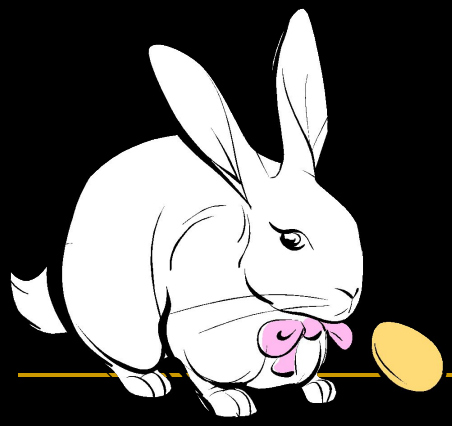
Регрессионный анализ



Вавилин К.С.

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Рост братьев.

Петя

Гриша

r=0.7: если Петя высокий, то, ***скорее всего***, Гриша тоже высокий. Но можем ли мы предсказать, ***насколько высокий***? Сам коэффициент корреляции этого нам не скажет.

Ответ нам даст РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.

Регрессионный анализ предсказывает значение одной переменной на основании другой.

Для этого в линейной регрессии строится прямая – линия регрессии.

Линейная регрессия:

Даёт нам правила, определяющие линию регрессии, которая лучше других предсказывает одну переменную на основании другой.

По оси Y располагают переменную, которую мы хотим предсказать, а по оси X – переменную, на основе которой будем предсказывать.
Предсказанное значение Y обычно обозначают как $\hat{Y}$

То есть,

РЕГРЕССИЯ (*regression*) – предсказание одной переменной на основании другой. Одна переменная – независимая (independent), а другая – зависимая (dependent).

Пример: скорость набора веса у бегемота растёт с увеличением продолжительности кормления; долго кормившийся бегемот быстрее набирает вес

КОРРЕЛЯЦИЯ (*correlation*) – показывает, в какой степени две переменные СОВМЕСТНО ИЗМЕНЯЮТСЯ. Нет зависимой и независимой переменных, они эквивалентны.

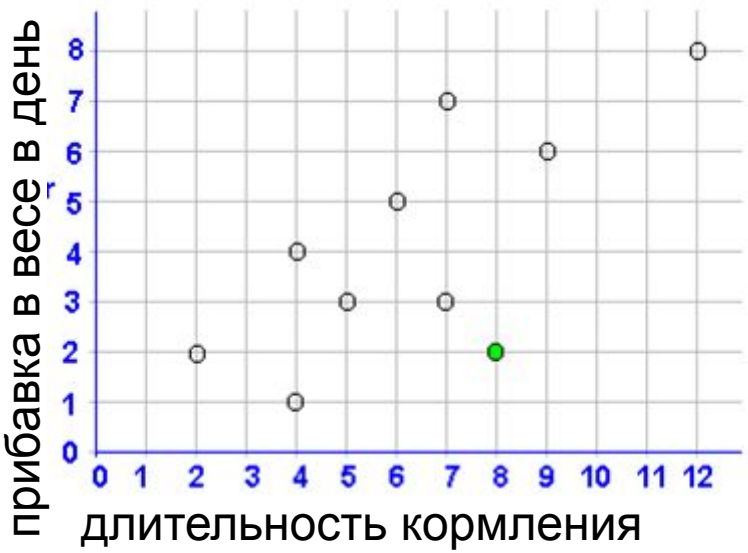
Пример: длина хвоста у суслика коррелирует положительно с его массой тела

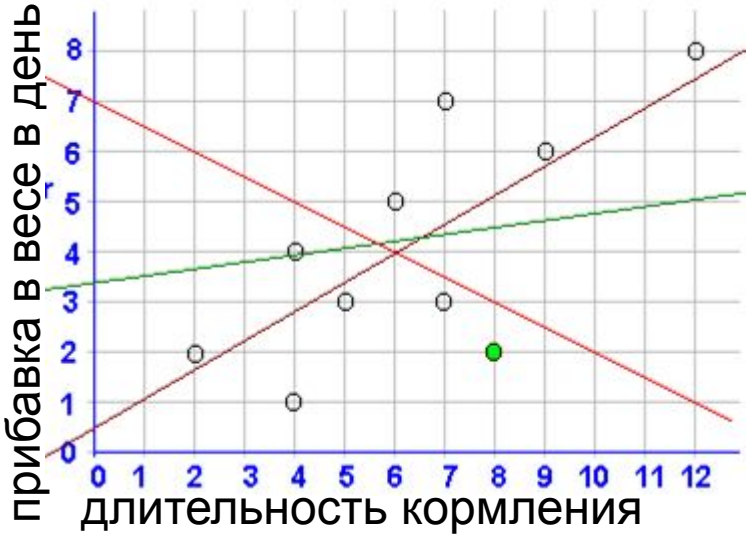
ЭТО НЕ ОДНО И ТО ЖЕ!

Мы изучаем поведение бегемотов в Африке. Мы хотим узнать, как связана длительность кормления со скоростью набора веса у этих зверей?

У нас **две** переменные – 1. длительность кормления в день (independent); 2. скорость набора веса в день (dependent)

Мы ищем прямую, которая наилучшим образом будет предсказывать значения Y на основании значений X.

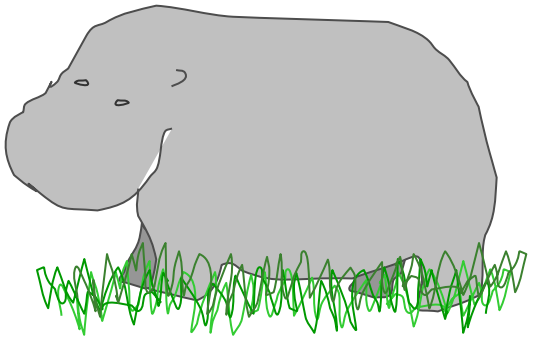




Простая линейная регрессия (*linear regression*)

Y – зависимая переменная
X – независимая переменная
a и b - коэффициенты регрессии

$$\hat{Y}_i = bX_i + a$$



b – характеризует **НАКЛОН** прямой; это самый важный коэффициент;
a – определяет точку пересечения прямой с осью OY; не столь существенный (intercept).

