

Семинар 7. Потенциальное движение.

Справочно: Плоским движением называется такое, при котором траектории всех частиц являются плоскими кривыми, лежащими в параллельных между собой плоскостях. Очевидно, что все движения в разных параллельных плоскостях в общем случае может быть различным.

Поскольку траектории частиц жидкости представляют собой пространственные кривые, то поле скорости в общем случае определяется системой:

$$w_X = F_1(x, y, z, t); w_Y = F_2(x, y, z, t); w_Z = F_3(x, y, z, t)$$

Тогда для плоского движения, параллельного осям OX и OY , имеем:

$$w_X = F_1(x, y, z, t); w_Y = F_2(x, y, z, t); w_Z = 0$$

В частном случае, когда в каждой из параллельных плоскостей движение тождественно:

$$w_X = F_1(x, y, t); w_Y = F_2(x, y, t); w_Z = 0$$

Вывод: Такое движение называют - плоскопараллельным.

Основная система уравнений плоскопараллельного движения

Общие условия плоскопараллельного движения

Пусть движение параллельно плоскости XOY , тогда $w_z = 0$ и $\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_y}{\partial z} = 0$
а уравнения Эйлера принимают сокращенную форму:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}; Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}$$

Уравнение неразрывности примет также более краткую форму:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

Характеристическое уравнение остается без изменений: $\rho = \varphi(p, T)$

Потенциальное движение – движение без вихревое, поэтому все три компонента вихря должны быть равны нулю.

Однако для плоского параллельного потока два первых вихря:

$$\omega_x = \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \quad \text{и} \quad \omega_y = \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)$$

равны нулю даже и в том случае, если бы движение было вихревым т.к. при

потенциальном движении $w_z = 0$ и $\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w_y}{\partial z} = 0$

Вывод: аналитическим условием потенциальности в этом случае будет

равенство: $\omega_z = \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = 0$ $\frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y}$

Потенциал скорости $\varphi(x,y)$

Известно, что проекции скорости по координатным осям при потенциальном движении определяются по формулам:

$$\text{и} \quad w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

где φ - потенциал скорости.

Фактически, рассматривая потенциальное движение, мы можем использовать весь аппарат **теории поля!!!**

Для установившегося движения или для данного момента времени потенциал скорости выражается функцией координат x и y , т.е. $\varphi = \varphi(x,y)$

Тогда линии $\varphi(x,y) = \text{const}$ являются эквипотенциальными или линиями равного потенциала. При этом потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Это следует из прямой подстановки величин $w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ в уравнение неразрывности.

Замечание: Казалось бы, формально, введение в анализ уравнения Лапласа упрощает задачу, т.к. приходится работать только с одной функцией φ вместо двух w_x и w_y , которые могут быть найдены как производные

$$\text{и} \quad w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Однако решение уравнения Лапласа очень часто представляет собой более сложную задачу, нежели прямое определение функций w_x и w_y

Функция тока $\psi(x,y)$

Кроме потенциала скорости, существует ещё одна важная функция $\psi(x,y)=C$, которая характеризуется тем, что компоненты скорости w_x и w_y определяются так же, как частные производные функции $\psi(x,y)$ по x и y , но следующим образом:

Если записать выражение полного дифференциала $d\psi = w_x dx + w_y dy$ для непрерывной функции $\psi(x,y)=C$ в виде:

$$d\psi(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

то условия $\frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial x}$ и $\frac{\partial(-w_y)}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y}$ имеют место только в том случае, если выражение $w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, представляет собой также полный дифференциал, а для этого требуется чтобы выполнялось следующее равенство:

Оно действительно выполняется в силу уравнения неразрывности:

т.е. величины w_x и w_y действительно существуют и могут быть

наделены конкретным физическим смыслом.

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad w_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$



Функция тока $\psi(x,y)$

Рассмотрим теперь, что представляет собой уравнение $\psi(x,y)=C$.

Из уравнений линий тока $\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y}$ получим: $-w_y dx + w_x dy = 0$

Сравнивая уравнение линии тока с уравнением полного дифференциала, видим, что они тождественны.

Следовательно, при графическом изображении линий $\psi(x,y)$ для ряда C_1, C_2, \dots, C_n они тождественно совпадают с линиями тока. По этой причине функция называется функцией тока. Уравнение представляет собой семейство линий тока.

Замечание: Функция $\psi(x,y)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа, т.к. для

потенциального движения

$$, \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad \text{и} \quad w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad w_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

поэтому после подстановки имеем:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Функция тока $\psi(x,y)$

Физический смысл функции тока заключается в том, что удельный расход ΔQ , проходящий между двумя данными линиями тока, равен разности значений функции тока ψ , отвечающих этим линиям.

Замечание: Зная удельный расход ΔQ между двумя данными линиями тока, можно определить скорости $w = \Delta Q / \Delta b$,

где Δb - расстояние между указанными линиями тока в выбранном сечении.

В результате, имея систему линий тока с равными интервалами приращения функции тока, приближенно можно определить все поле скоростей в данном потоке, тем точнее, чем меньше интервал $\Delta\psi$.

Это имеет большое практическое значение!!!

Между функциями φ и ψ имеется простая аналитическая связь в виде:

$$w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Следовательно, если известна одна из них, то по ней может быть найдена и другая.

Например, известна φ , поскольку

$$d\psi = -w_y dx + w_x dy$$

$$\psi = \int -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$$

Геометрическая связь между функциями φ и ψ заключается в том, что они образуют ортогональную гидродинамическую сетку, которая имеет большое практическое значение. **Если сетка построена, то можно считать всю задачу о движении данного потока разрешенной!!!**

Функция тока $\psi(x,y)$

Как известно, всякое тело может одновременно участвовать в двух и более движениях, при этом действительная скорость и ускорение этого тела определяются как соответствующая сумма векторов скорости или ускорения каждого движения. Это относится к каждой частице жидкости данного потока. В этом случае суммарное движение является сложным, а процесс определения движения по его составляющим называют сложением движений или "наложением" движений.

При сложении потенциальных движений новое – сложное движение, также будет потенциальным, причем потенциал скорости сложного движения будет равен алгебраической сумме потенциалов скорости слагаемых.

