

# **Степень с рациональным показателем и ее свойства.**



~~«Люди, незнакомые с алгеброй, не  
могут представить себе тех  
удивительных вещей, которых  
можно достигнуть... при  
помощи названной науки».~~

*Г.В.Лейбниц*


# *История возникновения степени числа*

---






В знаменитой книге  
«Арифметике»  
Диофант  
Александрийский  
описывал первые  
натуральные  
степени

Одним из первых, кто в конце XVI-начале XVII века принял шаги к построению современной теории степеней, был Нидерландский математик Симон Стевин.

Он обозначал неизвестную величину кружком 



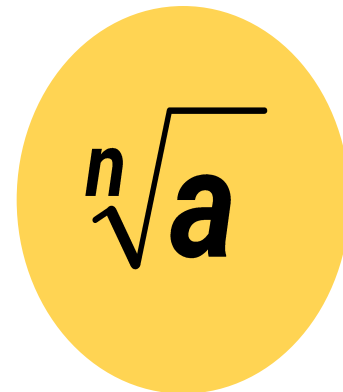
, а внутри его указывал показатель степени.

Например:  ,  ,  ,

В его записи обозначали  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ .



У Рене Декарта в его «Геометрии» (1637) мы находим современное обозначение степеней  $a^2, a^3, \dots$



## Повторение

### Степень с целым показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}$$

**n раз**

$$1) 3^3 = 27$$

$$2) 5^3 = 125$$

$$3) 2^4 = 16$$

$$4) 3^1 = 3$$

Степенью числа  $a$  с натуральным показателем  $n$ , большим 1, называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2) a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$3) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$4) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$5) \left( \frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

---

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^0 = 1$$
$$a \neq 0$$



$$\text{a) } 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000};$$

$$1) 3^0 = 1$$

$$\text{б) } 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81};$$

$$2) 5^0 = 1$$

$$\text{в) } a^{-1} = \frac{1}{a^1};$$

$$3) 22222222^0 = 1$$

$$\text{г) } x^{-20} = \frac{1}{x^{20}};$$

$$4) 100000^0 = 1$$

$$\text{д) } (aв)^{-3} = \frac{1}{(aв)^3};$$

$$\text{е) } (a + в)^{-4} = \frac{1}{(a + в)^4}.$$

# Арифметический корень натуральной степени

## Определение

Корнем  $n$ -ой степени из числа  $a$  называется такое число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ .

$$\sqrt[n]{a} = x,$$

$$\text{то есть } x^n = a$$

**АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ  
n-й СТЕПЕНИ ИЗ ЧИСЛА a**

$$\sqrt[n]{a}$$

**a - ПОДКОРЕННОЕ  
ВЫРАЖЕНИЕ**

$$\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}$$

## Тождества

$$\sqrt[n]{\sqrt{a}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt{a}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt{a}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt{a}}$$

**ДЕЙСТВИЕ, ПОСРЕДСТВОМ КОТОРОГО  
ОТЫСКИВАЕТСЯ КОРЕНЬ  $n$  - Й  
СТЕПЕНИ, НАЗЫВАЕТСЯ  
ИЗВЛЧЕНИЕМ КОРНЯ  $n$  - Й СТЕПЕНИ.**

# Примеры

---

$$1) \quad \sqrt[3]{27} = 3; \quad 3^3 = 27$$

$$2) \quad \sqrt[4]{256} = 4; \quad 4^4 = 256$$

$$3) \quad \sqrt[5]{0,00243} = 0,3; \quad 0,3^5 = 0,00243$$

$$4) \quad \sqrt[3]{1000000} = 100; \quad 100^3 = 1000000$$

$$5) \quad \sqrt[3]{64000} = 40; \quad 40^3 = 64000$$

$$6) \quad \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

# УСТНО:

---

□ Вычислите:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \sqrt[7]{0} - \sqrt[8]{256} = 0 - 2 = -2$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{81} = 5 + 3 = 8$$

$$\sqrt[10]{1} = 1 \quad \sqrt{64} - \sqrt[5]{243} = 8 - 3 = 5$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \sqrt[6]{64} + \sqrt[4]{625} = 2 + 5 = 7$$

# Свойства корня $n$ -ой степени (для $n \in \mathbb{N}$ , $m \in \mathbb{N}$ , $n > 1$ , $m > 1$ )

---

$$1^\circ \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \text{где } a \geq 0, b \geq 0$$

$$2^\circ \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{где } a \geq 0, b > 0$$

$$3^\circ \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где } a \geq 0$$

$$4^\circ \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad \text{где } a \geq 0$$

# Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где } a \geq 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$$

## Примеры

**$a^p$**

$$1) \quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$2) \quad 12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$$

$$3) \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$$



**Представьте степень с дробным показателем в виде корня:**

---

1.  $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

2.  $3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

3.  $(-8)^{\frac{1}{5}}$  = **не имеет**

4.  $5a^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{a}$

5.  $(x - y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x - y)^2}$



$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

**Представь  
те в виде  
степени с  
дробным  
показателе  
м:**

1.  $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

2.  $\sqrt[9]{a^4} = a^{\frac{4}{9}}$

3.  $\frac{3}{\sqrt{2}} = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

4.  $b\sqrt{b} = b \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{1,5}$

5.  $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{\frac{3}{2}} = (x+y)^{1,5}$

---

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

где  $a \geq 0$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{10}{15}}$$

# Свойства степени с рациональным показателем (для $p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$ )

---

$$1^\circ a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0$$

$$2^\circ a^1 = a$$

$$3^\circ a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ где } a \neq 0$$

$$4^\circ a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \text{ где } a \neq 0$$

$$5^\circ a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$6^\circ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \text{ где } a \neq 0$$

$$7^\circ (a^p)^q = a^{pq}$$

$$8^\circ a^p \cdot b^p = (ab)^p$$

$$9^\circ \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p, \text{ где } b \neq 0$$

$$10^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p, \text{ где } a \neq 0, b \neq 0$$

***Если вы хотите научиться  
плавать, то смело входите в воду, а  
если хотите научиться решать  
задачи, то решайте их***

**(Д. Пойа)**

***СПАСИБО ЗА УРОК !***