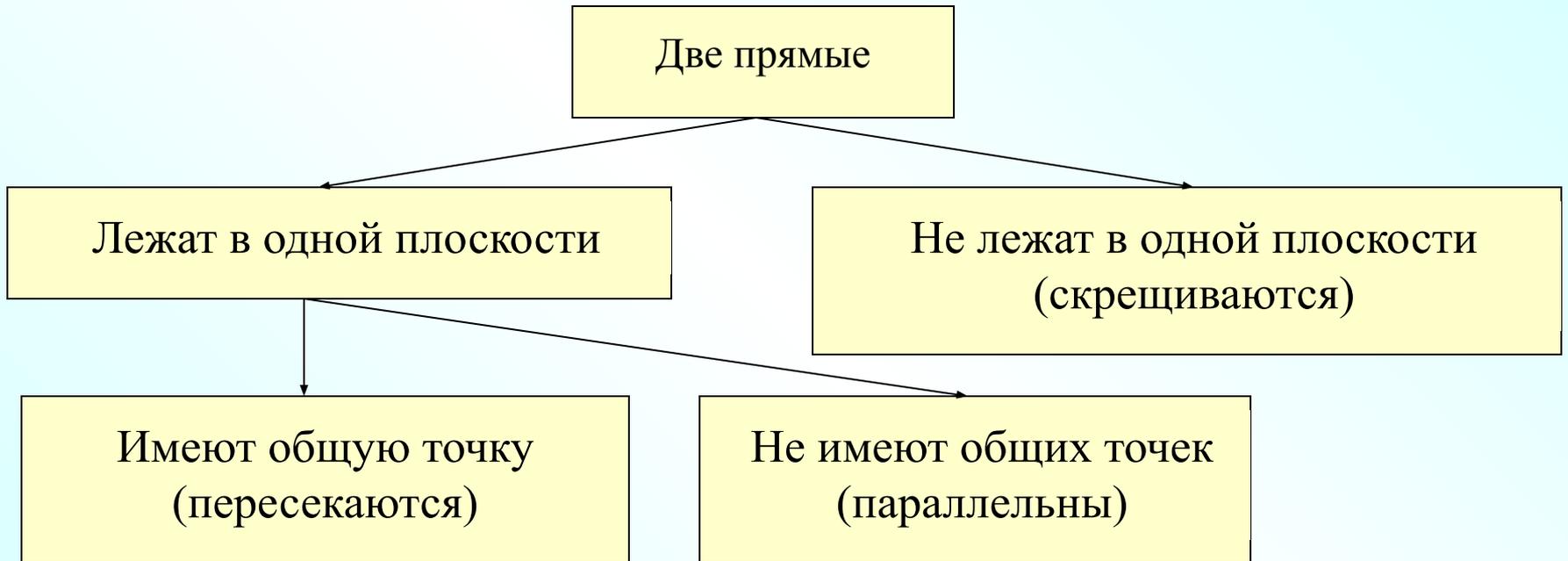


Скрещивающиеся

Л.С. Атанасян Геометрия 10 класс

прямые

Взаимное расположение двух прямых в пространстве



Упражнение 1

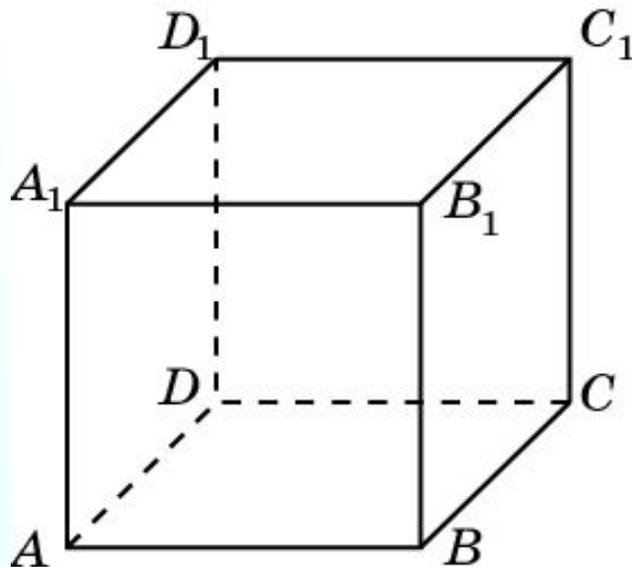
Всегда ли две не пересекающиеся прямые в пространстве скрещиваются?



Ответ: Нет.

Упражнение 2

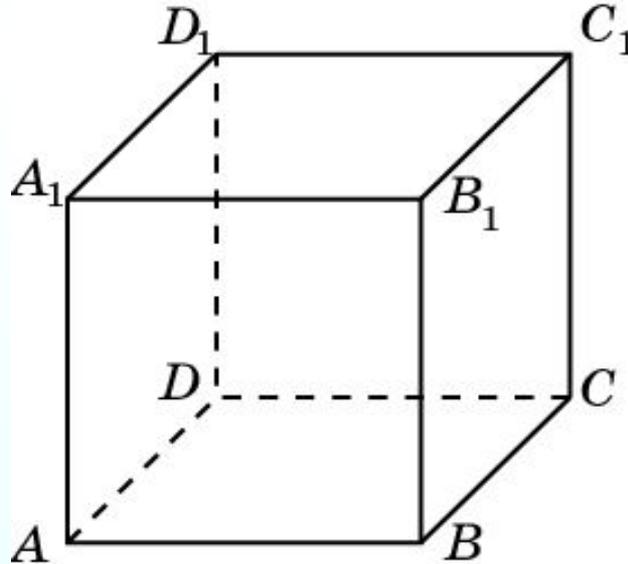
Назовите прямые, проходящие через вершины куба $A \dots D_1$ и скрещивающиеся с прямой AB .



Ответ: A_1D_1 ; B_1C_1 ; DD_1 ; CC_1 .

Упражнение 3

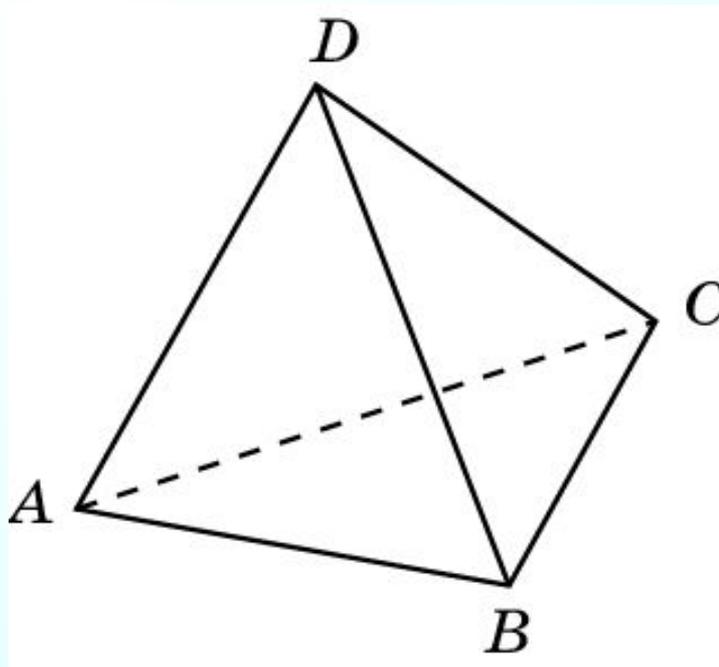
Сколько имеется пар скрещивающихся прямых, содержащих ребра куба $A...D_1$?



