Урок 16. Интервальная оценка числовой характеристики случайной величины.

Если оценка состоятельна, то точность приближений достаточна для практического применения.

Если объем выборки меньше 30%, то вопрос о точности приближений остается открытым.

В математической статистике этот вопрос решается следующим образом:

1. ***по сделанной выборке находится точечная оценка неизвестной генеральной характеристики;***
2. ***Задаются вероятностью*** γ ***;***
3. ***По определенным правилам находится число***

$$\varepsilon > 0$$

4. ***Составляют соотношение:*** $P(\bar{\Theta} - \varepsilon < \Theta < \bar{\Theta} + \varepsilon) = \gamma$

$$P(\bar{\Theta}-\varepsilon<\Theta<\bar{\Theta}+\varepsilon)=\gamma$$

Θ – *неизвестная генеральная характеристика*;

$\bar{\Theta}$ – *точечная оценка*;

ε – *точность приближения*;

$\bar{\Theta}-\varepsilon=\bar{\Theta}_1;\ \bar{\Theta}+\varepsilon=\bar{\Theta}_2$ – *доверительные границы*;

$(\bar{\Theta}_1;\bar{\Theta}_2)$ – *доверительный интервал*;

γ – *надежность (доверительная вероятность)*

Говорят: Интервал накрывает неизвестную генеральную характеристику с надежностью γ.

Построение интервальных оценок для параметров нормального распределения, МХ=а; ДХ= σ^2

- ***Интервальная оценка неизвестного математического ожидания (генеральной средней) при известной дисперсии.***

1. ***Точечная оценка*** $\bar{X}$
2. ***Надежность*** γ
3. ***Точность*** $\varepsilon = \dfrac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}, u_\gamma - T_3$
4. ***Интервальная оценка***

- ***Интервальная оценка неизвестного математического ожидания (генеральной средней) при не известной дисперсии.***

1. ***Точечная оценка*** $\bar{X}$
2. ***Надежность*** γ
3. ***Точность*** $\varepsilon = \dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}, t_\gamma - T_7$
4. ***Интервальная оценка***

<u>Задача 1.</u> Случайная величина распределена с параметром $\sigma = 2$. Сделана случайная выборка с возвратом объема n=25. Найти с надежностью $\gamma = 95\%$ интервальную оценку для неизвестного математического ожидания, если выборочная средняя равна 1,25.

Решение:

$$T_3 \to u_\gamma = 1{,}64 \to \varepsilon = \frac{1{,}64 \cdot 2}{\sqrt{25}} = 0{,}656$$

$$\to P(1{,}25 - 0{,}656 < a < 1{,}25 + 0{,}656) = 0{,}95$$

<u>Задача 2.</u> По результатам измерения диаметра 25 корпусов электродвигателей было получено, что средний диаметр составил 100 мм, при выборочной дисперсии 256 мм^2. Найти вероятность того, что интервал $(0{,}9\bar{X};1{,}1\bar{X})$ ***накроет неизвестное математическое ожидание.***

Решение:

$$0{,}9\bar{X}=\bar{X}-\varepsilon \rightarrow \varepsilon=100-90=10$$

$$t_{\gamma}=\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{S}=3{,}125 \rightarrow T_{7} \rightarrow \gamma=99\%$$

- ***Задача 3***

Для изучения размера среднемесячной заработной платы занятого населения региона производится случайная бесповторная выборка. Каким должен быть объем этой выборки, чтобы с доверительной вероятностью 0,997 можно было утверждать, что среднемесячная заработная плата в выборке отличается от среднемесячной зарплаты в регионе по абсолютной величине не более чем на 25%. Если среднемесячная зарплата по выборке составила 220 у.е. со среднеквадратическим отклонением 120 у.е.

Интервальная оценка среднего квадратического отклонения (дисперсии).

