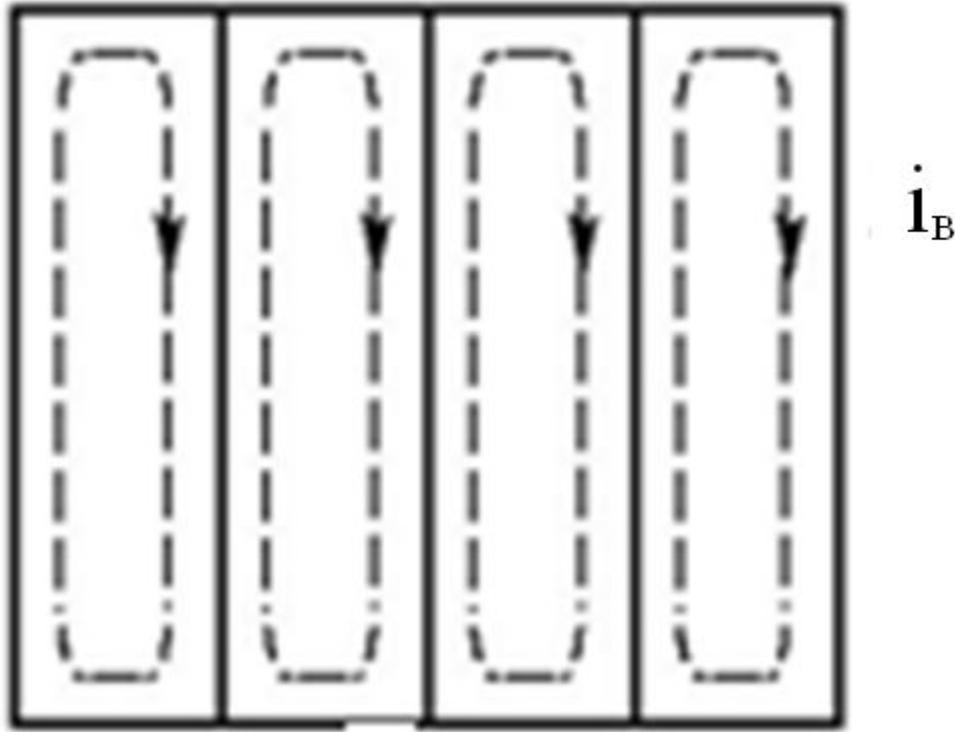
$$P = U_0 i = \left( w \frac{d\Phi}{dt} \right) \cdot \left( \frac{H l_{cp}}{w} \right) = S w \frac{dB}{dt} \cdot \frac{l_{cp}}{w} H = S l_{cp} H \frac{dB}{dt}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 i dt = S l_{cp} \oint H dB$$

Рис. 8.6 Образование вихревых токов в магнитопроводе



*Рис. 8.7 Статистические и динамические петли гистерезиса*



$$P_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma} f B_m^n \mathfrak{C} \quad n = 1,6 \text{ при } B < 1 \text{ Тл}; n = 2 \text{ при } B > 1 \text{ Тл.}$$

$$P_B = \sigma_B f^2 \nu \mathfrak{C} B_m^2$$

$$P = P_{\Gamma} + P_B \equiv B_m^2 \equiv \Phi_m^2 \equiv U_m^2$$

*Рис. 8.8 Уменьшение влияния вихревых токов*

# Вот и всё, ребята!



- Презентацию отредактировали
- Губенко Д. Г. и Плехин В.