Математический анализ
2 семестр

Лекция 1

Первообразная. Неопределенный интеграл. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

19 февраля 2014 года
Лектор: профессор НИЯУ МИФИ, д.ф.-м.н.
Орловский Дмитрий Германович

Основные определения, примеры

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной по отношению к функции $f(x)$ на некотором промежутке, если на этом промежутке функция $F(x)$ диффференцируема и удовлетворяет условию $F'(x) = f(x)$ или, что то же самое, $dF(x) = f(x)dx$.

Основные определения, примеры

Пример 1. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ первообразная для $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1;+1)$, т.к. в любой точке этого интервала $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 2. $F(x)=\sin x$ первообразная для $f(x)=\cos x$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$, т.к.

$$\forall x\in(-\infty;+\infty):\ (\sin x)'=\cos x.$$

Основные определения, примеры

Пример 3. $F(x)=\operatorname{arctg} x$ первообразная для

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ на всей числовой оси, т.к. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 4. $F(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ первообразная для

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ на $I=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ т.к.

$$\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Общий вид первообразной

Теорема. Если даны две первообразные

$$F_1(x), \quad F_2(x)$$

одной и той же непрерывной функции

$$f(x)$$

на некотором промежутке, то всюду на этом промежутке

$$\boxed{F_1(x) = F_2(x) + const}$$

Общий вид первообразной

<u>Виды промежутков</u>

$$\varnothing,$$
$$[a;b],\ (a;b),\ [a;b),\ (a;b],$$
$$(-\infty;b],\ (-\infty;b),\ [a;+\infty),\ (a;+\infty),$$
$$(-\infty;+\infty)$$

<u>Основное свойство промежутка (связность)</u>

$$x_1, x_2 \in I \quad \Rightarrow \quad [x_1;x_2] \subset I$$

Общий вид первообразной

Теорема Лагранжа о конечном приращении.

Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b), то найдется точка $\xi\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Симметричная форма теоремы Лагранжа

Если функция f(x) дифференцируема во всех точках некоторого промежутка, то для любых двух точек x_1,x_2 из этого промежутка

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$$

где точка ξ лежит между точками x_1 и x_2.

Жозеф Луи Лагранж

25.01.1736 –
– 10.04.1813

Французский математик и механик, член Парижской АН (1772). Родился в семье обедневшего чиновника. Самостоятельно изучал математику. В 19 лет Лагранж уже стал профессором в артиллерийской школе Турина. В 1759 избран член Берлинской АН, а в 1766—87 был её президентом. В 1787 Л. переехал в Париж; с 1795 профессор Нормальной школы, с 1797 — Политехнической школы.

Автор классического трактата «Аналитическая механика», в котором установил фундаментальный «принцип возможных перемещений» и завершил математизацию механики. Внёс большой вклад в развитие анализа, теории чисел, теорию вероятностей и численные методы, создал вариационное исчисление.

Пешеходный мостик в Пекине

Общий вид первообразной

Следствие.(Критерий постоянства функции)
Непрерывная на промежутке функция постоянна на нем тогда и только тогда, когда производная равна нулю в любой точке этого промежутка.

Доказательство.

1) $F(x) = const \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 0$

Общий вид первообразной

2) $F'(x)=0 \;\Rightarrow$ для любых x_1, x_2

$$F(x_2)-F(x_1)=F'(\xi)(x_2-x_1)=0\cdot(x_2-x_1)=0.$$

$$\forall\; x_1, x_2 \quad F(x_1)-F(x_2)=0 \;\Rightarrow\; F(x)=const$$

Доказательство теоремы

$$F_1'(x)=f(x),\;\; F_2'(x)=f(x)$$

$$F(x)=F_1(x)-F_2(x) \;\Rightarrow\; F'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=0$$

$$F(x)=const \;\Rightarrow\; F_1(x)-F_2(x)=const \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_1(x)=F_2(x)+const}$$

Общий вид первообразной

Следствие.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные функции $f(x)$ на одном и том же промежутке, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на этом промежутке.

Замечание. Условие, что сравнение $F_1(x)$ и $F_2(x)$ ведется на связном множестве существенно.

Основные определения, примеры

Пример.

Пусть $F_1(x)=\operatorname{arctg}(x)$ и $F_2(x)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right)$. Их производные совпадают на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ - области их совместного определения.

Но!

$$F_1(x)-F_2(x)=\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}(x)=0\ \ (x>0),$$

$$F_1(x)-F_2(x)=-\pi\ \ (x<0),$$

так как при $x<0$ $\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right)=\pi+\operatorname{arctg}(x)$

Основные определения, примеры

Операция перехода к первообразной имеет свое название - неопределенное интегрирование и обозначение: $\int f(x)dx$

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется её неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $C \in R$, а выражение $f(x)dx$ называ ется подынтегральным выражением, $f(x)$ - подынтегральной функцией.

