

11.7. Интегрирование тригонометрических функций

1

Интегралы вида:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Замена переменной:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

*универсальная тригонометрия
подстановка*

Тогда

$$x = 2\arctgt$$

$$dx = (2\arctgt)' dt = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Следовательно

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

Решение

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

2

Если выражение $R(\sin x, \cos x)$ при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$ только меняет знак, то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

берется заменой

$$t = \cos x$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

Решение

$$\frac{-(\sin x)^3}{\cos^4 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$$

Следовательно, можно применять рекомендуемую подстановку:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = -\int \frac{1}{t^4} dt - \int \frac{t^2}{t^4} dt =$$

$$= -\int \frac{1}{t^4} dt - \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{t^{-3}}{3} - t^{-1} + C =$$

$$= \frac{\cos^{-3} x}{3} - \cos^{-1} x + C$$

3

Если выражение $R(\sin x, \cos x)$ при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$ только меняет знак, то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

берется заменой

$$t = \sin x$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

Решение

$$\sin^2 x \cdot (-\cos x)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x$$

Следовательно, можно применять рекомендуемую подстановку:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt =$$

$$= \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Интегралы вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$$

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$$

$$\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

*где α и β – действительные числа,
вычисляются с помощью формул,
преобразующих произведение
тригонометрических функций в сумму.*

Формулы преобразования:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x)$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x)$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x)$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \sin 3x \cos 5x dx$$

Решение

$$\int \sin 3x \cos 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$$