1.
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{n}; \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

2. ***Задаются надежностью (доверительной вероятностью) ;***

3. Вычисляют точность приближения:

$$\varepsilon = S \cdot q_\gamma, \text{по табл.} 4$$

4. Используя схему, находят интервальную оценку среднего квадратического отклонения:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \\ k = n-1 \end{array} \right\} \to T_4 \to q_\gamma \to \varepsilon \to P(S - \varepsilon < \sigma_x < S + \varepsilon) = \gamma$$

Задача 4.

- ***Вычислить с надежностью 0,99 интервальную оценку для дисперсии по выборке объема n=17, если выборочная дисперсия равна 25.***

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= 0{,}99\\ k &= 17-1=16\end{aligned}\right\}\rightarrow T_4 \rightarrow q_\gamma = 0{,}671 \rightarrow \varepsilon = 5\cdot 0{,}671 = 3{,}355$$

$$\rightarrow P(1{,}645 < \sigma_x < 8{,}355) = 0{,}99$$

Задача 5.

- ***По результатам измерений 51 корпуса электродвигателей было получено, что выборочная дисперсия составила 2,56. Найти вероятность, что интервал***
- ***(S-0,16;S+0,16) накроет неизвестное среднее квадратическое отклонение.***

$$\varepsilon = 0{,}16 \to q_\gamma = \frac{\varepsilon}{S} = \frac{0{,}16}{1{,}6} = 0{,}1, k = 50 \to T_4 \to \gamma = 0{,}7$$

Интервальная оценка вероятности события.

1. ***Интервальная оценка при большом числе испытаний (n >10).***

$$\varpi = \frac{m}{n}$$

$$p_1 = \frac{\varpi + \dfrac{u_\gamma^2}{2n} - u_\gamma \sqrt{\varpi(1-\varpi)/n + u_\gamma^2/4n^2}}{1 + \dfrac{u_\gamma^2}{n}}$$

$$p_2 = \frac{\varpi + \dfrac{u_\gamma^2}{2n} + u_\gamma \sqrt{\varpi(1-\varpi)/n + u_\gamma^2/4n^2}}{1 + \dfrac{u_\gamma^2}{n}}$$

Задача 6.

Событие из серии испытаний в количестве 100 произошло 78 раз (испытания Бернулли). Найти интервальную оценку для вероятности Р с надежностью 0,9.

2. При n >1000

$$p_1 = \varpi - u_\gamma \sqrt{\varpi(1-\varpi)/n};$$
$$p_2 = \varpi + u_\gamma \sqrt{\varpi(1-\varpi)/n}$$

<u>Задача7.</u>

Из 1000 деталей отобраны 50 нестандартных. Определить вероятность того, что интервал (0,04;0,06) накроет неизвестную вероятность появления нестандартных деталей.

$$n = 1000; m = 50 \to \varpi = 0{,}05$$
$$(0{,}05 - \varepsilon; 0{,}05 + \varepsilon) = (0{,}04; 0{,}06) \to 0{,}05 - \varepsilon = 0{,}04 \to$$
$$\to \varepsilon = 0{,}01; u_\gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varpi(1-\varpi)/n}} = 1{,}46 \to T_3 \to \gamma = 0{,}92786$$
$$Ответ: P(0.04; 0{,}06) = 0{,}92786$$

3. ***Интервальная оценка при n <10.***

$$P(p_1 < p < p_2) = \gamma\text{, где } p_1 \text{ и } p_2 \text{ находятся по } T_5.$$

Задача 8. **В пяти испытаниях событие произошло 3 раза. С надежностью 0,95 найти интервальную оценку появления события в единичном испытании.**

$$n = 5; m = 3; \gamma = 0{,}95 \to T_5 \to p_1 = 0{,}147; p_2 = 0{,}947;$$

$$P(0{,}147; 0{,}947) = 0{,}95$$

Задача 9.

- ***При выборочном опросе 1200 телезрителей оказалось, что 456 из них регулярно смотрят программы телеканала НТВ. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю всех телезрителей, предпочитающих программы телеканала НТВ.***