Пояснить размерность b и a

Задача сводится к поиску коэффициентов a и b.

$$b = r\frac{s_X}{s_Y}$$

стандартные отклонения для X и Y

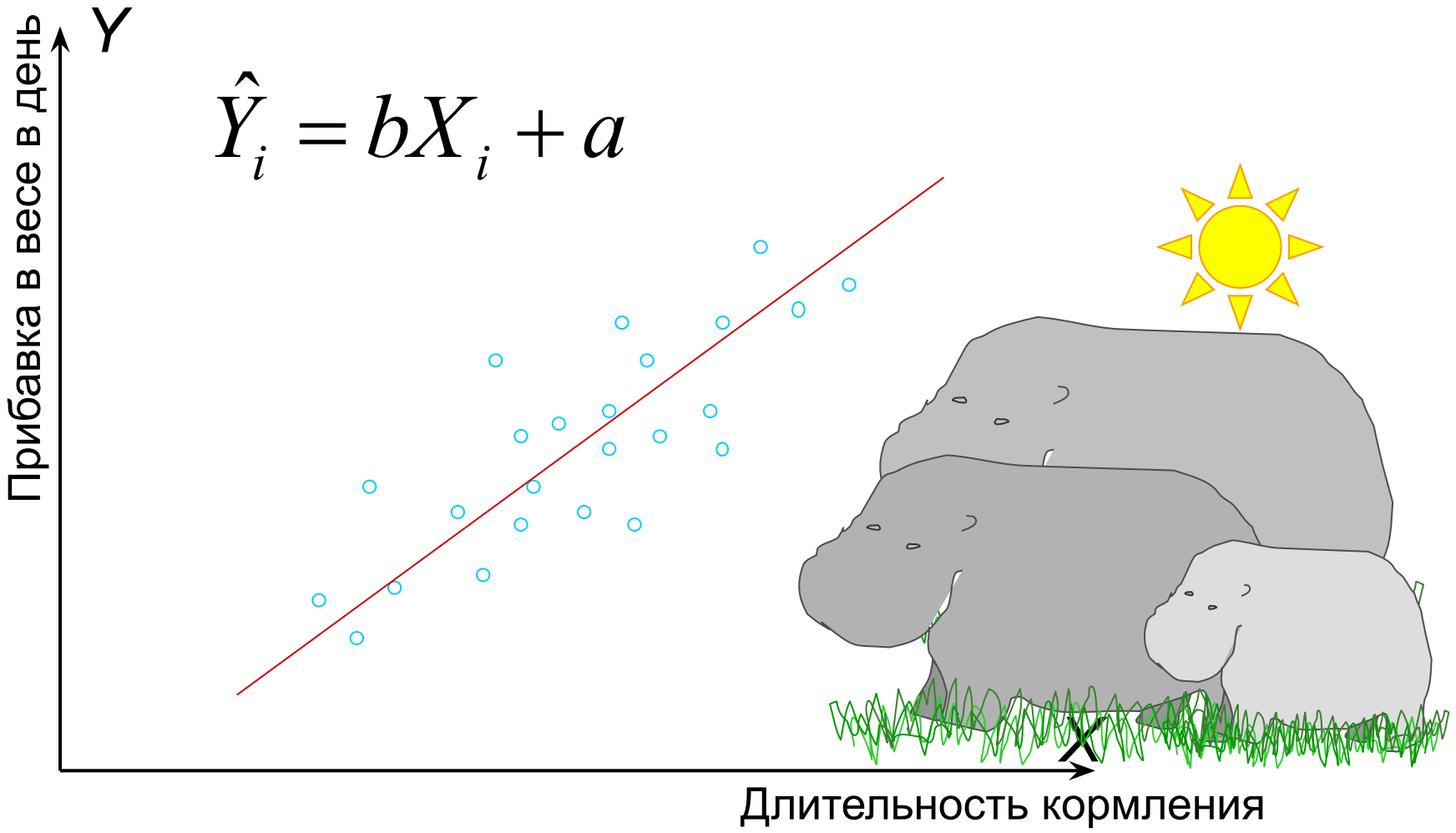
коэффициент корреляции Пирсона!

$$\bar{Y} = b\bar{X} + a \longrightarrow \boxed{a = \bar{Y} - b\bar{X}}$$

Линия регрессии всегда проходит через точку $(\bar{X}, \bar{Y})$, то есть через середину графика.

b – определяет, насколько изменится Y на единицу X; имеет тот же знак, что и r.

Пример с кол-вом удобрения на каждый кг помидоров


Y
Прибавка в весе в день
$\hat{Y}_i = bX_i + a$
X
Длительность кормления

Если r=0.0, линия регрессии всегда горизонтальна. Чем ближе r к нулю, тем труднее на глаз провести линию регрессии. А **чем больше r**, тем **лучше предсказание**.

Важная особенность нашего предсказания: предсказанное значение Y всегда ближе к среднему значению, чем то значение X, на основе которого оно было предсказано – **регрессия к среднему**.

Пример про Dr. Nostat, который отобрал 100 самых глупых учеников, подверг их специальной программе и потом протестировал повторно, и их IQ оказался в среднем выше.