Другими словами, имеет место:

$$w_x = w_{x_1} + \dots + w_{x_n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial (\varphi_1 + \dots + \varphi_n)}{\partial x}$$

но

, следовательно

и

$$\varphi_1 + \dots + \varphi_n = \varphi(x, y)$$

$$w_x = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \quad w_y = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$$

Вывод: Метод сложения потенциальных потоков ~~позволяет~~ по найденному значению функции потенциала скорости $\varphi(x,y)$ для нескольких простейших движений находить потенциал скорости для целого ряда новых – сложных движений путем простого их суммирования.

Замечание: Важно, что вообще таких новых – сложных движений может быть бесконечное множество.

Функция тока $\psi(x,y)$

Пример 4. Плоскопараллельный поток (поступательное движение жидкости с постоянной скоростью вдоль оси OX).

$$\text{Имеем: } w_x = w_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const} \quad w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad d\varphi = w_x dx + w_y dy = w_0 dx$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi = \int d\varphi = \int w_x dx = \int w_0 dx = w_0 x + C$$

для $C=0$ получаем: $\varphi(x, y) = w_0 x$

В общем случае это семейство прямых параллельных оси OY . Проверим, является ли найденная функция - потенциалом скорости.

Находим значение второй производной φ по x .

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_0 x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

т.к. $w_0 = \text{const}$. Для производной по y получаем: $\frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_0 x) = 0$

Итак, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_0 x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_0 x) = 0$ т.е. функция удовлетворяет уравнению Лапласа и действительно является потенциалом скорости.

Найдем функцию тока $\varphi(x,y)$.

$$\psi = -w_y dx + w_x dy = w_0 dy \quad \psi = \int d\psi = \int w_x dy = \int w_0 dy = w_0 y + C$$

- эта функция также удовлетворяет уравнению Лапласа и является семейством прямых параллельных оси OX . Таким образом, найдены обе функции.

Источники и стоки

Источником называется точка, из которой радиально равномерно во все стороны вытекает жидкость, а сток — такая точка, в которую также радиально равномерно втекает жидкость. В рамках плоской задачи источник-точка превращается в источник-прямую перпендикулярную плоскости движения.

Замечание: Очевидно, что физически такие точки не существуют, но они характеризуют поле скоростей, которое создается ими. Такое поле в ограниченной области может существовать реально.

Пример 5. *Определить функции ϕ и ψ для источника.*

Имея общую запись $d\phi = w_x dx + w_y dy$, определим компоненты скорости w_x и w_y .

Полагая распределение скорости по окружности равномерным, для единицы длины можно записать $Q = 2\pi r w_0$,


где Q - расход источника на единицу длины; w_0 - радиальная, т.е. полная, скорость на расстоянии r от источника.

Тогда,

но

$$w_x = w_0 \cos\alpha = \frac{Q}{2\pi r} \cos\alpha \qquad w_y = w_0 \sin\alpha = \frac{Q}{2\pi r} \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$


Источники и стоки

Итак,

$$w_x = w_0 \cos\alpha = \frac{Q}{2\pi r} \frac{x}{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} x \quad w_y = w_0 \sin\alpha = \frac{Q}{2\pi r} \frac{y}{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} y$$

следовательно:

$$d\varphi = w_x dx + w_y dy = \frac{Q}{2\pi r^2} x dx + \frac{Q}{2\pi r^2} y dy$$

или

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r^2} (x dx + y dy) = 0$$

Очевидно, что $drd = xdx + ydy = 0$, т.к. $x^2 + y^2 = r^2$.

В результате:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r^2} (x dx + y dy) = \frac{Q}{2\pi r^2} r dr$$

и после сокращения:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

Интегрируя, для потенциала скорости получаем:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C$$

Полагая, что $C=0$, окончательно находим:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$$



Источники и стоки

Для функции тока $d\psi = -w_y dx + w_x dy$ и $d\psi = -\frac{Q}{2\pi r} \frac{y}{r} dx + \frac{Q}{2\pi r} \frac{x}{r} dy = 0$

После сокращения находим: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ или $\ln y = \ln x + C$ $\ln \frac{y}{x} = C$

или окончательно: $y=Cx$

Последнее уравнение представляет собой семейство прямых, проходящих через начало координат (пучок).

Таким образом, линии тока, а следовательно, и линии функции тока $\psi(x,y)=C$ есть радиальные прямые.

Очевидно, что функция $\psi(x,y)=C$ может измениться только в зависимости от угла α и находится в линейной от него зависимости, т.к. $y/x = \operatorname{tg}\alpha = C'$ и $y = \operatorname{tg}\alpha * x$.

Следовательно, можно написать:

Ввиду того, что $\psi_2 - \psi_1 = Q$, можно записать: $\psi = C' \alpha$ $\psi_2 - \psi_1 = C'(\alpha_2 - \alpha_1) = C' * 0 = 0$; $\psi_2 = \psi_{\alpha=2\pi} = C' * 2\pi$; $\psi_2 - \psi_1 = C'(2\pi - 0) = C' * 2\pi = 0$ и $C' = Q/2\pi$.

Таким образом, окончательно для функции тока ψ получим выражение зависимости от x и y :

$$\psi(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Источники и стоки

Пример 6. *Плоское вращательное движение жидкости.*

Рассмотрим движение жидкости, при котором ее частицы движутся по concentрическим окружностям. Очевидно, что они представляют собой линии тока, а радиальные прямые – линии равного потенциала скорости $\varphi=C$.

Пользуясь обратимостью функций φ и ψ для потенциала скорости, имеем:

$$\varphi = C \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Определим скорость движения частиц по окружности: $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$

Находим:

$$w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = -C \frac{y}{x^2} \left(1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right)^{-1} = -C \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = -C \frac{1}{x} \left(1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right)^{-1} = -C \frac{x}{x^2 + y^2}$$

В результате: $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = C \sqrt{\left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2}$

откуда $w = \frac{C}{x^2 + y^2}$

Но $x^2 + y^2 = r^2$, где r - радиус окружности, а потому окончательно получаем:

$w = Cr$ или $wr = C = \text{const}$, а это известный закон площадей.

В предельных условиях: $r \rightarrow 0; w \rightarrow \infty; r \rightarrow \infty; w \rightarrow 0$

Источники и стоки

Пример 7. *Сложение вращательного движения и движения при наличии стока*

Потенциал результирующего движения $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Для стока в произвольной точке $M(x, y)$ имеем:

$$\varphi_1 = C \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Для вращательного движения:

$$\varphi_2 = C \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Таким образом, потенциал сложного движения

$$\varphi(x, y) = C_1 \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Дальнейшее решение по схеме предыдущего примера приводит к спиральям Архимеда.