Утверждение 2

Утверждение 2. Дифференцирование и неопределенное интегрирование взаимообратные операции с точность ю до постоянной C.

Доказательство.

$$d\int f(x)dx = d\left(F(x)+C\right) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

$$\int dF(x)dx = \int F'(x)dx = F(x)+C \ \square$$

Следствие. Производная от неопределнного интеграла равна подынтегральной функции.

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x). \ \square$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C_1 \end{cases}.$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C_1 \end{cases}.$

Таблица неопределенных интегралов

9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

10. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

11. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1+x}{1-x} \right| + C.$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)x^{\alpha} = x^{\alpha}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (x>0)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x} \quad (x<0)$$

Таблица неопределенных интегралов

$$7.\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C_1 \end{cases}.$$

$$8.\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C_1 \end{cases}.$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} = \frac{\pi}{2}$$

Таблица неопределенных интегралов

Частные случаи

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Таблица неопределенных интегралов

Дополнительная таблица

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 - x^2\right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2}\,| + C \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$$

Замечание

Замечание: Каждая из этих формул рассматривается на тех промежутках вещественной оси R, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то постоянная может меняться от промежутка к промежутку.

Основные правила вычисления интегралов

1. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Доказательство.

$$\left(\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx\right)'=f(x)\pm g(x)$$

$$\left(\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right)'=\left(\int f(x)dx\right)'\pm\left(\int g(x)dx\right)'=f(x)\pm g(x)$$

2. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$

Доказательство.

$$\left(\int af(x)dx\right)'=af(x)$$

$$a\left(\int f(x)dx\right)'=af(x)$$

Основные правила вычисления интегралов

Теорема. (Замена переменных в неопределенном интеграле)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на X, а $x = \varphi(t)$, $t \in T$, $\varphi(t) \in C^1(T)$,

то есть $\varphi(t)$ непрерывна вместе с $\varphi'(t)$ и $\varphi(t)$ облада ет обратной

функцией) то интеграл $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство. Покажем, что левая и правая части имеют равные производные по одному и тому же аргументу.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \frac{d}{dt}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \cdot \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x).$$

Таким образом, интегралы в левой и правой частях равны. □

Пример.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\begin{vmatrix}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{vmatrix}=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(\int dt+\int\cos 2t\,dt\right)=\frac{1}{2}\left(\int dt+\int\cos 2t\frac{d2t}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} = \left| \begin{array}{c} \sin t = z \\ \cos t dt = dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{1 - z^2} == \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) dz$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\int \frac{d(1-z)}{1-z} + \int \frac{d(1+z)}{1+z} \right) = \frac{1}{2} \left(-\ln|1-z| + \ln|1+z| \right) + C =$$

Продолжение:

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}}{1-\dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

Получили табличный интеграл: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$

Основные правила вычисления интегралов

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right| = \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2} - 1}} = \int \frac{\sin t \cos t dt}{\cos^2 t \sin t} = \int \frac{dt}{\cos t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-\cos^2 t}}{1-\sqrt{1-\cos^2 t}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)^2 \right| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C$$

Получили табличный интеграл: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C.$

Интегрирование по частям.

По правилу дифференцирования произведения

$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$, откуда

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Последнее соотношение называется формулой интегрирования по частям.

Классы функций интегрируемых по частям

Классы функций интегрирования по частям.

1. $J=\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен.

$u=P_n(x)$, $dv=e^{\alpha x}dx.$

$$v=\int dv=\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}d\alpha x=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$$

$$J=P_n(x)\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}-\int\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}P_n'(x)dx$$

Степень многочлена стала меньше на единицу

Пример

$$\int \left(x^2+1\right)e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+1; \quad du = 2xdx; \quad e^{3x}dx = dv \\ v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int d\left(e^{3x}\right) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(x^2+1\right)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2xdx = \left| \begin{matrix} u = x; \quad du = dx; \\ dv = e^{3x}dx; \quad v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2+1\right) -$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2+1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{9}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2+1\right) - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2e^{3x}}{27} + C$$

Классы функций интегрируемых по частям

2. $J = \int P_n(x)\sin\alpha x dx$

$\left(\text{или } J = \int P_n(x)\cos\alpha x dx\right)$,

где $P_n(x)$ - многочлен.

$u = P_n(x)$,

$dv = \sin\alpha x dx \ \left(dv = \cos\alpha x dx\right)$.

