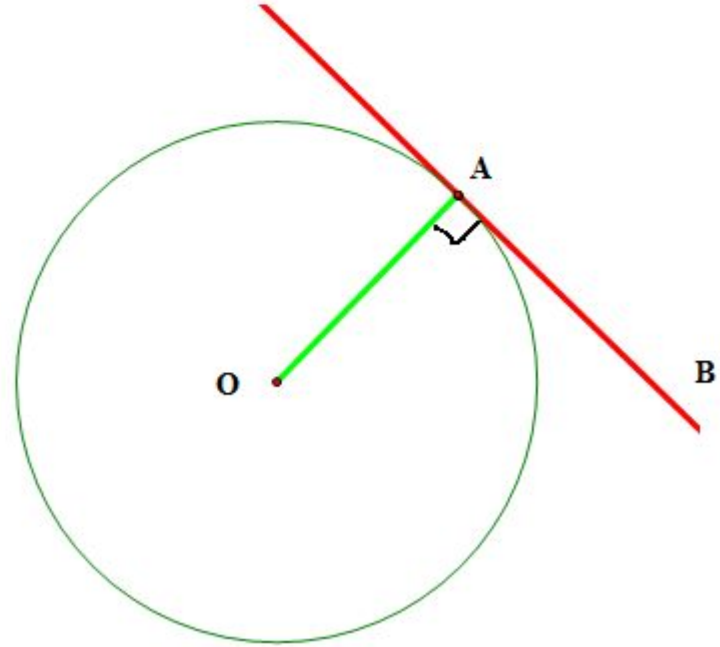
Окружность. Задача 17.

Центральные и вписанные углы.

П.71, 72 и 73 учебника

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

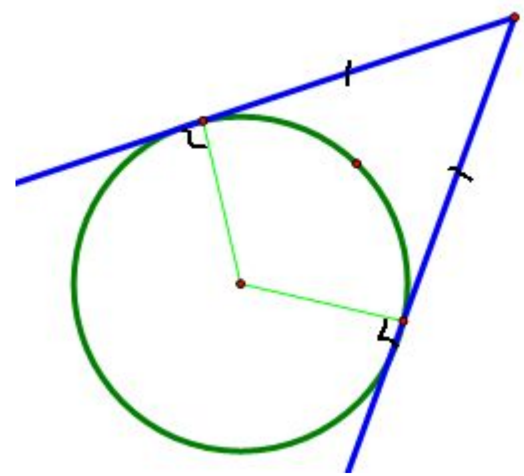


Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

AB - касательная

$OA \perp AB$



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Угол называется **вписанным** в окружность, если его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

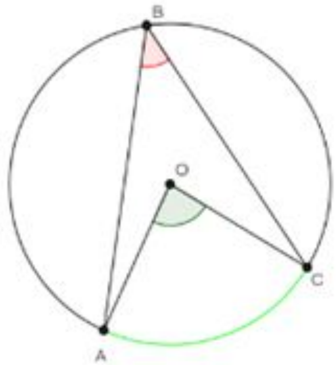
На рисунке вписанным углом является угол ABC.

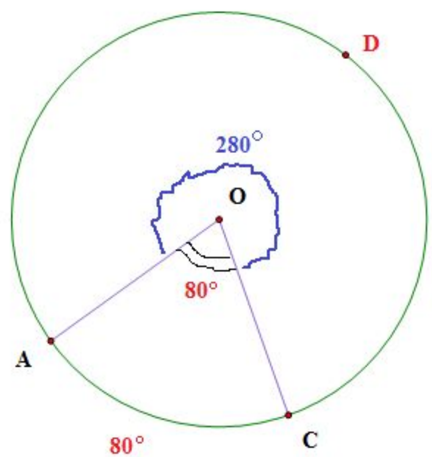
Центральным называется угол с вершиной в центре окружности.

На рисунке центральным углом является угол AOC.

Градусной мерой дуги называется величина соответствующего центрального угла.

На рисунке градусная мера дуги AC равна градусной мере угла AOC.