Решение: Каждое ребро участвует в четырех парах скрещивающихся прямых. У куба имеется 12 ребер. Следовательно, искомое число пар скрещивающихся прямых равно $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$.

Упражнение 4

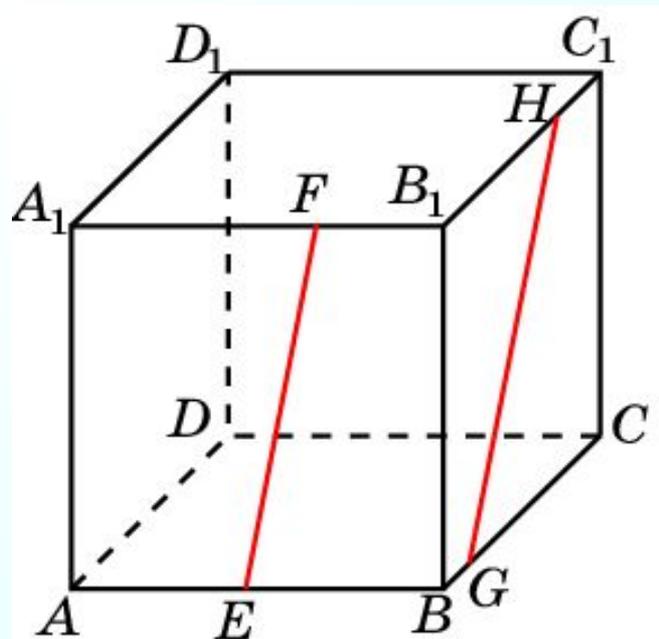
В тетраэдре $ABCD$ укажите пары скрещивающихся ребер.



Ответ: AB и CD ; BC и AD ; AC и BD .

Упражнение 5

Как в пространстве расположены прямые EF и GH , проведенные в плоскостях граней куба $A...D_1$?



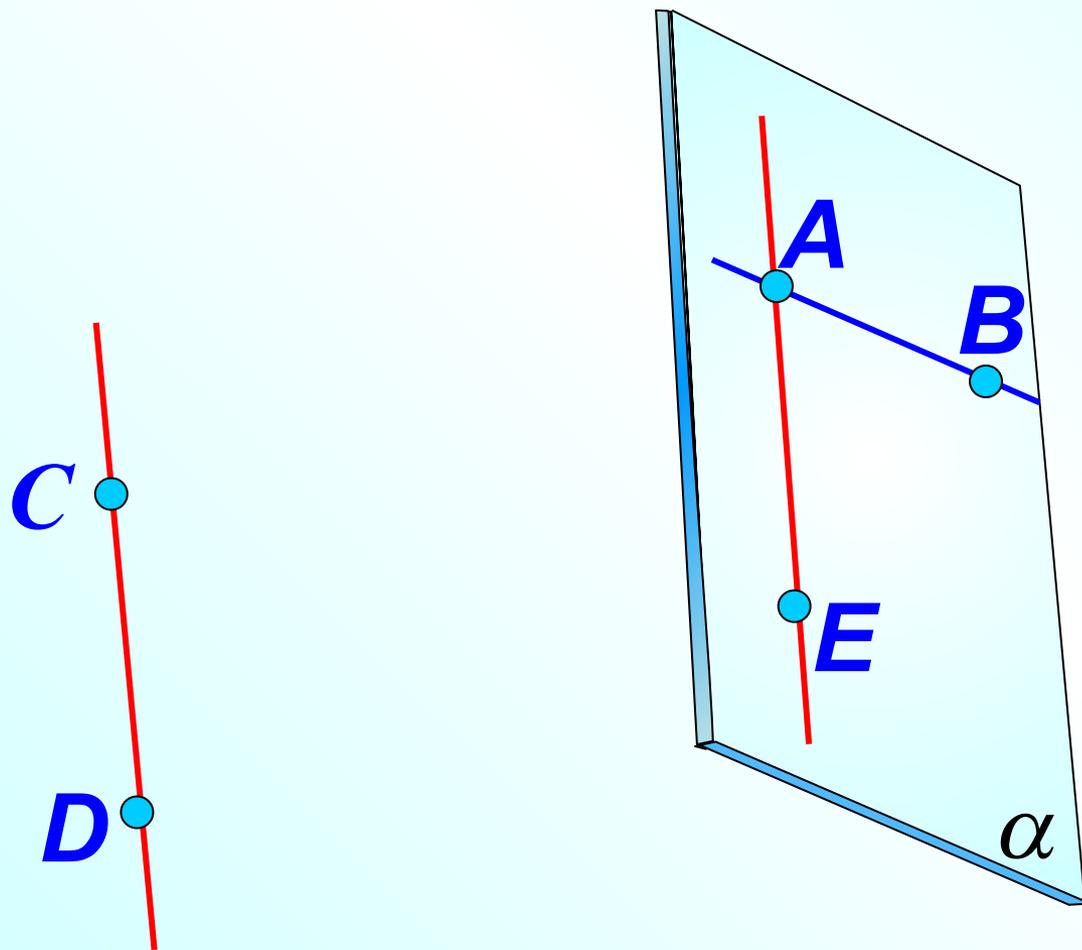
Ответ: Прямая GH пересекает плоскость ABB_1 в точке, не принадлежащей прямой EF . Следовательно, по признаку скрещивающихся прямых, прямые EF и GH скрещиваются.

Повторение.