Пример 8. *Сложение поступательного движения с вращательным.*

Для поступательного движения:

$$\varphi_1 = w_0 x + C$$

Для вращательного движения:

$$\varphi_2 = C \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Таким образом

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = w_0 x + C_1 + C_2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Этот пример объясняет наличие замкнутой циркуляции и подъемной силы – эффект Магнуса.



Семинар 8. Простейшие динамические модели теплообмена с одной пространственной переменной

Простейшие математические модели динамики теплообмена с одной пространственной переменной рассмотрим на примере построения динамической модели теплообменников.

При исследовании динамики теплообменника для инженерных расчетов основной интерес представляет – поведение температур потоков на выходе из аппарата, в зависимости от изменения во времени независимых переменных процесса (расходов теплоносителей и их начальных температур).

Это обуславливает рассмотрение совокупности процессов на уровне определяющего влияния гидродинамической обстановки в аппарате, в рамках феноменологического подхода с использованием экспериментально-аналитических методов математического описания.

Для получения искомых зависимостей необходимо располагать уравнениями поля температур в обеих движущихся средах.

Поскольку задача одномерна вместо термина "поле температур" здесь уместнее использовать термин "профиль температур" в аппарате.



Основные допущения

Обычно подобные модели строятся в рамках следующих основных допущений:

1. Продольное перемешивание в каждом из потоков отсутствует, т.е. среды движутся в режиме идеального вытеснения, в частности, считают, что скорости потоков достаточно велики по сравнению со скоростями диффузионного переноса.
2. Поперечное перемешивание в этих потоках считается идеальным, что приводит к одномерной модели, в которой учитывается изменение температуры только по длине аппарата.
3. Скорость теплопередачи в сечениях по длине аппарата определяется феноменологическими разностными алгебраическими уравнениями: $q_i = K_i(T_1 - T_2)$, где q_i - плотность теплового потока от i -ой среды, K_i - коэффициент теплопередачи от i -ой среды, $T_1 - T_2$ - разность температур теплоносителей. Фактически мы используем линейную модель этого "элементарного" процесса и исключив из рассмотрения элементы неравновесной динамики.
4. Продольную (осевую) теплопроводность, теплообмен с окружающей средой и теплоемкость стенок считаем малыми величинами, последнюю, по сравнению с теплоемкостью теплоносителей, что позволяет пренебречь накоплением теплоты в стенках аппарата и записать $q = K(T_1 - T_2)$. Это вполне корректно для объектов с непрерывным режимом работы.
5. Будем считать, что при изменении температур движущихся сред, тепловой поток через стенку устанавливается мгновенно, т.е. мы исключаем из рассмотрения кинетическую стадию эволюции системы и рассматриваем только ее гидродинамическую стадию, фактически принимая квазистационарную модель этого "элементарного" процесса.

Основные обозначения

Для однозначности, рассмотрим случай прямоточного теплообменника. Пусть направление координатной оси Ox совпадает с направлением движения жидкости.

Введем следующие обозначения для:

основных параметров процесса: t - время; x - продольная координата; $T_1^{ВХ}$, $T_2^{ВХ}$ - температуры теплоносителей на входе в теплообменник; $T_1^{ВЫХ}$, $T_2^{ВЫХ}$ - температуры теплоносителей на выходе из теплообменника; $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$ - мгновенные профили температур.

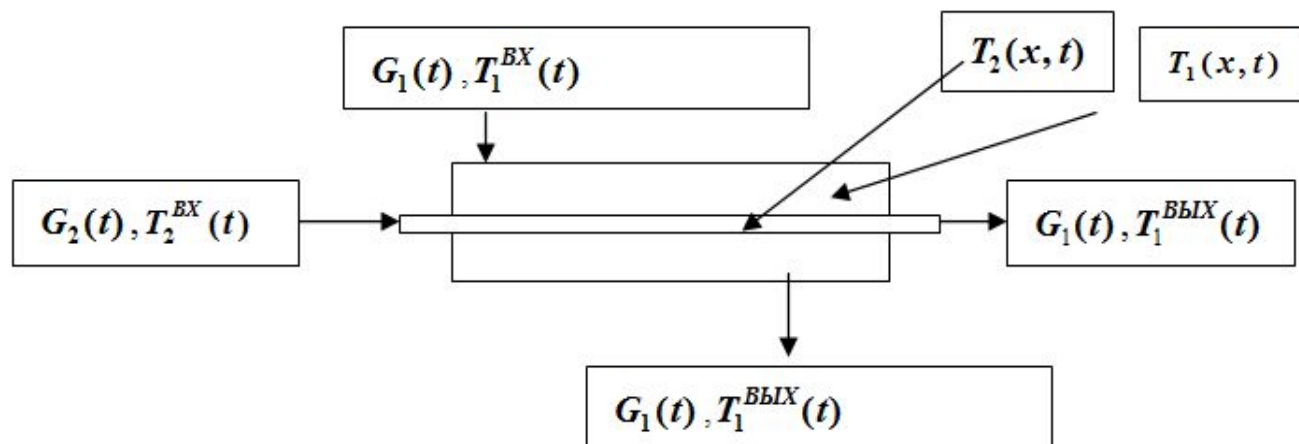
технологических параметров: теплоносители – жидкости с известными параметрами, в частности с плотностями ρ_1 , ρ_2 ; $G_1(t)$, $G_2(t)$ - массовые расходы теплоносителей; c_1 , c_2 - удельные теплоемкости теплоносителей; $K_i = K$ - коэффициент теплопередачи между теплоносителями, разделенными стенкой.

