Лекция N14

Лектор: доц. Лаптева Надежда Александровна

Тема: Неопределенный интеграл

Ранее мы по данной функции вычисляли ее производную. Сегодня мы поставим обратную задачу: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x),$ производная которой равнялась бы заданной функции $f(x),$ т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Определение. **Функция** $F(x)$ **называется** **первообразной** **функции** $f(x)$, **если**

$$F'(x) = f(x).$$

Примеры.

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow F_1(x) = \sin x;$$

$$(\sin x + 1)' = \cos x \Rightarrow F_2(x) = \sin x + 1;$$

Таким образом, $F(x)+C$ - это совокупность всех первообразных от данной функции.

<u>Определение 2.</u> Пусть $F(x)$ - одна из первообразных для функции $f(x)$.

Тогда выражение $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Здесь $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, **а** $f(x)\,dx$ **- подынтегральным выражением.**

Свойства

$$1)\quad d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$$

$$2)\quad \int dF(x)=F(x)+C$$

3) $$\int \left(f(x) + \varphi(x) \right) dx = \\ = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx$$

4) $$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Таблица основных интегралов

1) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

2) $\int dx = x + C$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

Таблица основных интегралов

4) $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

5) $$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Таблица основных интегралов

$$6) \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$7) \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

Таблица основных интегралов

$$8)\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$9)\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Таблица основных интегралов

10) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Докажем справедливость формулы 3)

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Если $x > 0,$ **то** $|\, x \,| = x$ **и** $\ln|\, x \,| = \ln x.$

$d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}.$ **Следовательно, для** $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln|x| + C.$$

Если $x < 0,$ **то** $|\, x \,| = -x$ **и** $\ln |\, x \,| = \ln(-x).$

$$d \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) dx = \frac{dx}{x}.$$

Следовательно, для $x < 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C = \ln|x| + C.$$

Примеры.

1) $$\int\left(x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int x^2dx+$$

$$+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-3}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^{-2}}{2}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2x^2}+C.$$

2) $$\int \frac{x+1}{x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{dx}{x} = x + \ln|x| + C.$$

3) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \, dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

4) $\int 2^x \cdot 3^x \, dx = \int 6^x \, dx = \dfrac{6^x}{\ln 6} + C.$

5) $\int \dfrac{2^x + 3^x}{3^x} dx = \int \left(\dfrac{2^x}{3^x} + \dfrac{3^x}{3^x} \right) dx =$

$$= \int \left(\left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right) dx = \int \left(\frac{2}{3} \right)^x dx + \int dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + x + C.$$

6) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

$$8)\ \int \frac{x+\sqrt{x}+1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{3}{2}}dx + \int x^{-2}dx =$$

$$= \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C.$$

9) $$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

10) $$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Теорема. Любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную.

Действие отыскания неопределенного интеграла или, что то же самое, нахождение всех первообразных от данной функции, называется **интегрированием** этой функции.

Дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями.