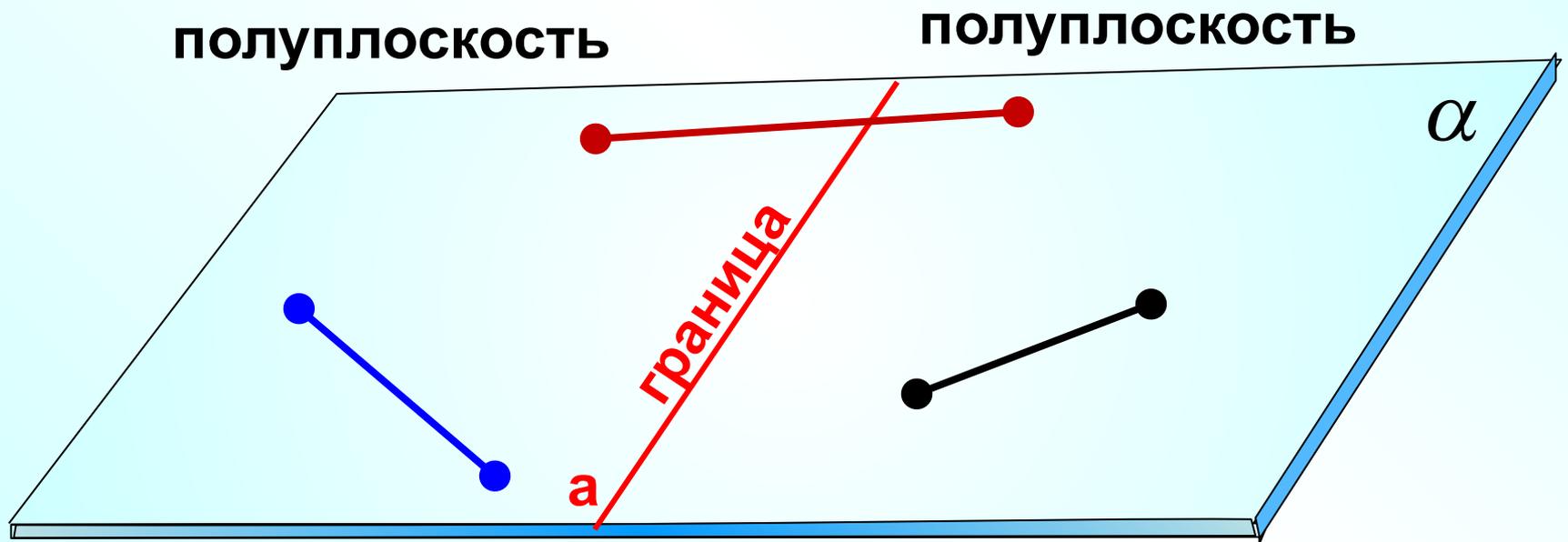
- Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны? **Нет**
- Две прямые параллельны некоторой третьей прямой. Могут ли эти прямые **а) пересекаться?** **Да**
б) быть скрещивающимися? **Да**
- Могут ли скрещивающиеся прямые **a** и **b** быть параллельными прямыми? **Нет**
- Даны две скрещивающиеся прямые **a** и **b**. Точки **A** и **A₁** лежат на прямой **a**, точки **B** и **B₁** лежат на прямой **b**. Как бы **AB** скрещивается с **A₁B₁**? **AB**
- Прямая **a** скрещивается с прямой **b**, а прямая **b** скрещивается с прямой **c**. Следовательно, этого, что прямые **a** и **c** - скрещиваются. **Нет**

Теорема о скрещивающихся прямых

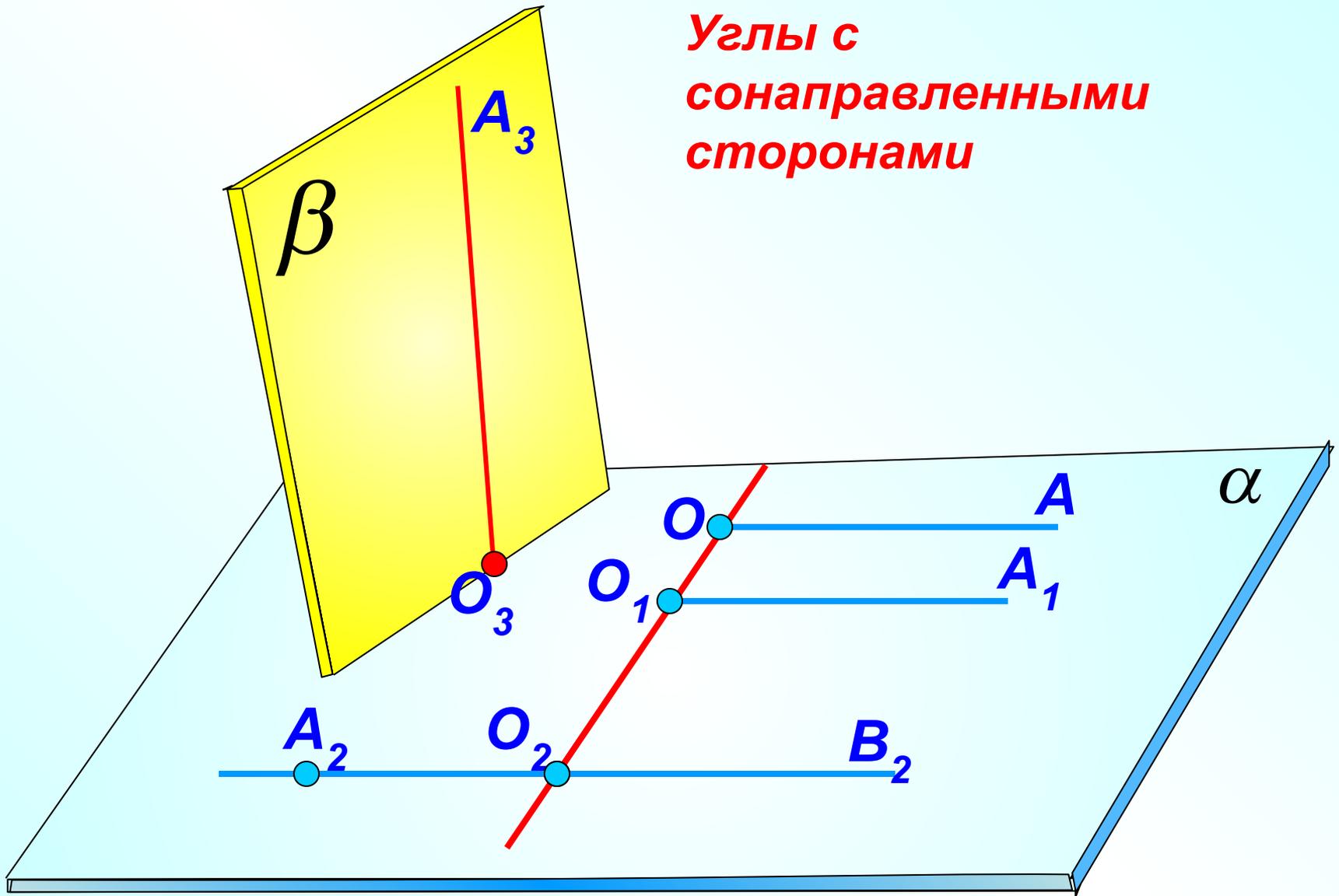
Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.