конструктивных параметров: l - длина трубы теплообменника; S_1 , S_2 - площадь поперечного сечения канала, через который протекает теплоноситель; Π_1 , Π_2 - периметр канала, через который протекает теплоноситель, (обычно вычисляется по среднему диаметру или D_y);

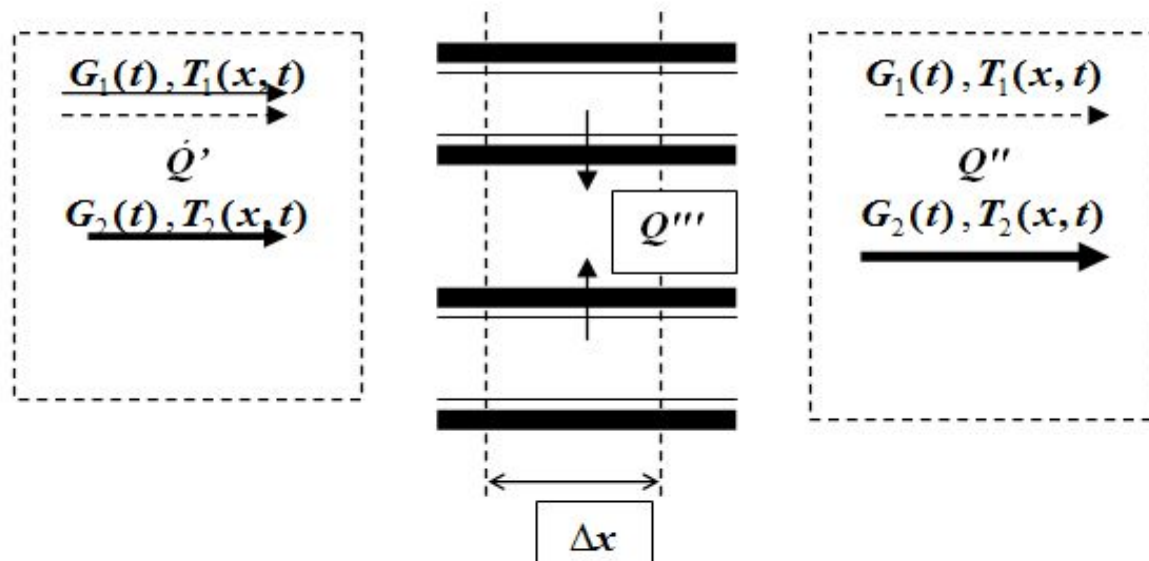
потоков: индекс **1** относится к более нагретому, а индекс **2** – к менее нагретому теплоносителю.



Схема теплообменника



Выделим его элемент



Математическая модель теплообменного аппарата

Температуры теплоносителей на входе и на выходе теплообменника связаны с профилем температур очевидными соотношениями:

$$T_1^{BX}(t) = T_1(x, t) |_{x=0} \quad T_2^{BX}(t) = T_2(x, t) |_{x=0}$$

$$T_1^{BYX}(t) = T_1(x, t) |_{x=l} \quad T_2^{BYX}(t) = T_2(x, t) |_{x=l}$$

Получим уравнение теплового баланса.

Количество теплоты, которое **поступает** за промежуток времени Δt в выделенный элемент вместе с первым теплоносителем: $Q' = G_1 c_1 T_1(x, t) \Delta t$.

Количество теплоты, которое **покидает** за промежуток времени Δt выделенный элемент Δx вместе с первым теплоносителем: $Q'' = -G_1 c_1 T_1(x + \Delta x, t) \Delta t$,
знак "минус" означает, что теплота из выделенного элемента **отводится**.

Поскольку теплоносители – жидкости, то среды в теплообменнике можно считать несжимаемыми. Соответственно расходы $G_1(t)$, $G_2(t)$ - не зависят от координаты x .

Количество теплоты, которое **переходит** за промежуток времени Δt в выделенном элементе от первой жидкости ко второй за счет теплопередачи:

Поскольку толщина стенок каналов теплообменников обычно мала по сравнению с диаметром канала, можно считать, что $K [T_1(x, t) - T_2(x, t)] \Delta F \Delta t$ для элемента площади боковой поверхности ΔF можно записать $\Delta F = \Pi \Delta x$.

Это позволяет записать:

$$Q''' = -K [T_1(x, t) - T_2(x, t)] \Pi \Delta x \Delta t$$

Математическая модель теплообменного аппарата

Общее изменение энтальпии (теплосодержания) теплоносителя, находящегося в выделенном объеме $S_1 \Delta x$ за время Δt равно $S_1 \Delta x \rho_1 c_1 T_1(x, t + \Delta t) - S_1 \Delta x \rho_1 c_1 T_1(x, t)$.

Кроме того, общее изменение энтальпии равно сумме всех расходов теплоты

$$(Q' + Q'' + Q''') : S_1 \Delta x \rho_1 c_1 T_1(x, t + \Delta t) - S_1 \Delta x \rho_1 c_1 T_1(x, t) =$$

$$= G_1 c_1 T_1(x, t) \Delta t - G_1 c_1 T_1(x + \Delta x, t) \Delta t - K [T_1(x, t) - T_2(x, t)] \Pi \Delta x \Delta t$$

После деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_1 \Delta x \rho_1 c_1 T_1(x, t) = G_1 c_1 T_1(x, t) - G_1 c_1 T_1(x + \Delta x, t) - K [T_1(x, t) - T_2(x, t)] \Pi \Delta x$$

Левая часть последнего уравнения представляет собой **скорость изменения энтальпии**, правая – **сумму тепловых потоков**, т.е. количество теплоты поступившей в элемент за единицу времени.

Следовательно, **скорость изменения энтальпии равна сумме тепловых потоков.**

Нетрудно убедиться, что в нестационарном случае **скорость изменения** теплоты, массы, концентрации, плотности, вероятности, плотности вероятности и т.п. равна **сумме потоков** соответствующих величин.

Вывод: Это свойство является основой для составления практически всех балансовых уравнений.

Математическая модель теплообменного аппарата

Далее, после деления на Δx и перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем уравнение для профиля температур первого теплоносителя:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_1 \rho_1 c_1 T_1(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} G_1 c_1 T_1(x, t) - КП [T_1(x, t) - T_2(x, t)]$$

Наиболее часто на практике встречается случай теплообмена, когда ни плотность, ни теплоемкость не зависят от температуры, а, следовательно, от времени и координаты. Это означает, что ρ_1 , c_1 , G_1 являются постоянными. В подавляющем большинстве случаев S_1 также считают постоянной величиной.

Для краткости, опуская аргументы, имеем:

$$S_1 \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = -G_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - КП (T_1 - T_2)$$

и после деления на $S_1 \rho_1 c_1$, обозначив, через $w_1 = G_1 / (S_1 \rho_1)$ - среднюю скорость жидкости, а также вводя для упрощения $R_1 = КП / (S_1 \rho_1 c_1)$ получаем:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - R_1 (T_1 - T_2)$$

Замечание: В общем случае при переменной скорости имеем:

$$-\frac{\partial w_1(x, t) T_1}{\partial x}$$

Проводя аналогичные выкладки для второго теплоносителя, получаем систему:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - R_1 (T_1 - T_2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = -w_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - R_2 (T_1 - T_2)$$

Математическая модель теплообменного аппарата

В общем случае, граничными условиями для подобных систем могут служить равенства:

$$T_i(x, t) |_{x=0} = T_i^{BX}(t)$$

где индекс i относится к i -тому теплоносителю $i=1,2,3\dots$

Начальные условия не являются столь однозначными, поскольку в значительной степени зависят от условий конкретной задачи.