Пример про очень умную 5-летнюю девочку

Линия регрессии в стандартной форме

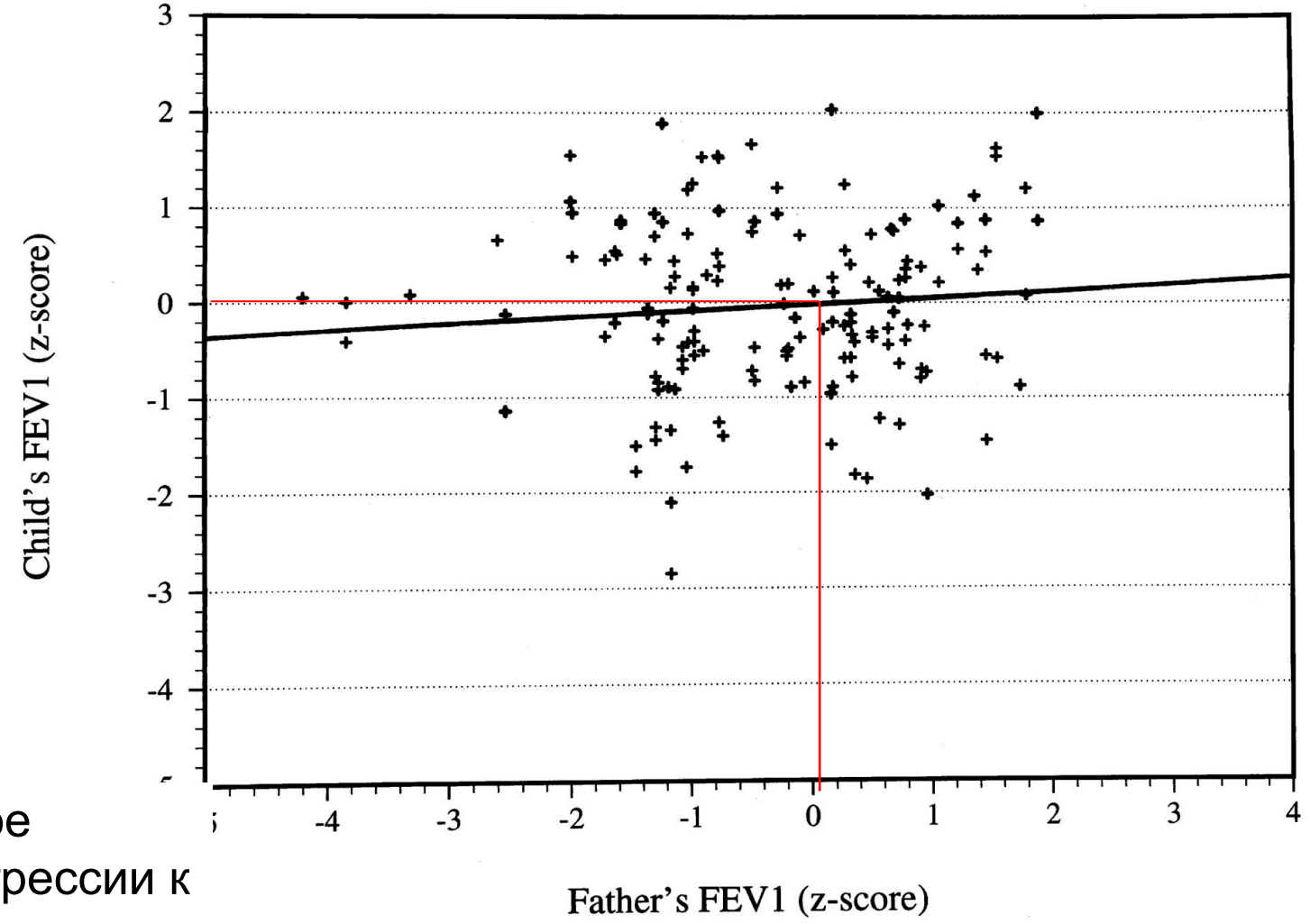
$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

$$b = r\frac{s_X}{s_Y}$$

a = 0, b = r

$$\hat{Y}_z = r\hat{X}_z$$

(математическое объяснение регрессии к среднему)



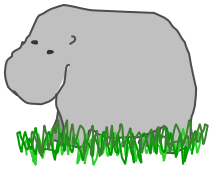
«Лучшая» линия регрессии

Ошибка предсказания (residual) = «остатки»

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

e положительно для точек **над** прямой и отрицательно для точек **под** прямой.

Как определить «лучшую» линию регрессии?

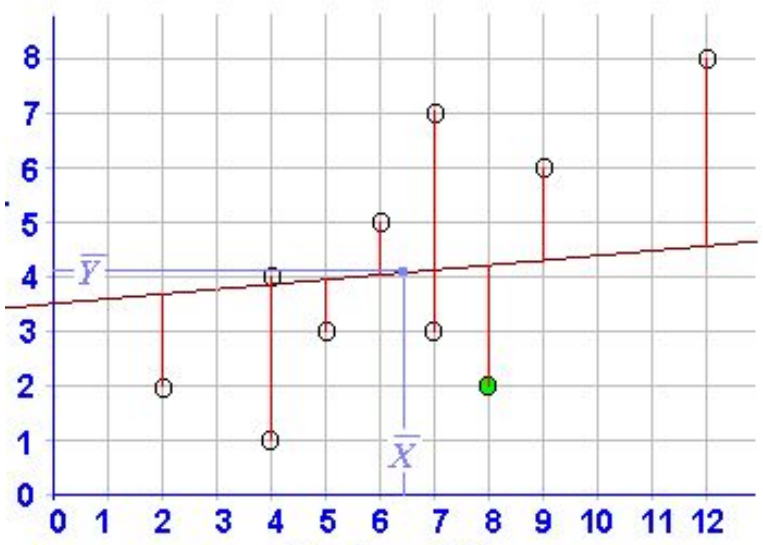


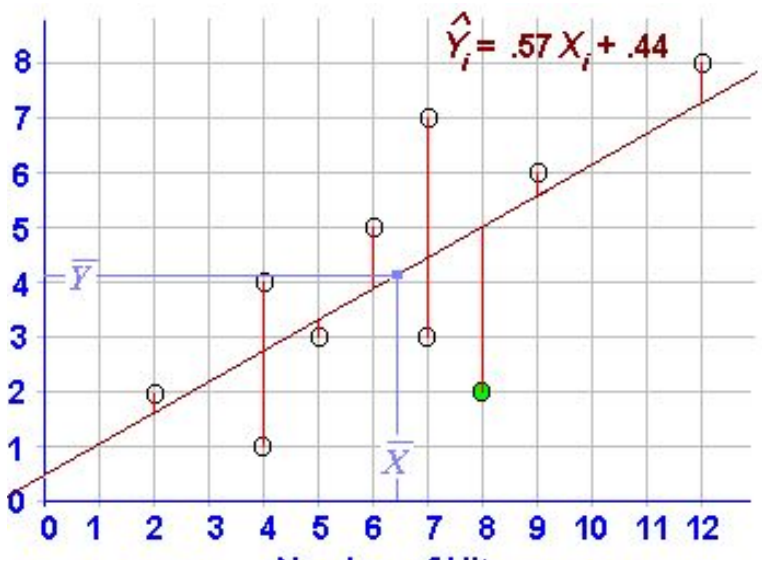
Метод наименьших квадратов:

линию регрессии подбирают такую, чтобы общая сумма квадратов ошибок (residuals) была наименьшей.

$$\sum e_i = 0$$

$$\sum e_i^2 \quad \text{- минимальна}$$





Насколько хорошо «лучшая» линия регрессии предсказывает Y?