Любая прямая a , лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части, называемые полуплоскостями. Прямая a называется границей каждой из этих полуплоскостей.

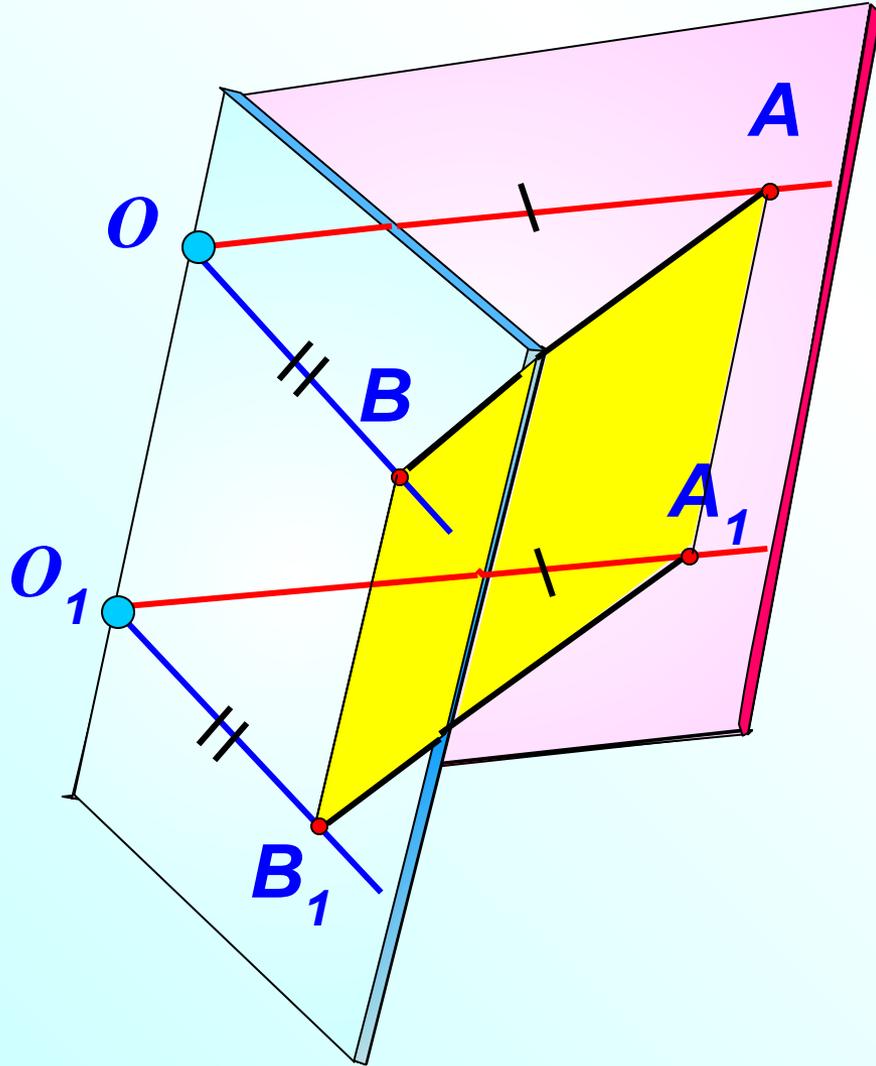


**Углы с
сонаправленными
сторонами**



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

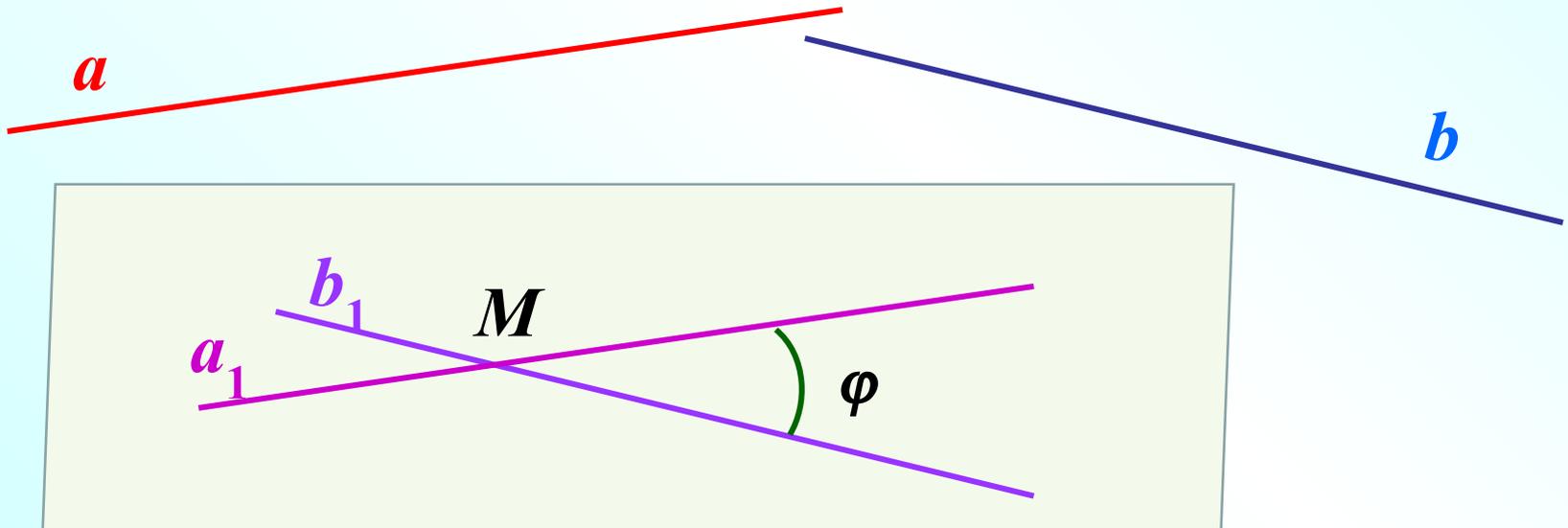


✓ ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

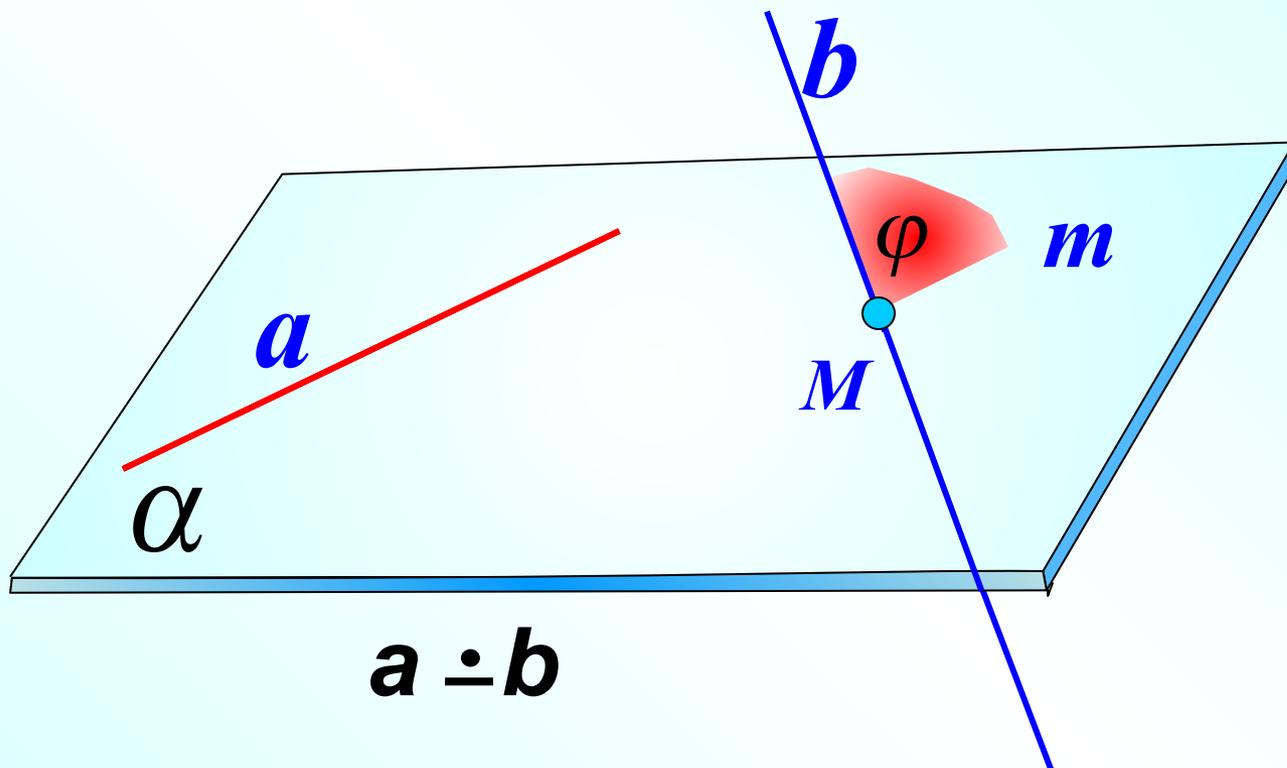