Ограничениями для подобных систем, наряду с величинами R_i , могут служить:

- ✓ **выбор области изменения переменной t , он** $R_i = K_i \Pi_i / (S c_i \rho_i)$ обычно произволен и зависит от условий конкретной задачи, наиболее распространенная область - полубесконечная ось.
- ✓ **выбор области изменения x , обычно** $t \in [0, \infty)$, что зачастую позволяет ввести в системе безразмерную пространственную переменную $x \in [0, 1]$, определенную на отрезке $[0, 1]$.



Математическая модель теплообменного аппарата

Например, выбирая l в качестве масштаба длины, введем новую переменную $x' = x/l$.

При её введении необходимо также переопределить и профили температур: $T_i(x, t) : T_i'(x', t) = T_i(x/l, t)$.

В результате в развернутом виде находим:

$$\frac{\partial T_1(x'l, t)}{\partial t} = -w_1 \frac{\partial T_1(x'l, t)}{\partial x'l} - R_1(T_1(x'l, t) - T_2(x'l, t))$$

и после сокращения, для безразмерной координаты, окончательно получаем:

$$\frac{\partial T_1'(x', t)}{\partial t} = -\frac{w_1}{l} \frac{\partial T_1'(x', t)}{\partial x'} - R_1(T_1'(x', t) - T_2'(x', t))$$

Для второго уравнения проводят аналогичные преобразования.

После того как решение системы уравнений с безразмерной пространственной переменной найдено, переход к решению системы уравнений с размерной переменной можно осуществить, используя следующие соотношения:

Вывод: Полученная система уравнений $T_i(x, t) = T_i(x/l, t)$ вместе с граничными условиями представляет собой упрощенную динамическую модель проточного теплообменника.

Математическая модель теплообменного аппарата

Вывод, уравнений, описывающих динамику противоточного теплообменника, аналогичен. Отличие состоит лишь в том, что при любом выборе направления оси Ox , последняя будет направлена навстречу потоку одного из теплоносителей. Это приведет к тому, что в уравнении, выведенном для данного теплоносителя, изменится знак при производной по пространственной координате.

Например, если направление оси Ox совпадает с направлением движения первого теплоносителя, уравнения динамической модели противоточного теплообменника имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - R_1(T_1 - T_2) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = -w_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - R_2(T_1 - T_2)$$

а их граничные условия:

В этом случае температуры носителей на выходе из теплообменника связаны с профилем температур следующими соотношениями:

Полученные уравнения динамики теплообмена в противоточном и прямоточном теплообменниках-рекуператорах не учитывают накопления теплоты в стенках аппарата. В реальных условиях такое накопление мало влияет на динамику теплообмена, если теплоемкость стенок мала и если достаточно велика интенсивность теплообмена (т.е. велик коэффициент теплопередачи K).

Математическая модель теплообменного аппарата

Первое условие обычно выполняется, если теплоемкости материалов каналов малы, либо если мала толщина их стенок. Однако условие высокой интенсивности теплообмена выполняется далеко не всегда. Например, если хотя бы одним из теплоносителей является газ, значение коэффициента теплопередачи оказывается небольшим и накопление теплоты в стенках аппарата значительно влияет на динамику процесса теплопередачи.

Построим математическую модель динамики теплообмена для случая, когда накоплением теплоты в стенках аппарата пренебречь нельзя. Для определенности выберем прямоточный теплообменник-регенератор. Как и прежде, будем считать, что продольное перемешивание в потоках теплоносителей отсутствует, поперечное перемешивание является полным, а также выполняются все ранее сделанные исходные допущения. Кроме того, предположим, что термическое сопротивление стенок каналов теплообменника мало. При выполнении этого условия температура стенки $T_c(x, t)$, разделяющей теплоносители, может считаться постоянной по толщине стенки.

Тогда, для описания скорости теплообмена вместо уравнений теплопередачи, можно использовать уравнения теплоотдачи:

где q_1 - плотность теплового потока от первого теплоносителя к стенке; q_2 - плотность теплового потока от стенки ко второму теплоносителю, α_1, α_2 - коэффициенты теплоотдачи, соответственно, первого (более нагретого) и второго (менее нагретого) теплоносителя.

$$q_1 = \alpha_1 (T_1 - T_c) \quad q_2 = \alpha_2 (T_c - T_2)$$

Математическая модель теплообменного аппарата

Очевидно, что в стационарном режиме тепловые потоки совпадают: $q_1 = q_2$, однако в нестационарном режиме это равенство может нарушаться из-за накопления теплоты в стенках аппарата.

По аналогии имеем:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - R'_1(T_1 - T_C) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = -w_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - R'_2(T_C - T_2)$$

где $R'_i = \alpha_i \Pi_i / (S_i c_i \rho_i)$

Эта система незамкнута, её необходимо дополнить уравнением для T_C . Выделим в теплообменнике элемент стенки канала Δx и запишем уравнение теплового баланса для части стенки, находящейся в этом элементе.

Скорость изменения энтальпии элемента стенки Δx равна сумме потоков теплоты, переходящей от первой жидкости к стенке и от стенки ко второй жидкости, т.е. $\alpha_1 \Delta x \Pi_C (T_1 - T_C)$ и $-\alpha_2 \Delta x \Pi_C (T_C - T_2)$ соответственно. Это позволяет записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} (S_C \rho_C \Delta x C_C T_C) = \alpha_1 \Delta x \Pi_C (T_1 - T_C) - \alpha_2 \Delta x \Pi_C (T_C - T_2)$$

сократив на

получаем:

$$S_C \rho_C \Delta x C_C$$

и обозначив

$$R_1^C = \alpha_1 \Pi_C / (S_C c_C \rho_C) \quad R_2^C = \alpha_2 \Pi_C / (S_C c_C \rho_C)$$

$$\frac{\partial T_C}{\partial t} = R_1^C (T_1 - T_C) - R_2^C (T_C - T_2)$$

Математическая модель теплообменного аппарата

Теперь замкнутая система трех уравнений описывает нестационарный теплообмен с учетом тепловой емкости стенки, разделяющей теплоносители.