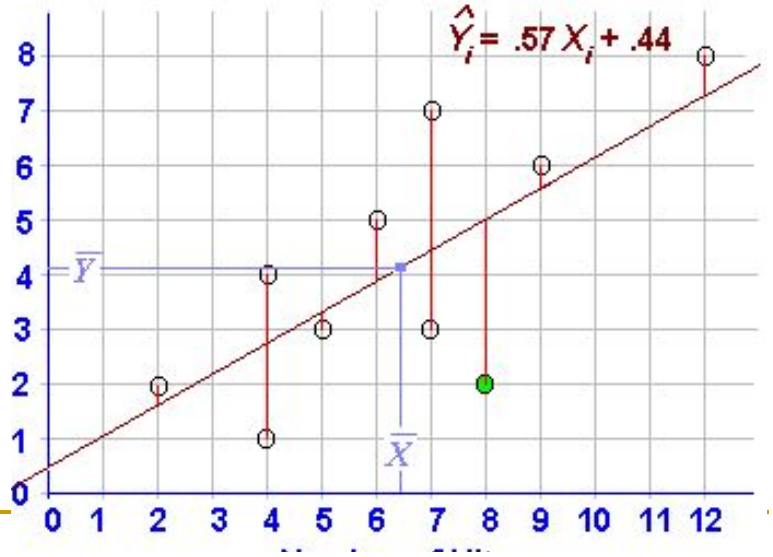
Чем меньше **стандартное отклонение ошибок e_i** (standard error of estimate), тем точнее предсказание (потому, что оно напрямую зависит от размера самих ошибок).

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum (e_i - \bar{e})^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

$$s_e = s_Y \sqrt{1 - r^2} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}$$

≈ 1

зависит от квадрата коэффициента корреляции



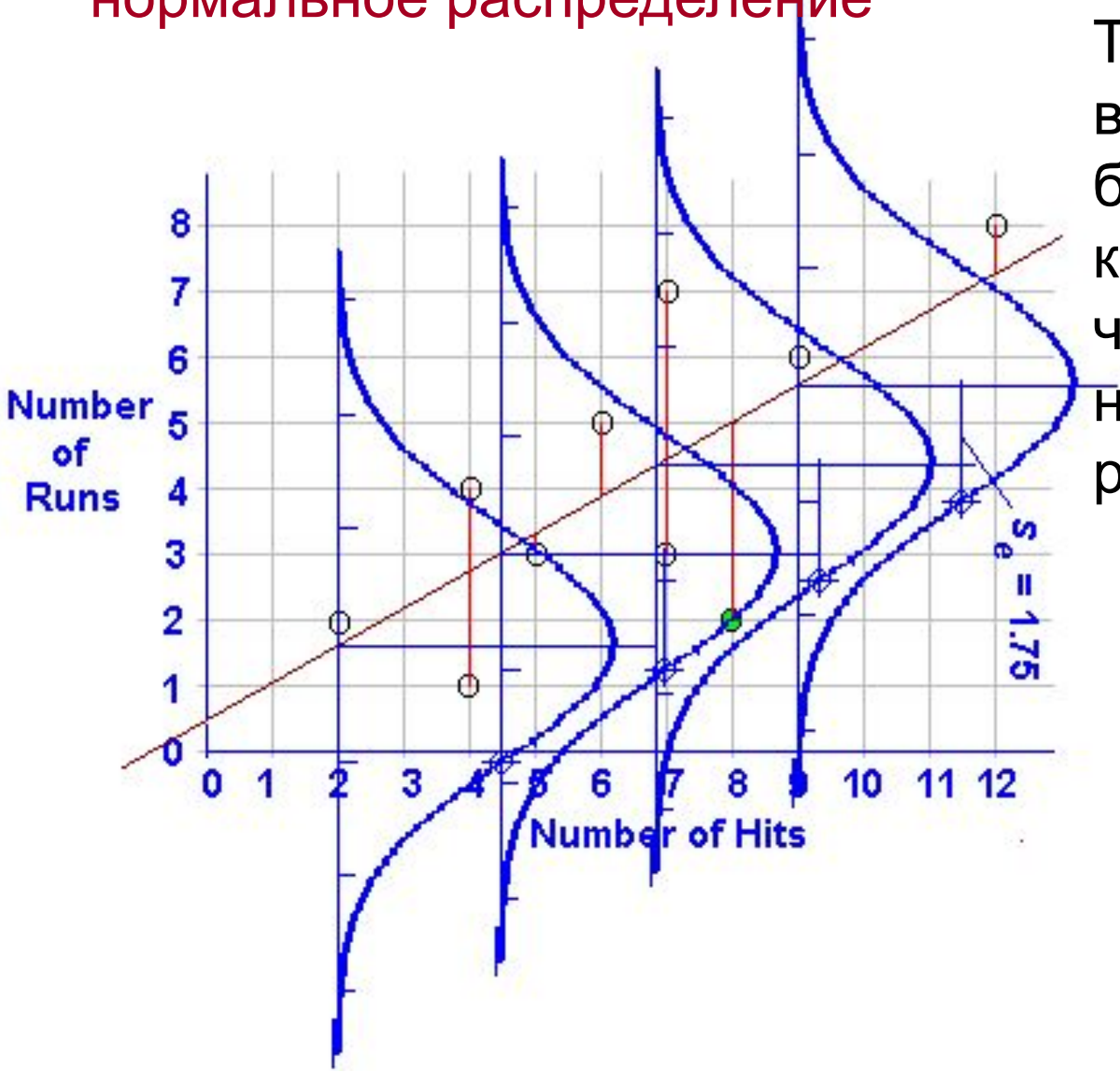
Чем *больше* коэффициент корреляции, тем *меньше* стандартное отклонение ошибки, и наоборот.

Важное требование к выборке: размер этой стандартной ошибки должен быть независимым от X.