За величину угла между двумя скрещивающимися прямыми a и b принимается величина угла между параллельными им пересекающимися в некоторой точке M прямыми a_1 и b_1 , то есть

$$\widehat{(a; b)} = \widehat{(a_1; b_1)} = \varphi$$

где $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$, $a_1 \cap b_1 = \{M\}$



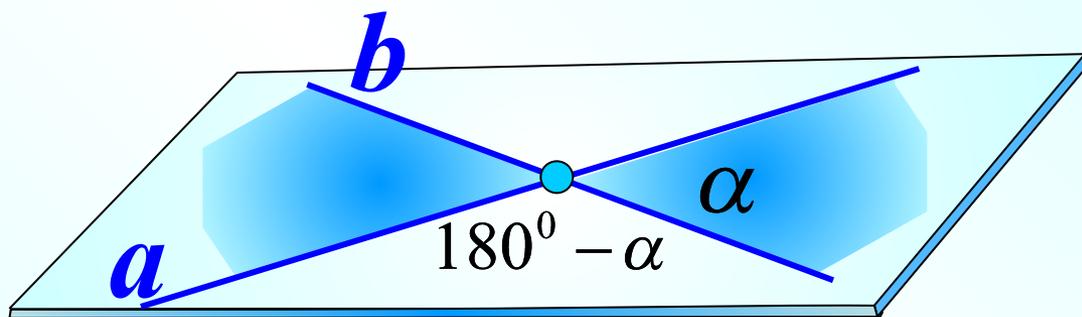
Угол между скрещивающимися прямыми

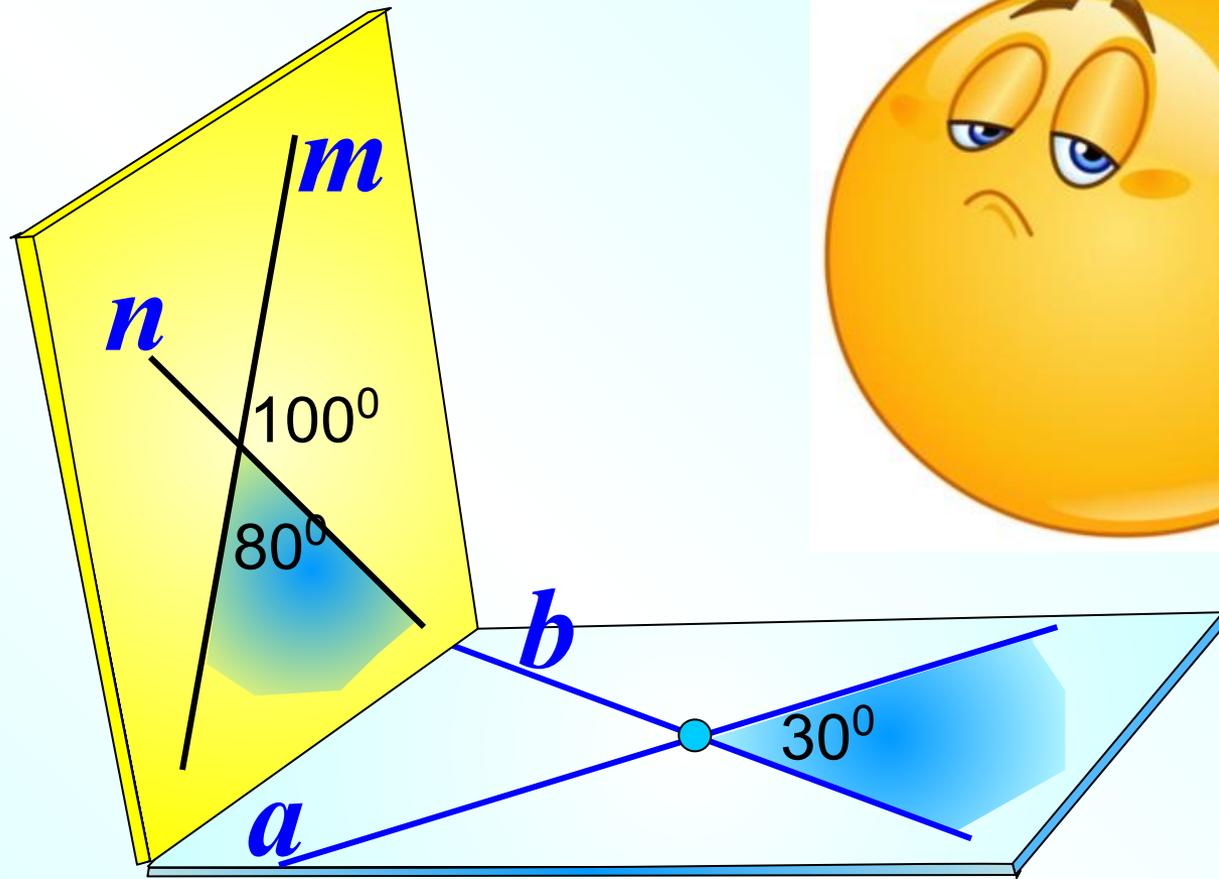


Точку M можно выбрать произвольным образом.