Граничные условия для этой системы остаются прежними:

а температуры теплоносителей на входе и выходе аппарата из условий:

Аналогично, для противоположного аппарата. Например, если направление оси Ox совпадает с направлением движения первого теплоносителя, уравнения динамической модели имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - R'_1(T_1 - T_c) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = w_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + R'_2(T_c - T_2) \quad \frac{\partial T_c}{\partial t} = R_1^c(T_1 - T_c) - R_2^c(T_c - T_2)$$

с соответствующими граничными условиями:

$$T_1(x, t) \Big|_{x=0} = T_1^{BX}(t)$$

$$T_2(x, t) \Big|_{x=l} = T_2^{BX}(t)$$



Математическая модель теплообменного аппарата

Рассмотрим теперь один из частных случаев построенных моделей – **модель динамики теплообмена в конденсаторах**.

Сохранив ранее сделанные допущения, для простоты будем считать, что **конденсируется насыщенный пар**. При конденсации насыщенного пара его температура однозначно определяется давлением, и если давление пара в процессе меняется незначительно, можно считать, что температура пара в любых точках аппарата – постоянна и одинакова $T_1(x,t) = T_{II} = \text{const}$, может зависеть от времени, но не зависит от пространственной координаты.

Следовательно, из построенных математических моделей можно исключить уравнения для более нагретого теплоносителя, т.к. его температура является известной величиной.

В результате для прямоточного аппарата без учета теплоемкости стенок для более холодного теплоносителя имеем:

а с учетом теплоемкости:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = -w_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + R_2(T_{II} - T_2)$$

Граничным условием к этим моделям будет:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = -w_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + R'_2(T_C - T_2) \quad \frac{\partial T_C}{\partial t} = R_1^C(T_{II} - T_C) - R_2^C(T_C - T_2)$$
$$T_2(x,t)|_{x=0} = T_2^{BX}(t)$$



Семинар 9. Распространение тепла на бесконечной прямой

Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными данными: найти ограниченную функцию $u(x, t)$, определенную в области от $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности:

$$u_t = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1)$$

и начальному условию: $u(x, 0) = \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$

Если $\varphi(x)$ – непрерывная функция, то выполнение начального условия будем понимать в том смысле, что $u(x, t)$ непрерывно при $t = 0$, т.е.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0) \quad (2)$$

Известно, что решение уравнения теплопроводности однозначно определяется своими начальными условиями, если оно ограничено.

Формальная схема решения поставленной задачи, основана на разделении переменных.

Будем искать ограниченное нетривиальное решение уравнения теплопроводности, представимое в виде произведения:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3)$$

Функция источника для неограниченной области

Подставляя выражение (3) в (1), получаем: $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2$

где λ^2 - параметр разделения. Отсюда следует:

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad (4)$$

$$X'' + \lambda^2 x = 0 \quad (5)$$

Решая уравнения (4) и (5), найдем частные решения уравнения (1) вида:

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i \lambda x} \quad (6)$$

удовлетворяющее условию ограниченности. Здесь λ любое вещественное число $-\infty < \lambda < \infty$; поэтому в (6) возьмем знак «плюс» и образуем функцию:

$$u_\lambda(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i \lambda x} d\lambda \quad (7)$$

Если производные, входящие в уравнение (1) можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла (7), то функция (7) будет удовлетворять уравнению (1) как суперпозиция частных решений этого уравнения.



Функция источника для неограниченной области

Требую выполнения начального условия при $t=0$, будем иметь:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (8)$$

Воспользуемся теперь формулой обратного преобразования интеграла Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \right) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right) \varphi(\xi) d\xi \quad (10)$$

Внутренний интеграл в (10) равен:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), приходим к интегральному представлению искомого решения:

(12)

где

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t) \varphi(\xi) d(\xi) \quad (13)$$

Вывод: Функции $\frac{1}{2\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t) \varphi(\xi) d(\xi)$ называют интегралом Пуассона и фундаментальным решением уравнения теплопроводности

Функция источника для неограниченной области

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \quad (14)$$

представляет температуру в точке x в момент времени t , если в начальный момент времени $t=t_0$ в точке ξ выделяется количество тепла $Q=c\rho$.

Функция $G(x, \xi, t-t_0)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным (x, t) , что можно проверить непосредственным дифференцированием.

Количество тепла, находившегося на оси x в момент $t > t_0$ равно:

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = Q = c\rho$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$, где