Квадрат коэффициента корреляции Пирсона называется коэффициент детерминации (coefficient of determination) - r^2 или R^2. Определяет, какую долю изменчивости зависимой переменной объясняет независимая переменная (т.е., насколько точно предсказание).

Насколько велик или мал коэффициент корреляции 0.3?
$0.3^2 = 0.09$, независимая переменная объясняет только около 1/10 изменчивости зависимой переменной.

Для любого значения X_i Y должна иметь нормальное распределение



То есть прибавка в весе для всех бегемотов, кормившихся по 20 часов в день имеет нормальное распределение

Требования к выборке для построения линии регрессии

1. Ожидаемая зависимость переменной Y от X должна быть линейной.
2. Для любого значения X_i Y должна иметь нормальное распределение.
3. Для любого значения X_i выборки для Y должны иметь одинаковую дисперсию (homoscedasticity).
4. Для любого значения X_i выборки для Y должны быть независимы друг от друга.

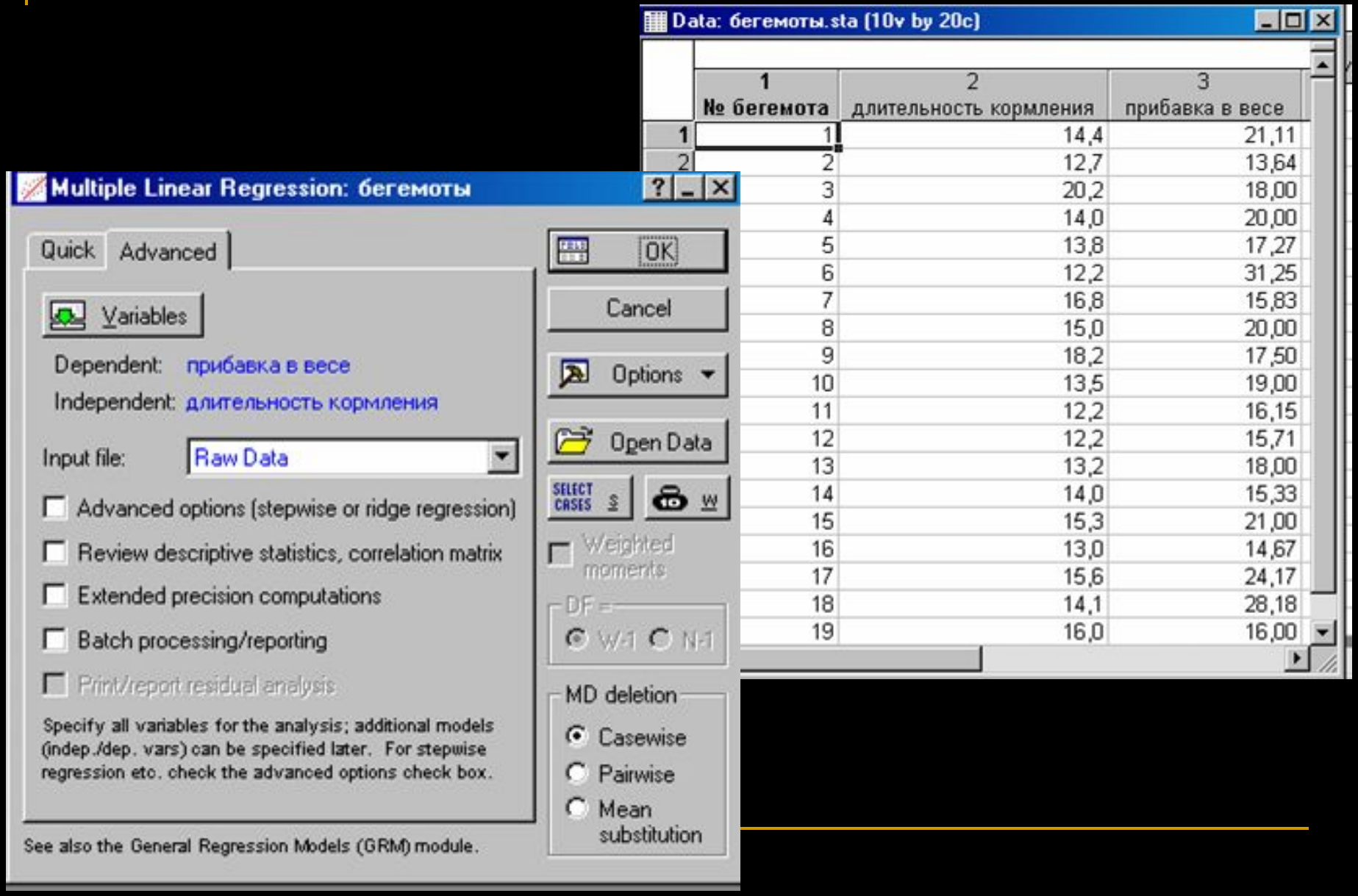
Тестирование гипотезы в регрессионном анализе: отличен ли от нуля наклон линии регрессии?