В качестве точки M удобно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых.

Угол между прямыми

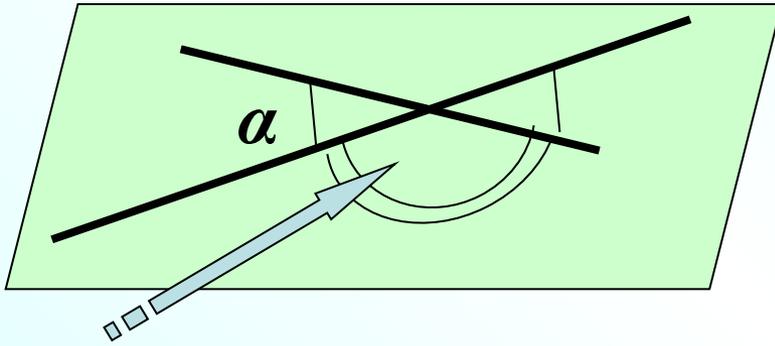




Угол между прямыми a и b 30° .

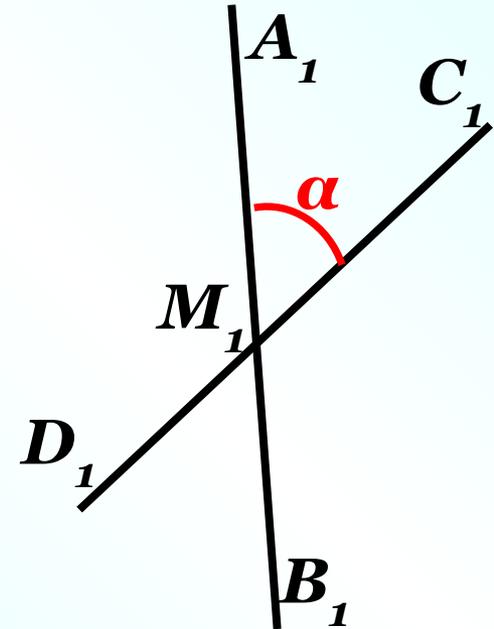
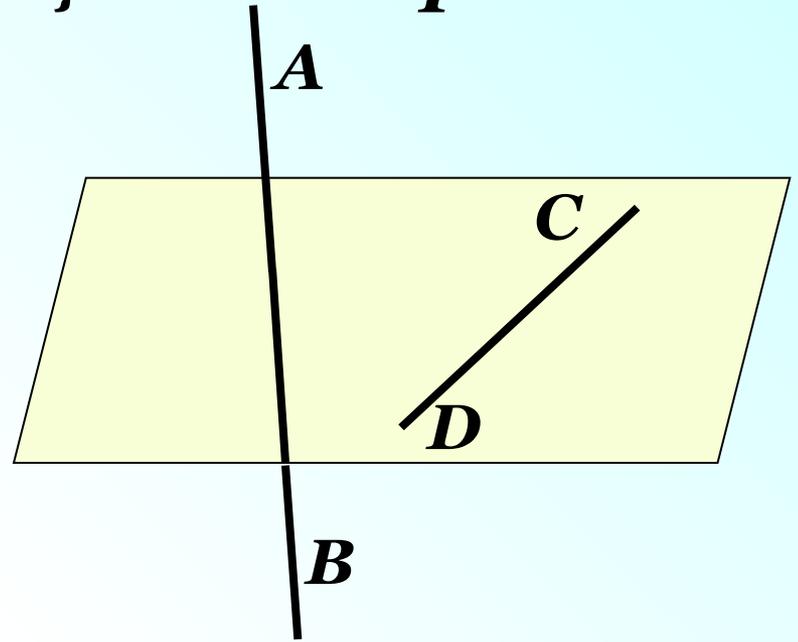
Угол между прямыми m и n 80° .

Угол между скрещивающимися прямыми.



$$180^\circ - \alpha \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

Угол между прямыми – это градусная мера, а не геометрическая фигура.





Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
Найдите угол между прямыми:

1. BC и CC_1

90°

2. AC и BC

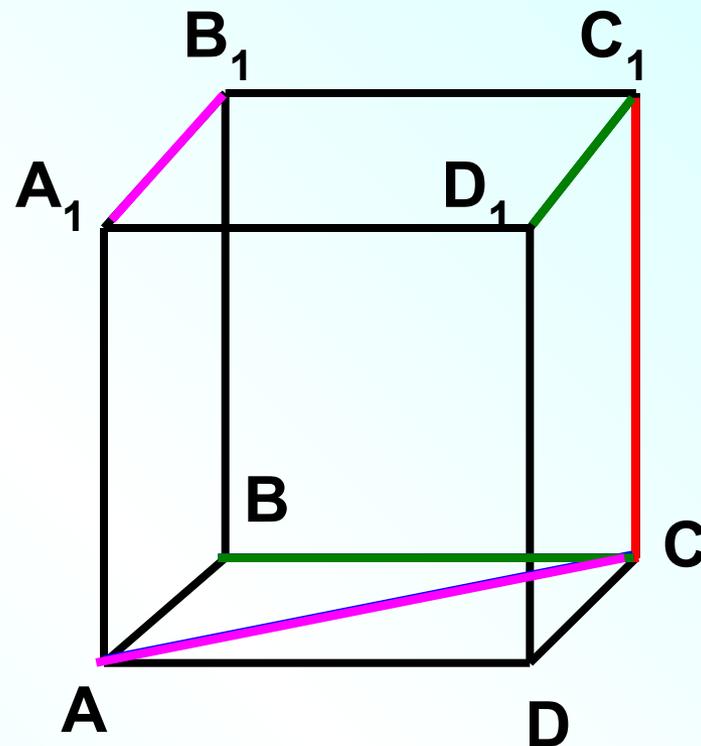
45°

3. $D_1 C_1$ и BC

90°

4. $A_1 B_1$ и AC

45°





Задача №44.

Дано: $OB \parallel CD$,

OA и CD – скрещивающиеся.