$$\alpha = \frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}$$

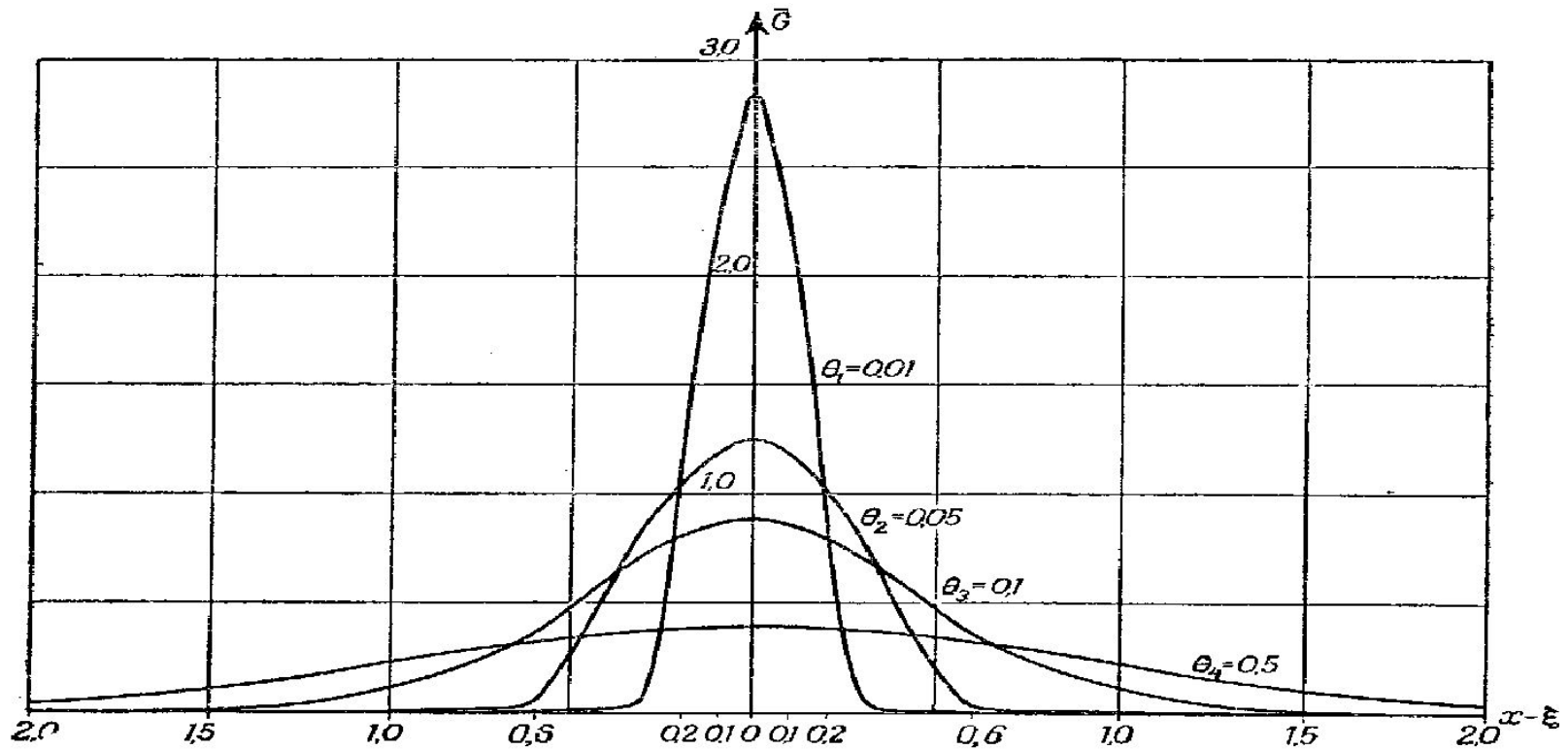
Вывод: Количество тепла на прямой не меняется с течением времени.

Функция $G(x, \xi, t-t_0)$ зависит от времени только через аргумент $\theta = a^2(t-t_0)$, так что эту функцию можно записать в виде:

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}$$

Функция источника для неограниченной области

На рисунке изображен график функции G в зависимости от x для различных значений θ .



Почти вся площадь, ограниченная этой кривой, находится над промежутком $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, где ε – сколь угодно малое число, если только $\theta = a^2(t - t_0)$ – достаточно малое число. Величина этой площади, умноженная на $c\rho$, равна количеству тепла, подведенному в начальный момент.

Вывод: для малых значений $t - t_0 > 0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки ξ . Отсюда следует, что в момент t_0 все количество тепла помещается в точке ξ .

Функция источника для неограниченной области

Рассматривая изменение температуры в фиксированной точке $x=\xi+h$ с течением времени при $h=0$, т.е. при $x=\xi$ получим:

$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

Таким образом, температура в той точке, где выделялось тепло, для малых θ неограниченно велика.

Если $x \neq \xi$, т.е. $h \neq 0$, то функция G представляется в виде произведения двух множителей:

$$G_{x \neq \xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right] e^{-\frac{h^2}{4\theta}}$$

Второй сомножитель меньше единицы: при больших θ он ≈ 1 , при малых θ он ≈ 0 .

Замечание: Отсюда следует, что $G_{x \neq \xi} = G_{x=\xi}$ для больших θ ; $G_{x \neq \xi} \ll G_{x=\xi}$ для малых θ . Чем меньше h , т.е. чем ближе x к ξ , тем больше второй множитель.



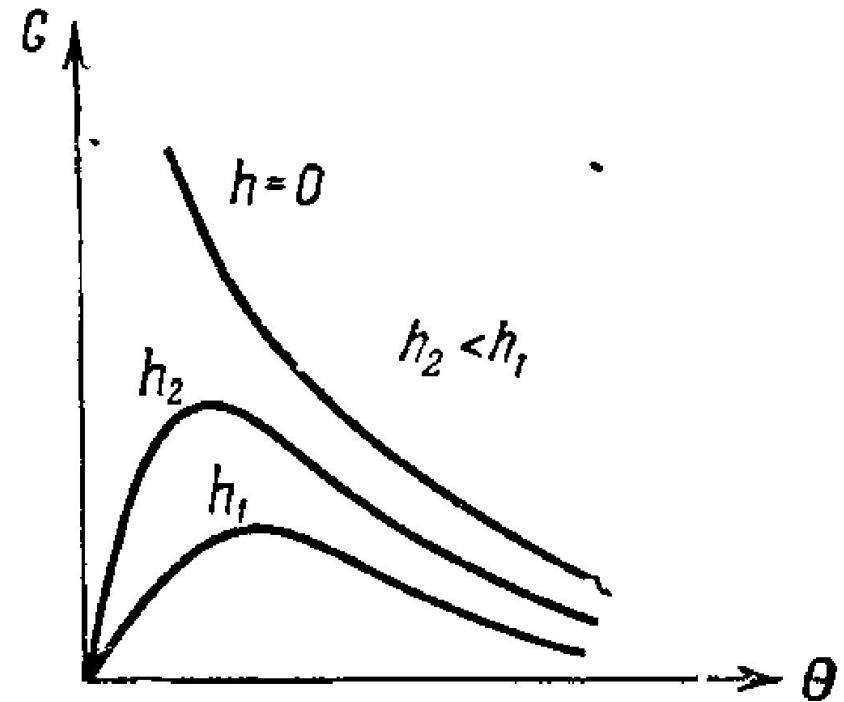
Функция источника для неограниченной области

На графиках функции $G_{x \neq \xi}$ и $G_{x = \xi}$ при $h_2 < h_1$ не трудно видеть, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} G_{x \neq \xi} = 0$$

Раскрывая неопределенность находим:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{Q}} e^{-\frac{h^2}{4\theta}} &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \theta^{-\frac{3}{2}}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{\frac{h^2}{4\theta}}} \end{aligned}$$



Функция источника для неограниченной области

Функция (14) показывает, что во всякой точке x температура, создаваемая мгновенным точечным источником, действующим в начальный момент $t=0$, отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени.

Подобный факт можно было бы интерпретировать как результат бесконечно быстрого распространения температуры (бесконечная скорость).