$$H_0: b_{population} = 0$$

$b_{population}$ часто обозначается как β, в т.ч. в Statistica

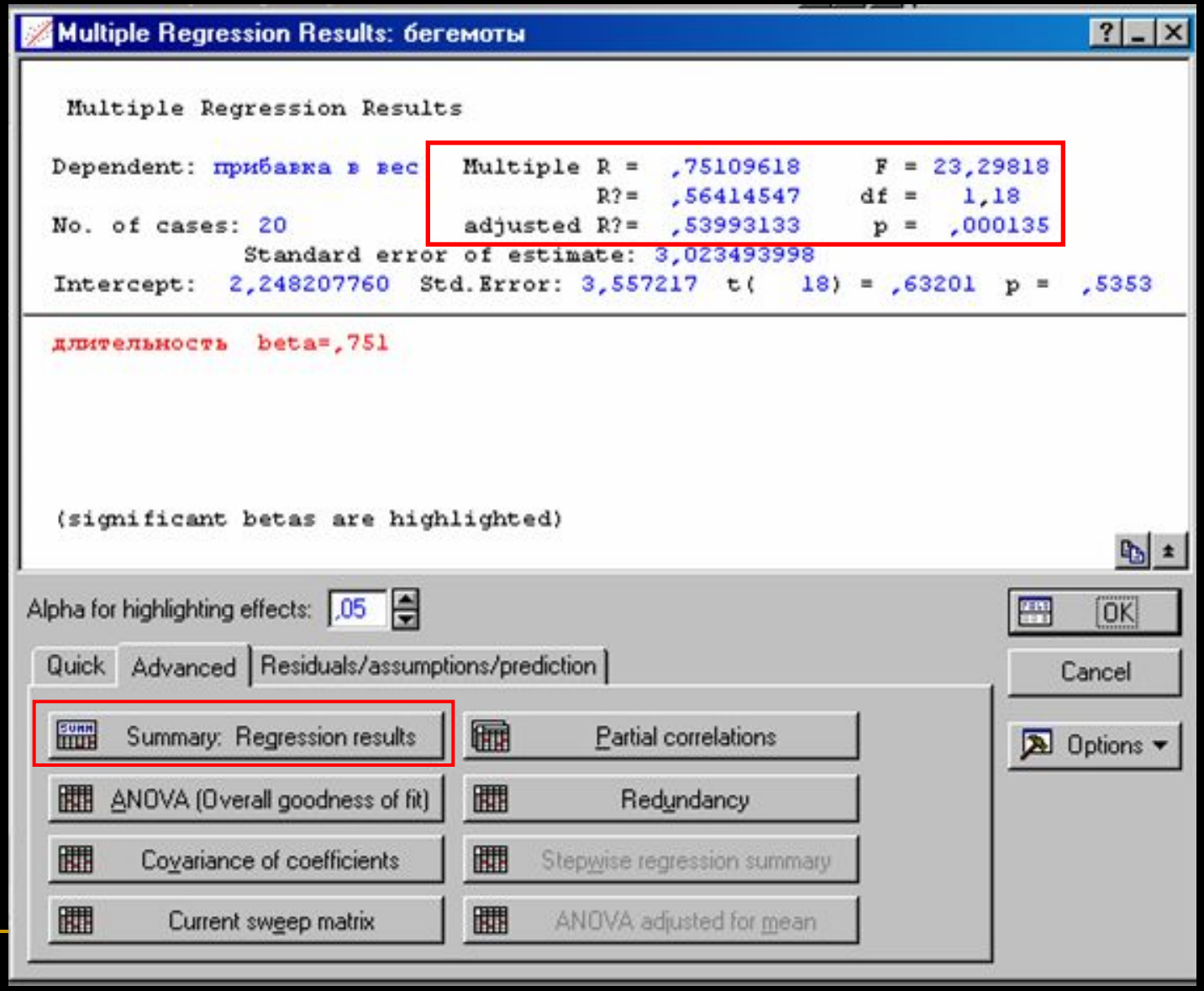
Если r достоверно отличается от нуля, то и $b \neq 0$!
То есть, если мы отвергаем H_0 о том, что r=0, то эта гипотеза отвергается автоматически.

linear regression



linear regression

У бегемотов прибавка в весе положительно зависела от длительности кормления



Summary for Dependent Variable: прибавка в весе (бегемоты)

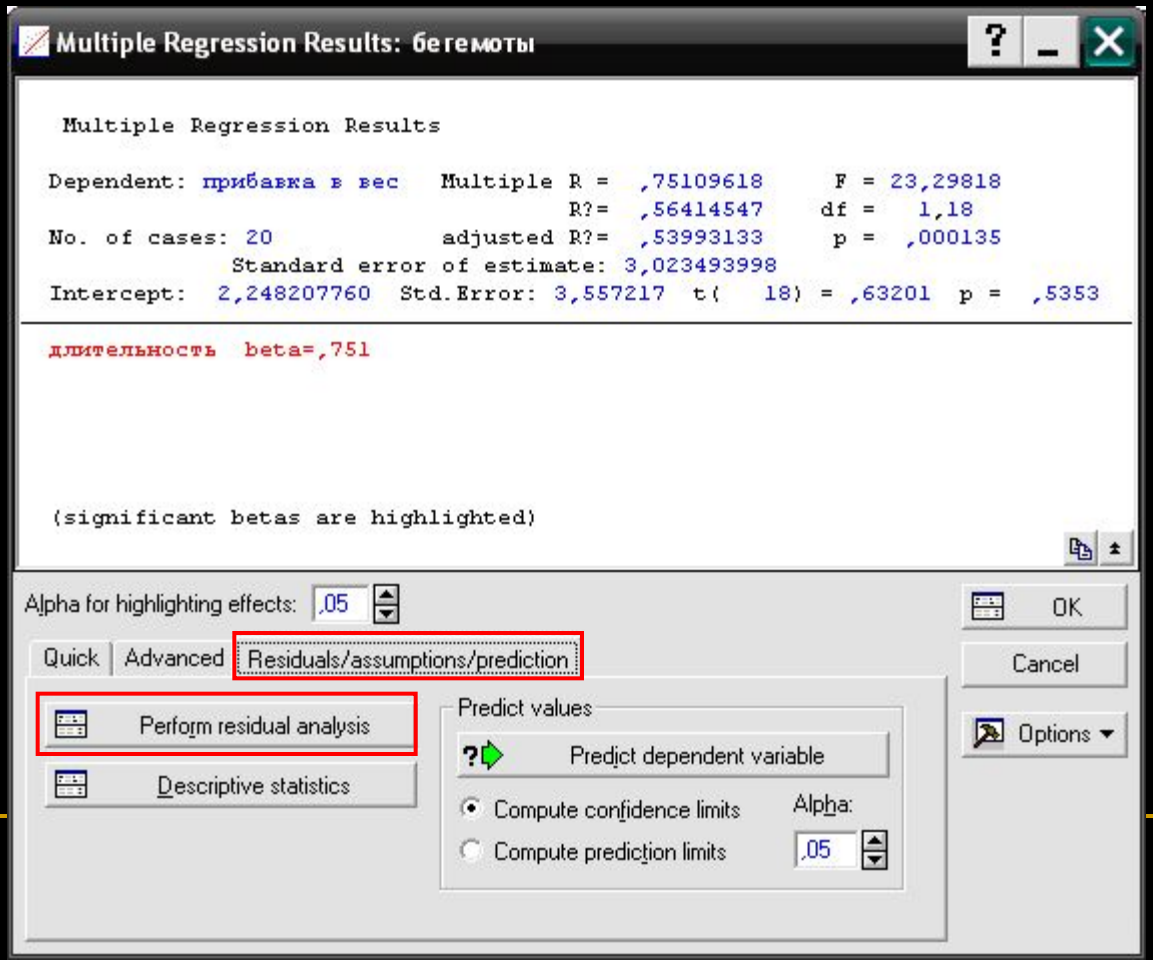
Regression Summary for Dependent Variable: прибавка в весе (бегемоты)
R= ,75109618 R?= ,56414547 Adjusted R?= ,53993133
F(1,18)=23,298 p<,00014 Std.Error of estimate: 3,0235