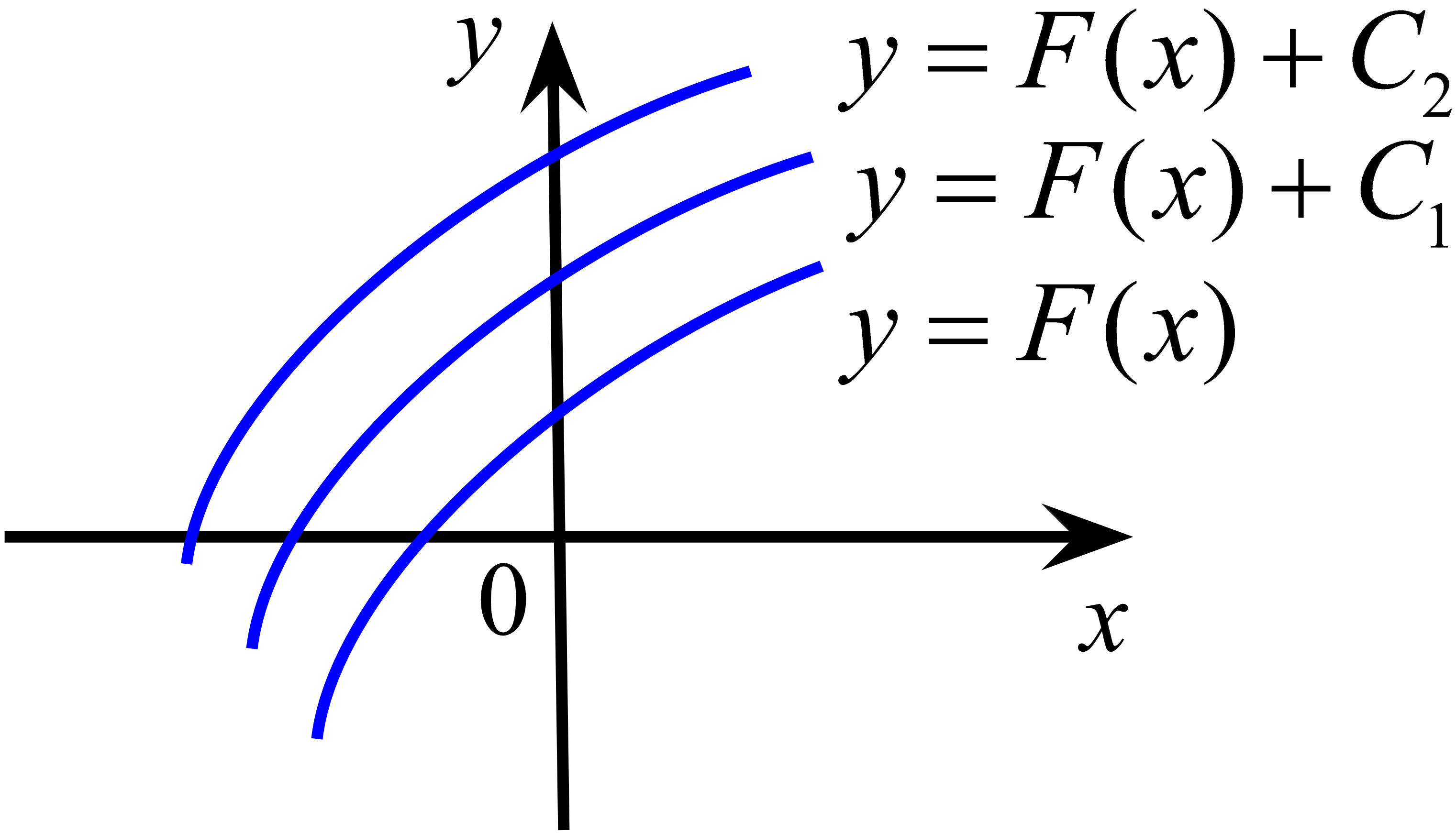
Геометрический смысл неопределенного интеграла

Назовем график первообразной функции от $f(x)$ интегральной кривой.

Таким образом, если $F'(x) = f(x)$,

то график функции $y = F(x)$ **есть интегральная кривая.**

Неопределенный интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых



<u>Пример.</u> $\int 2x\,dx = x^2 + C.$

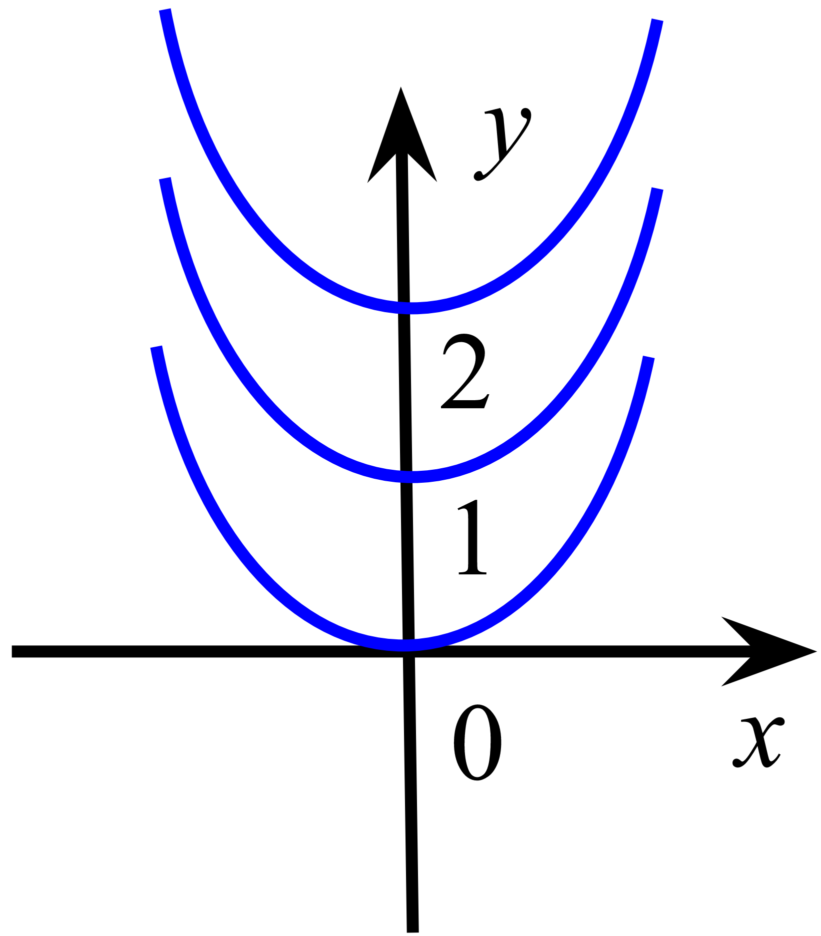
Построить интегральные кривые.