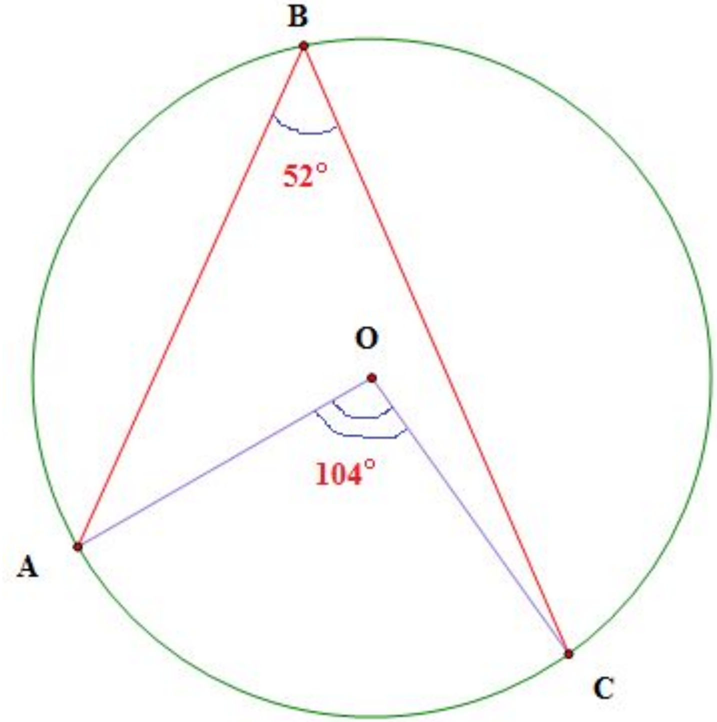
Маленькая дуга AC равна 80°

Большая дуга ADC равна 360°- 80°= 280°

360°- это полная окружность.

Теорема

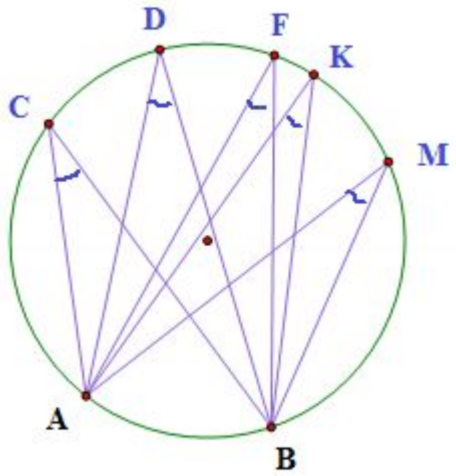
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.



$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

Следствие 1

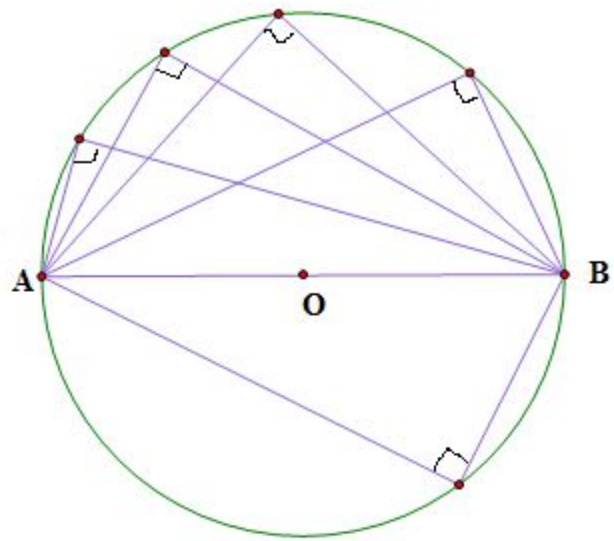
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



Вписанные углы с вершинами C, D, F, K, M равны, они опираются на одну и ту же дугу.

Следствие 2

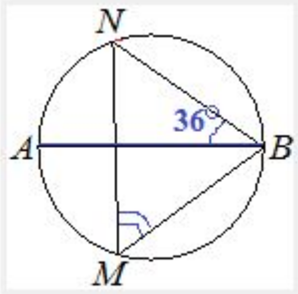
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.



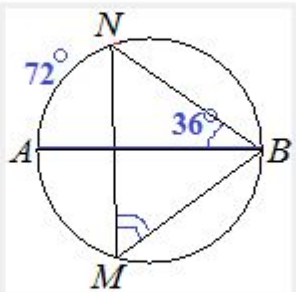
AB – диаметр окружности.

Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, - прямые.

Задача 1.



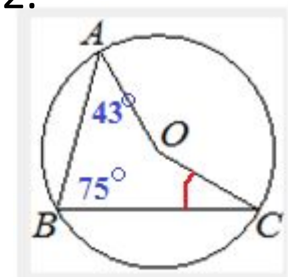
На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что $\angle NBA = 36^\circ$. Найдите угол NMB. Ответ дайте в градусах.



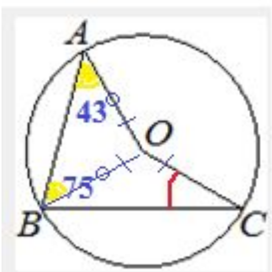
Угол NBA – вписанный, поэтому он равен половине дуги,
на которую он опирается. Следовательно дуга AN равна
36°· 2 = 72°.
Диаметр AB делит окружность на две равные части,
поэтому дуга ANB равна 180°.
Значит дуга NB= 180° - 72°=108°.
Угол NMB – вписанный, поэтому он равен половине дуги,
на которую он опирается.
Угол NMB = 108°: 2 = 54°

Ответ: 54

Задача
2.



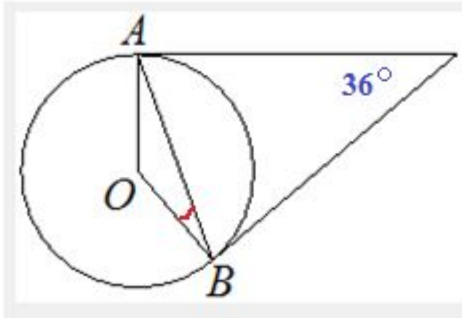
Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A, B и C. Известно, что $\angle ABC = 75^\circ$ и $\angle OAB = 43^\circ$.
Найдите угол BCO. Ответ дайте в градусах.



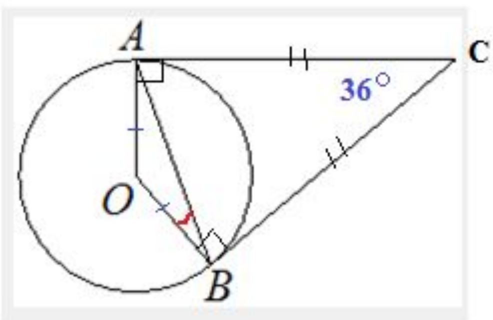
Проведём радиус OB. Треугольник AOB – равнобедренный
AO=BO. Углы при основании р/б треугольника равны, значит угол OAB равен углу ABO и равны 43°.
Треугольник BOC тоже равнобедренный BO=CO.
Угол BCO равен углу OBC, который равен
$75^\circ - 43^\circ = 32^\circ$

Ответ:
32

Задача 3.



Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 36°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



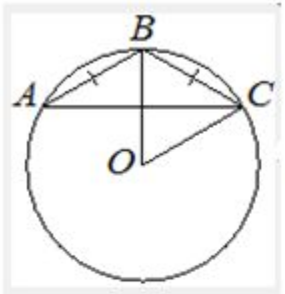
Отрезки касательных, проведённые из одной точки,
равны: AC=BC.
Треугольник ABC – равнобедренный.
Можем найти углы при основании: угол ABC и равный ему угол BAC.
Радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания: угол OBC = 90°

$\angle ABO = 90^\circ - \angle ABC$

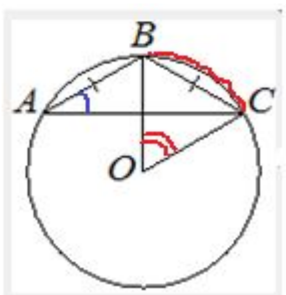
Второй способ: можно найти угол AOB (360° - 90° – 90° – 36° = 144°)
Треугольник AOB – равнобедренный AO=BO.
И последний шаг: находим углы при основании р/б треугольника AOB.

Ответ: 18

Задача
4.