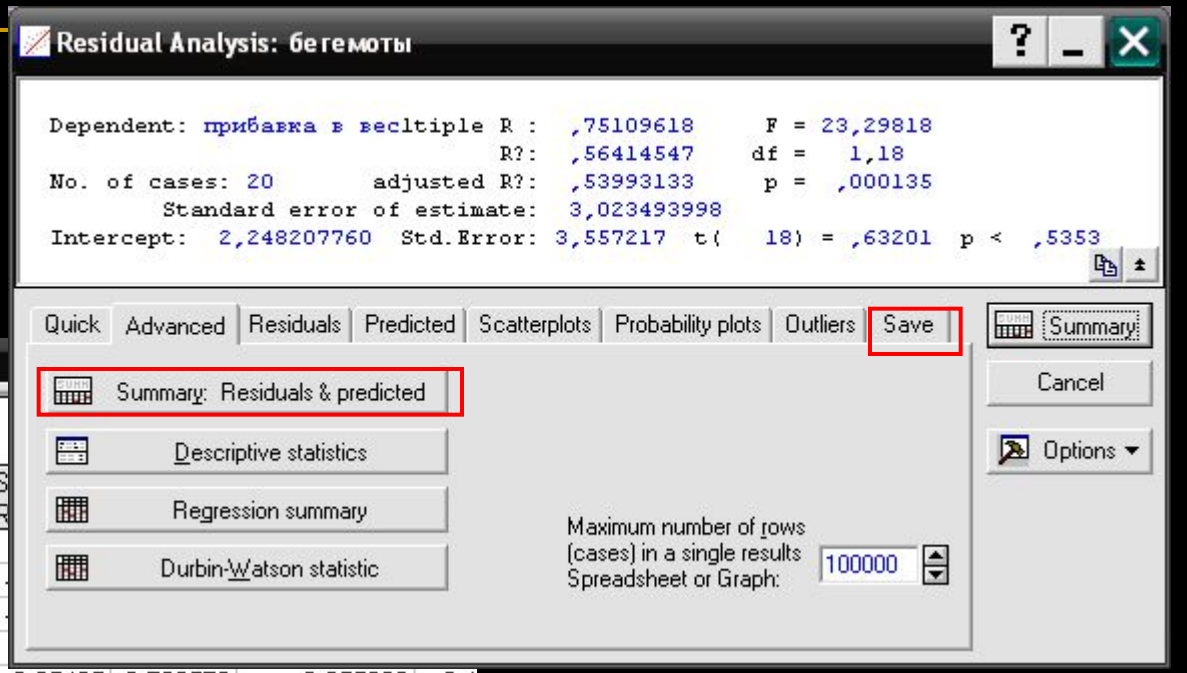
N=20	Beta	Std.Err. of Beta	B	Std.Err. of B	t(18)	p-level
Intercept			2,248208	3,557217	0,632013	0,535324
длительность кормления	0,751096	0,155609	1,079058	0,223555	4,826819	0,000135