Пример

$$\int\left(x^2+1\right)\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2+1;\ du=2x\,dx \\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x;\ dv=\cos 2x\,dx\end{array}\right|=\left(x^2+1\right)\frac{1}{2}\sin 2x-\int x\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-$$

$$-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

Замечание.

$$\int u\,dv=u\left(v+C\right)-\int\left(v+C\right)du=uv+Cu-Cu-\int v\,du=uv-\int v\,du$$

Классы функций интегрируемых по частям

$$J=\int P_n(x)\begin{pmatrix}\arcsin x\\ \arccos x\\ \operatorname{arctg} x\\ \operatorname{arcctg} x\end{pmatrix}dx\ ,$$

где $P_n(x)$ - многочлен.

$$dv=P_n(x)\,dx,\ u=\arcsin x\ \left(\arccos x;\ \operatorname{arctg} x;\ \operatorname{arcctg} x\right).$$

Пример

Пример.

$$\int\left(x^2+1\right)\arcsin x\,dx=\left|\begin{matrix}\left(x^2+1\right)dx=dv\Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}+x\\ \arcsin x=u\Rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{matrix}\right|=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x-$$

$$-\int\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{matrix}\right|=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{\sin^3 t\cos t\,dt}{\cos t}-\int\frac{\sin t\cos t\,dt}{\cos t}=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x-\frac{1}{3}\int\sin t\left(1-\cos^2 t\right)dt+\cos t=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arcsin x+\cos t-$$

$$-\frac{1}{3}\left(-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t\right)+C=J$$

Продолжение

Продолжение:

$$J = \arcsin x + \cos t - \frac{1}{3}\left(-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right) + C =$$

$$\arcsin x + \frac{4}{5}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\left(1-x^2\right) + C$$

Классы функций интегрируемых по частям

4. $J=\int P_n(x)(\ln x)^k\,dx$,

где $P_n(x)$ - многочлен.

$dv=P_n(x)\,dx$, $u=(\ln x)^k$

Пример

$$\int\left(x^2+1\right)(\ln x)^2\,dx=\left|\begin{array}{l} u=(\ln x)^2;\ du=\dfrac{2\ln x}{x}dx \\ dv=\left(x^2+1\right)dx;\ v=\dfrac{x^3}{3}+x\end{array}\right|=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)(\ln x)^2-$$

$$-\int\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{2\ln x}{x}dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)(\ln x)^2-2\int\left(\frac{x^2}{3}+1\right)\ln x\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x} \\ \left(\dfrac{x^2}{3}+1\right)dx=dv,\ v=\dfrac{x^3}{9}+x\end{array}\right|=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)(\ln x)^2-2\ln x\left(\frac{x^3}{9}+x\right)+$$

$$+2\int\left(\frac{x^3}{9}+x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)(\ln x)^2-2\ln x\left(\frac{x^3}{9}+x\right)+2\left(\frac{x^3}{27}+x\right)+C$$

Классы функций интегрируемых по частям

$$5.\ J = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \left|\begin{matrix} u = e^{ax};\ du = e^{ax}dx \\ dv = \sin bx;\ v = -\dfrac{1}{b}\sin bx \end{matrix}\right| = -\frac{1}{b}e^{\alpha x}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int \cos(bx)e^{ax}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = e^{ax};\ du = e^{ax}dx \\ dv = \cos bx dx;\ v = \dfrac{1}{b}\sin bx \end{matrix}\right| = -\frac{1}{b}e^{\alpha x}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{\alpha x}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a^2}{b^2}J \Rightarrow$$

$$J = \frac{e^{ax}\left(\dfrac{a}{b^2}\sin(bx) - \dfrac{1}{b}\cos(bx)\right)}{1 + \dfrac{a^2}{b^2}} = \frac{e^{ax}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)}{a^2 + b^2}$$

Классы функций интегрируемых по частям

Рекуррентные формулы.

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}, \quad dx = dv, \ v = x, u = \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}, \ du = -\frac{2x}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx$$

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} -$$

$$-2na^2\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$ или

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$ т. е. $$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + (2n-1)J_n\right)$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3} = J_3; \quad \int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 9}\left(\frac{x}{\left(x^2+9\right)^2} + 3\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{x}{\left(x^2+9\right)^2} + \frac{3}{2\cdot 9}\left(\frac{x}{x^2+9} + \int \frac{dx}{x^2+9}\right)\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3} = \frac{1}{36}\left(\frac{x}{\left(x^2+9\right)^2} + \frac{3}{2\cdot 9}\left(\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)\right) + C$$

Математический анализ.
Первообразная. Неопределенный интеграл.
Замена переменной в неопределенном интеграле, формула интегрирования по частям.
Лекция 1 завершена.

Спасибо за внимание!

Тема следующей лекции:
Формула интегрирования по частям.
Интегрирование рациональных выражений.
Лекция состоится в среду 26 февраля
В 10:00 по московскому времени.