Пусть

$C = 0; \quad y = x^2.$

$C = 1; \quad y = x^2 + 1.$

$C = 2; \quad y = x^2 + 2.$



Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях

В дифференциальном исчислении производная от любой элементарной функции есть функция элементарная. Другое дело операция, обратная дифференцированию, – интегрирование.

Можно привести примеры элементарных функций, первообразные от которых хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Так, например, по теореме существования для функций $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{\cos x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$ **существуют первообразные, но они не выражаются в элементарных функциях.**

Несмотря на это, все эти первообразные хорошо изучены и для них составлены таблицы, помогающие практически использовать эти функции.

Так, например, большое значение в приложениях играет первообразная $\Phi(x)$

от функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

удовлетворяющая дополнительному условию

$$\Phi(x) = 0.$$

Эта функция встречается в теории вероятностей и называется интегралом вероятностей.

Если первообразная для некоторой функции не является элементарной функцией, то говорят, что интеграл не берется в элементарных функциях.

Тема: Замена переменной в неопределенном интеграле

Введем вместо x новую переменную t, связанную с x соотношением $x = \varphi(t)$.

Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Примеры.

1) $$\int \sin ax\, dx =$$

$$ax = t;$$

$$d(ax) = dt;$$

$$a\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt.$$

$$= \int \sin t \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int \sin t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{a} \cos t + C = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$$

2) $\int \operatorname{tg} x\, dx.$

Имеем

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Заметим, что

$$\sin x\, dx = -d(\cos x).$$

Здесь мы устно ввели под знак интеграла функцию $\sin x.$

3) $\int x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Замечая, что $x\,dx=\frac{1}{2}d\left(x^2+1\right)$,
получаем

$$\int x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3/2}+C=\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3}+C.$$

4) Интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx \, dx,$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx.$$

Эти интегралы вычисляются методом разложения на основании тригонометрических тождеств.

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2},$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m+n)x}{2}.$$

5) $$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx =$$

$$x^3+1=t;$$

$$d\left(x^3+1\right)=dt;$$

$$3x^2\,dx = dt;$$

$$x^2\,dx = \frac{1}{3}dt.$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$$

Можно устно внести x^2 **под знак дифференциала:**

$$x^2dx=\frac{1}{3}d\left(x^3+1\right).$$

Тогда

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3+1\right)}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$$

6) $\int \sin x \cos x \, dx.$

Рассмотрим три способа.

① $\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \; d(\sin x) =$

$$= \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

② $\int \sin x \cos x \, dx = -\int \cos x \; d(\cos x) =$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

③ $$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \; dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x \; d(2x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

<u>**Проверка.**</u>

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2} + C\right)' = \sin x \cdot \cos x.$$

$$\left(-\frac{\cos^2 x}{2}+C\right)'=\sin x\cdot\cos x.$$

$$\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+C\right)'=+\frac{1}{4}\cdot 2\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x=\sin x\cdot\cos x.$$

7) $$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

$$8)\quad \int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)\,d(\sin x) =$$

$$= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x\,d(\sin x) =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$