Однако это противоречит молекулярно-кинетическим представлениям о природе тепла. Такое противоречие получается в связи с тем, что при выводе уравнения теплопроводности использовались феноменологические представления о растекании тепла, не учитывающие инерционность процесса движения молекул.



Семинар 10. Температурные волны в почве

Задача о распространении температурных волн в почве является одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности к изучению явлений в биосфере.

Известно, что температура на поверхности земли носит ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Обратимся к задаче о распространении периодических температурных колебаний в почве, которую будем рассматривать как однородное полупространство $0 \leq x \leq \infty$

Эта задача является характерной задачей без начальных условий, т.к. при многократном повторении температурного хода на поверхности, влияние начальной температуры будет меньше влияния других факторов, которыми мы пренебрегаем (например, неоднородности почвы).

Таким образом, приходим к следующей задаче:

Найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

при $0 \leq x \leq \infty, -\infty < t$, удовлетворяющее условию $T(0, t) = A \cos \omega t$

Решение этой задачи известно и имеет вид:

$$T(x, t) = A \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x - \omega t\right)$$



Температурные волны в почве

На основании данного решения можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом, причем:

1. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной: $A(x) = A \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right)$

т.е. если глубина растет в арифметической прогрессии, то амплитуда убывает в геометрической прогрессии (первый закон Фурье).

2. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x \quad (\text{второй закон Фурье}).$$

3. Глубина проникновения теплоты в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное изменение температурной амплитуды равно:

$$\frac{A(x)}{A} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right)$$

Эта формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1' и T_2' глубины x_1 и x_2 , на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением:

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2'}{T_1'}}x_1 \quad (\text{третий закон Фурье}).$$

Температурные волны в почве

Например, сравнение суточных и годовых колебаний, для которых $T_2' = 365T_1'$ показывает, что $x_2 = \sqrt{365}x_1 \approx 19,1x_1$, т.е. глубина проникновения годовых колебаний при одинаковой амплитуде на поверхности земли была бы в 19,1 раза больше глубины проникновения суточных колебаний.

В качестве примера рассмотрим результаты реальных наблюдений над годовыми температурными колебаниями в Приамурье.

Глубина, м	0	1	2	3	4
Амплитуда, К	19,5	11,5	6,8	4,2	2,6

Эти данные показывают, что амплитуда годовых колебаний на глубине 4 м уменьшается до 13,3% своего значения на поверхности. На основании этих данных можно определить коэффициент температуропроводности почвы:

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \quad a^2 = \omega x^2 / 2 \ln^2 \left(\frac{A(x)}{A} \right)$$

откуда находим коэффициент температуропроводности почвы $\text{см}^2/\text{с}$. При этом время запаздывания на глубине 4м достигает 4 месяцев.

Замечание: Следует иметь в виду, что изложенная теория относится к распространению теплоты в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, не учитываемое этой теорией.

Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры

Для суждения о внутреннем температурном состоянии Земли мы имеем данные, полученные из наблюдений на ее поверхности. Основные сведения о термическом поле земной коры заключаются в следующем. Суточные и годовые колебания температуры происходят в сравнительно тонком поверхностном слое, для годовых колебаний порядка 10-20 м. Ниже этого слоя температура с течением времени меняется очень медленно.

Наблюдения в шахтах и скважинах, относящихся к верхним слоям 2-3 км земной коры, показывают, что температура с глубиной повышается в среднем на 3°C на каждые 100м.

Первые попытки теоретического объяснения наблюдаемого геотермического градиента встретили непреодолимые трудности. Эти попытки исходили из представления об охлаждении Земли, раскаленной в прошлом.

Начальная температура, характеризующая этот процесс остывания, должна иметь порядок $T_0 = 1200^\circ\text{C}$, что соответствует температуре плавления горных пород, а поверхностная температура имеет порядок 0°C и не могла значительно (более 100°C) отклоняться от этой величины за весь период существования жизни на земле.



Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры

Простейшая количественная теория остывания Земли приводит к решению уравнения теплопроводности: $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ в полупространстве $0 < z < \infty$ при начальных и граничных условиях: $T(z, 0) = T_0$, $T(0, t) = 0$

Решение этой задачи известно и определяется формулой:

$$T(z, t) = T_0 \frac{z}{\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} \exp(-\alpha^2) d\alpha$$

Градиент этой функции при $z=0$ равен:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2 t}\right) \Big|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi a^2 t}}$$

Подстановка в это выражение известных значений геотермического градиента:

$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 3 \cdot 10^{-4}$ град/см, $= 1200^\circ\text{C}$, а также значение $a^2 = 0,006$ см²/с, соответствующее среднему экспериментальному коэффициенту теплопроводности гранитов и базальтов, получаем оценку для продолжительности процесса остывания на уровне $t = 0,85 \cdot 10^{15}$ с $= 27\,000\,000$ лет.

Такое представление о возрасте земли никак не согласуется с геологическими данными. Приблизительный характер представленных оценок, включая пренебрежение кривизной поверхности Земли, непостоянство коэффициента теплопроводности, приблизительность значения T_0 и т.п. не может изменить порядка найденного значения возраста Земли, который оценивается приблизительно на уровне $2-4 \cdot 10^9$ лет.

Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры

Физическая схема температурного режима Земли подверглась существенному пересмотру после открытия явления радиоактивного распада.

Радиоактивные элементы, рассеянные в земной коре, при распаде вызывают ее нагревание, так что уравнение теплопроводности должно принимать вид:

где $f = A/c\rho$, A – объемная плотность тепловых источников.

На основании многочисленных измерений горных пород и их тепловыделения было принято значение $A = 1,3 \cdot 10^{-12}$ кал/(см³с). Это значение учитывает тепло, выделяемое ураном, торием, и калием вместе с продуктами их распада.

Если предположить, что плотность радиоактивных источников внутри земного шара равна значению A , определенному для верхних слоев земной коры. В этом случае количество теплоты, выделяющееся во всем земном шаре в единицу времени, будет равно: $Q = 4/3\pi R^3 A$

Сделав второе допущение о том, что Земля радиоактивным теплом не нагревается, получаем поток тепла через единицу поверхности:

где k и $\frac{\partial T}{\partial z}$ – коэффициент теплопроводности и геотермический градиент у поверхности Земли.

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$q = k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} \geq \frac{Q}{4\pi R^2}$$