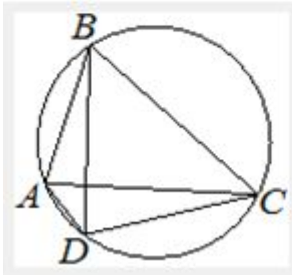
Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 123^\circ$. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



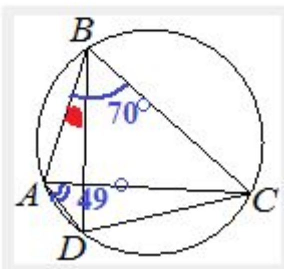
Угол ВАС – вписанный угол. Вписанный угол равен половине
дуги, на которую он опирается.
Можем найти дугу ВС, на которую он опирается.
Угол ВОС – центральный, градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего центрального угла.

Ответ:
57

Задача 5.



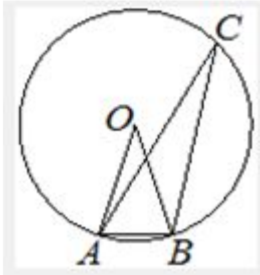
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 70°, угол CAD равен 49°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



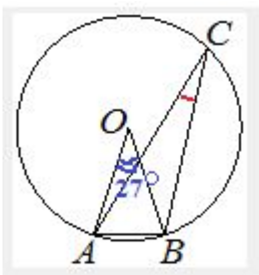
Угол ABC – вписанный, он опирается на дугу ADC.
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.
Значит дуга ADC равна $70^\circ \cdot 2 = 140^\circ$.
Угол CAD – вписанный , он опирается на дугу CD.
Значит дуга CD равна $49^\circ \cdot 2 = 98^\circ$
Угол ABD – вписанный, он опирается на дугу AD и равен половине этой дуги.
Дугу AD можно найти как разность градусных мер дуги ADC и дуги CD: дуга AD равна 42°.
Угол ABD = $42^\circ : 2 = 21^\circ$

Ответ: 21

Задача 6.



Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 27°. Ответ дайте в градусах.

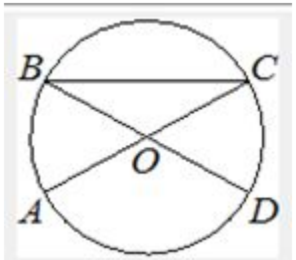


Угол АСВ – вписанный. Он равен половине дуги АВ, на которую он опирается.

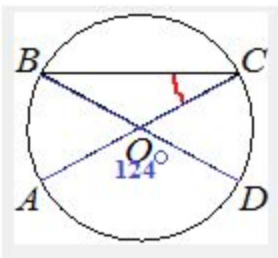
А градусная мера дуги равна градусной мере величины соответствующего центрального угла.

Ответ: 13,5

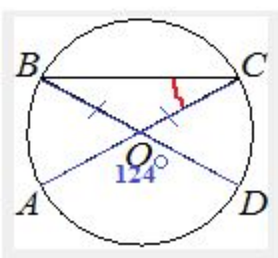
Задача
7.



В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 124°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



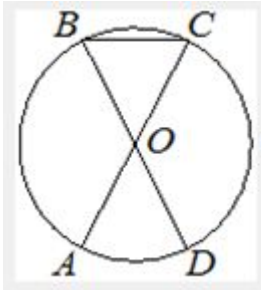
Угол ACB – вписанный, он равен половине дуги AB, на которую угол
ACB опирается.
BD- диаметр, он делит окружность на две дуги 180°.
Дуга AB равна 180 ° - 124° = 56°.
Теперь легко найти угол ACB.



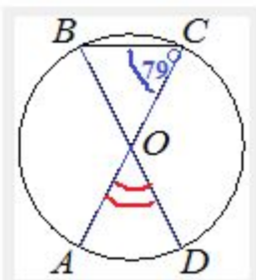
Можно найти угол ACB как угол при основании равнобедренного
треугольника BOC: BO=CO

Ответ:
28

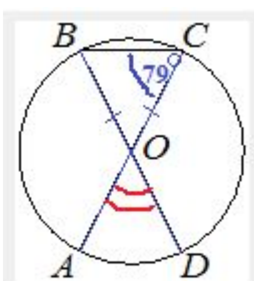
Задача 8.



Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен 79°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



А это обратная задача к предыдущей. Угол АСВ – вписанный.



А здесь второй способ: используйте равнобедренный треугольник ВОС.

Ответ: 22