Коэффициент наклона в стандартной форме

Коэффициенты a и b

Часто «остатки» используют как самостоятельную переменную

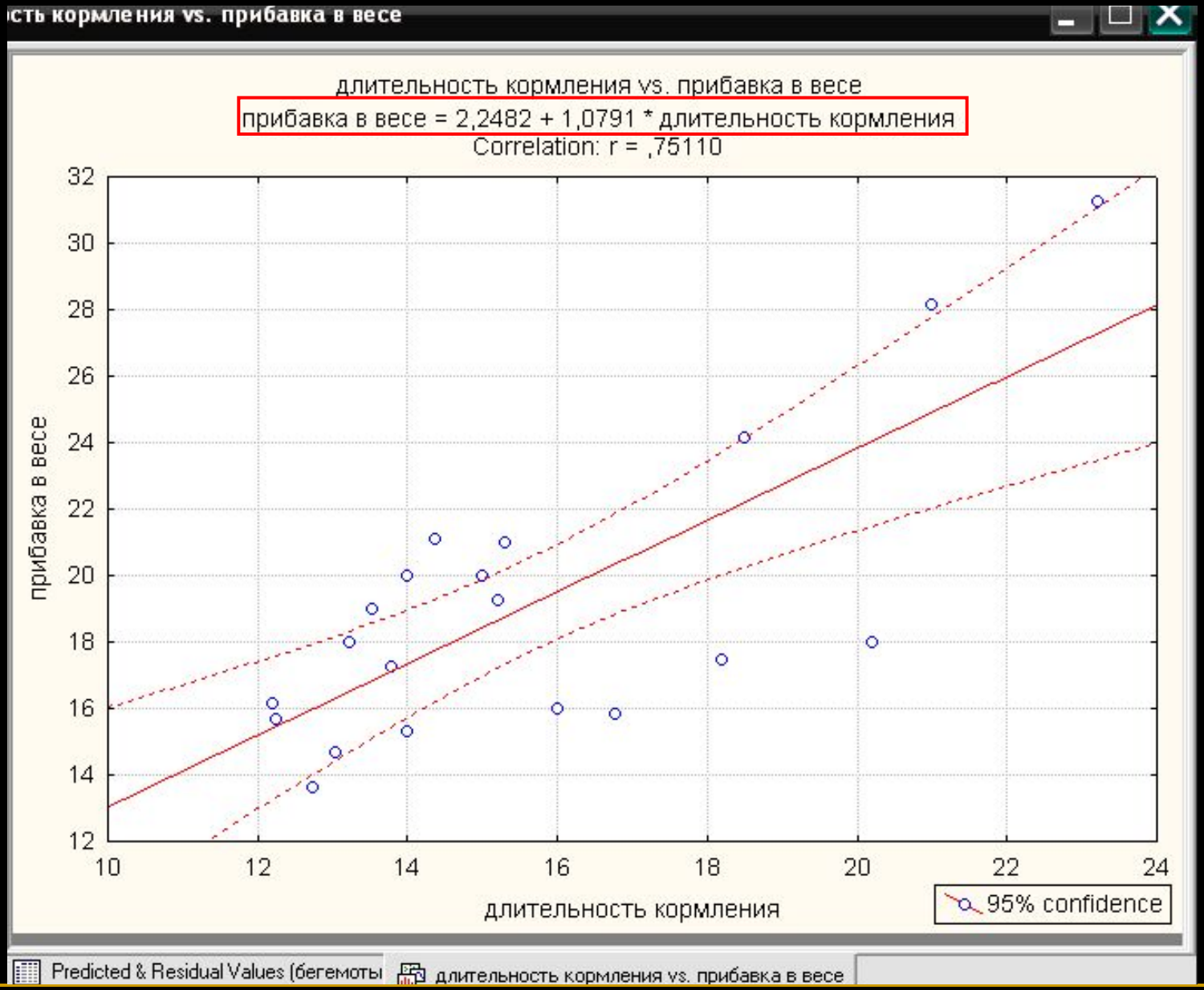




Residual Values (бегемоты)

Predicted & Residual Values (бегемоты)
Dependent variable: прибавка в весе

Case No.	Observed Value	Predicted Value	Residual	Standard Pred. v.	S R			
1	21,11111	17,74611	3,36500	-0,40596				
2	13,63636	15,99417	-2,35781	-0,92923				
3	18,00000	24,04059	-6,04059	1,47408				
4	20,00000	17,35502	2,64498	-0,52277				
5	17,27273	17,10871	0,16402	-0,59634	0,05425	0,792576	0,355622	0,1
6	31,25000	27,28236	3,96764	2,44233	1,31227	1,824011	5,964968	6,2
7	15,83333	20,33500	-4,50167	0,36729	-1,48890	0,722483	0,134902	-4,7
8	20,00000	18,43408	1,56592	-0,20048	0,51792	0,690227	0,040192	1,6
9	17,50000	21,88707	-4,38707	0,83086	-1,45099	0,888378	0,690330	-4,8
10	19,00000	16,85329	2,14671	-0,67263	0,71001	0,821434	0,452428	2,3
11	16,15385	15,40924	0,74461	-1,10394	0,24627	1,021481	1,218682	0,8
12	15,71429	15,46548	0,24881	-1,08714	0,08229	1,012775	1,181875	0,2
13	18,00000	16,51289	1,48711	-0,77430	0,49185	0,863444	0,599542	1,6
14	15,33333	17,33524	-2,00191	-0,52868	-0,66212	0,769125	0,279502	-2,1
15	21,00000	18,75780	2,24220	-0,10379	0,74159	0,679896	0,010772	2,3
16	14,66667	16,30658	-1,63991	-0,83592	-0,54239	0,890659	0,698763	-1,7
17	24,16667	22,21078	1,95588	0,92755	0,64689	0,933283	0,860347	2,1
18	28,18182	24,90843	3,27339	1,73328	1,08265	1,379321	3,004269	4,1
19	16,00000	19,51314	-3,51314	0,12182	-1,16195	0,681334	0,014839	-3,7
20	19,28572	18,64989	0,63582	-0,13602	0,21029	0,682625	0,018501	0,6
Minimum	13,63636	15,40924	-6,04059	-1,10394	-1,99788	0,679896	0,010772	-7,2
Maximum	31,25000	27,28236	3,96764	2,44233	1,31227	1,824011	5,964968	6,2
Mean	19,10529	19,10529	0,00000	0,00000	0,00000	0,915623	0,950000	0,0
Median	18,00000	18,09010	0,69022	-0,30322	0,22828	0,842439	0,525985	0,7


ость кормления vs. прибавка в весе
длительность кормления vs. прибавка в весе
прибавка в весе = 2,2482 + 1,0791 * длительность кормления
Correlation: r = ,75110
прибавка в весе
длительность кормления
95% confidence
Predicted & Residual Values (бегемоты
длительность кормления vs. прибавка в весе

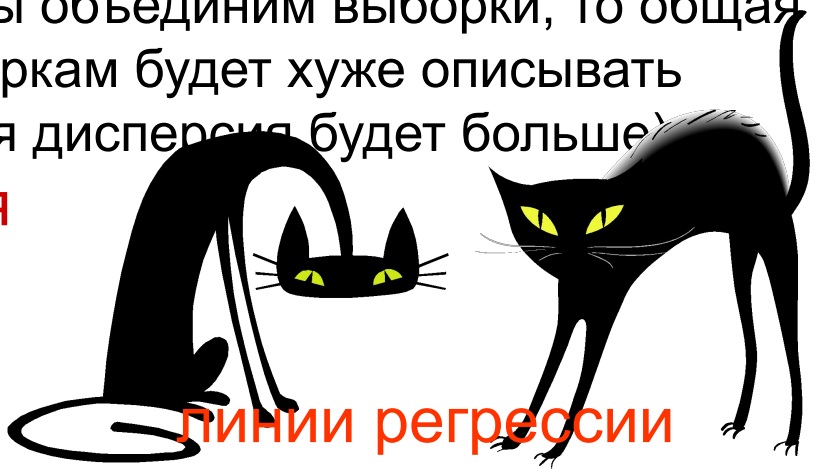
Сравнение двух линий регрессии

1. Сравнение коэффициентов наклона b_1 b_2
2. Сравнение коэффициентов сдвига a_1 и a_2

На основе критерия Стьюдента

3. Сравнение двух линий регрессии в целом
   (предполагается, что если линии для 2-х выборок у нас сильно различаются, и мы объединим выборки, то общая линия по этим двум выборкам будет хуже описывать изменчивость, остаточная дисперсия будет больше)

   на основе F-критерия



Трансформация в регрессии

В случае, если наши переменные связаны друг с другом принципиально не линейной зависимостью:

1. можно трансформировать данные и привести зависимость к линейной;
2. Можно угадать или как-то предположить функцию, которая их связь отражает и потом сравнить данные с ней