Найти угол между OA и CD , если:

а) $\angle AOB = 40^\circ$

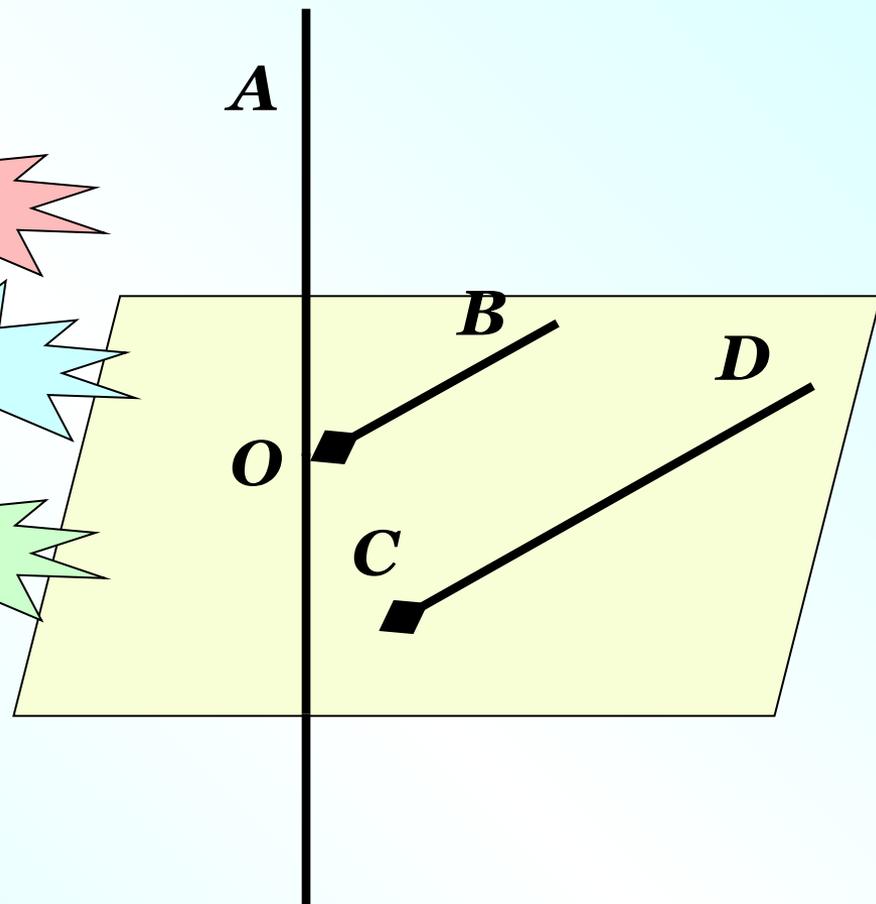
40°

б) $\angle AOB = 135^\circ$

45°

в) $\angle AOB = 90^\circ$

90°





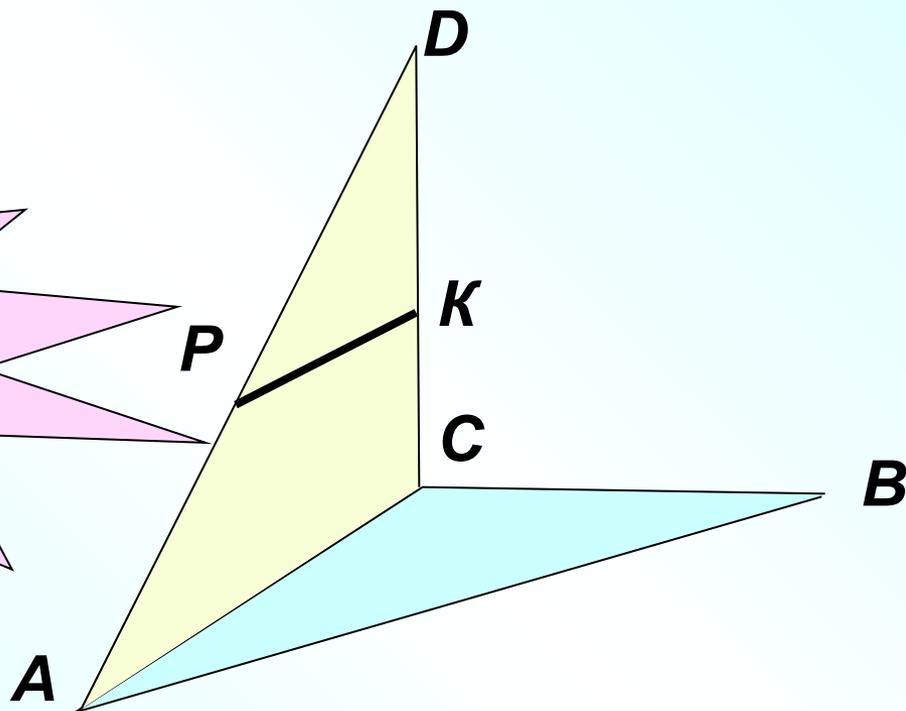
Треугольники ABC и ACD лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия $\triangle ADC$ с основанием AC .

Определить взаимное расположение прямых PK и AB , найти угол между ними, если $\angle C = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$

Ответ:

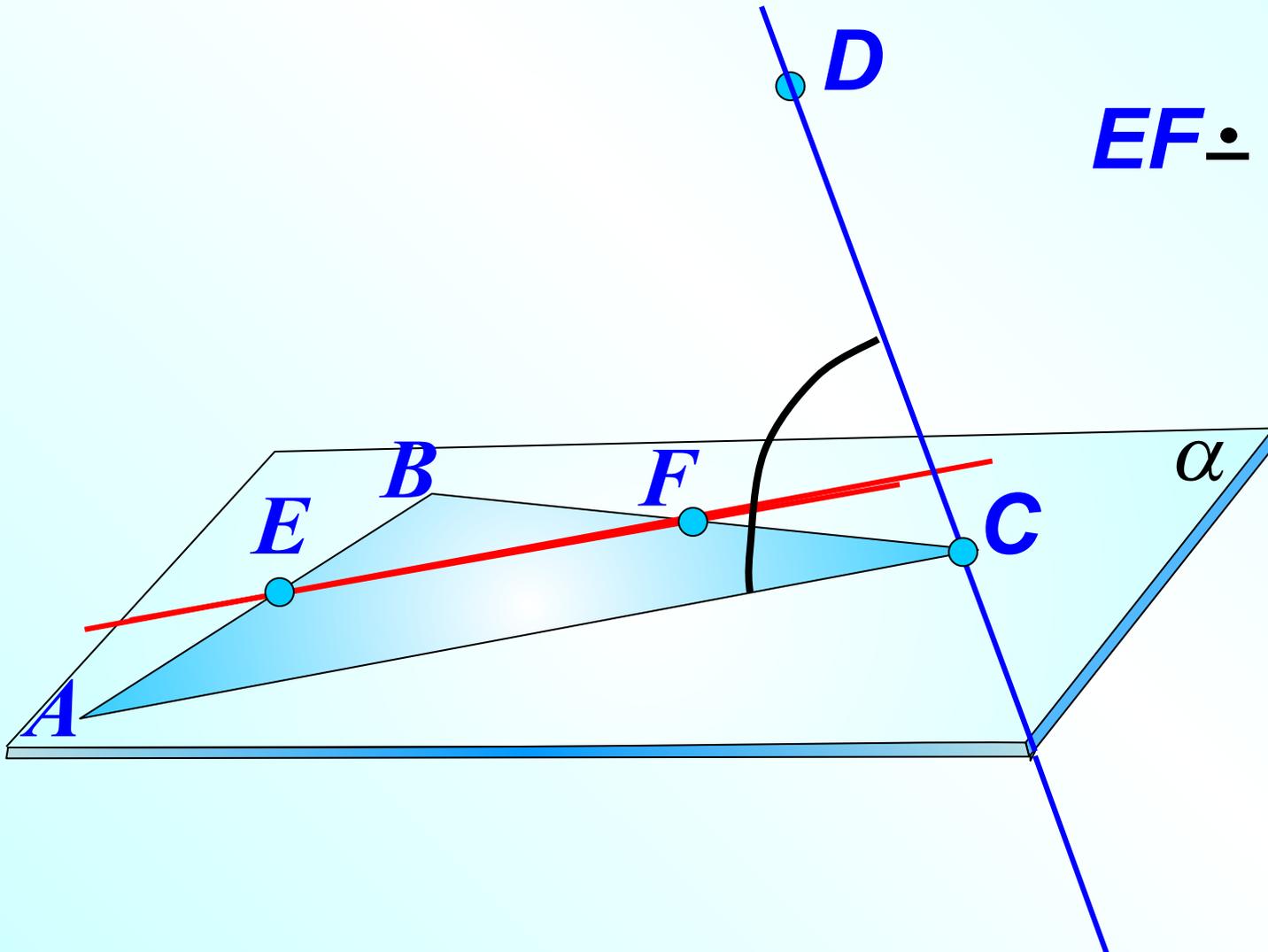
1) AB и PK
скрещивающиеся

2) 60°



Прямая CD проходит через вершину треугольника ABC и не лежит в плоскости ABC . E и F – середины отрезков AB и BC . Найдите угол между прямыми CD и EF , если $\angle DCA = 60^\circ$

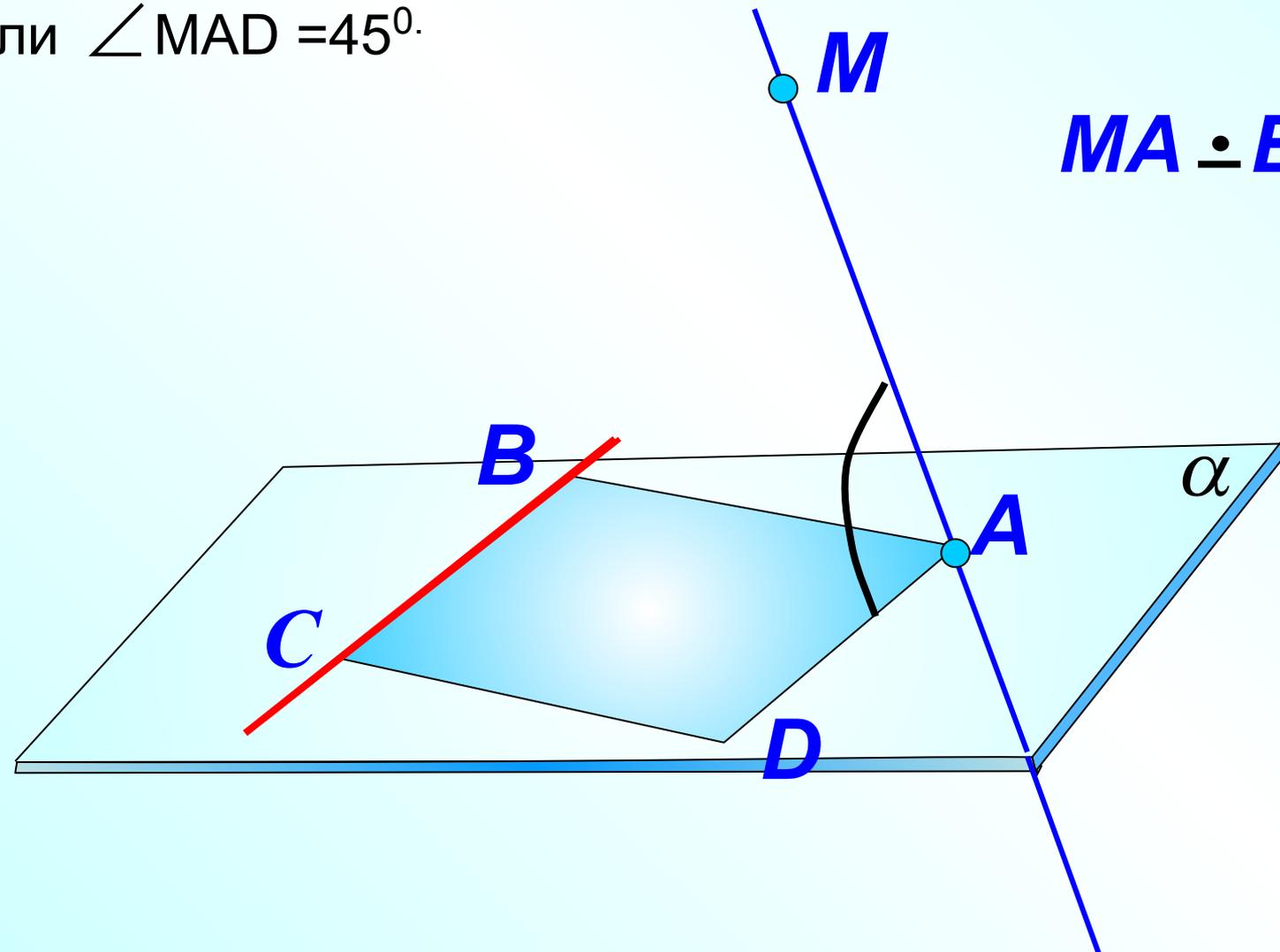
$EF \perp CD$?



Прямая MA проходит через вершину квадрата $ABCD$ и не лежит в плоскости квадрата. Докажите, что MA и BC – скрещивающиеся прямые.

Найдите угол между скрещивающимися прямыми MA и BC , если $\angle MAD = 45^\circ$.

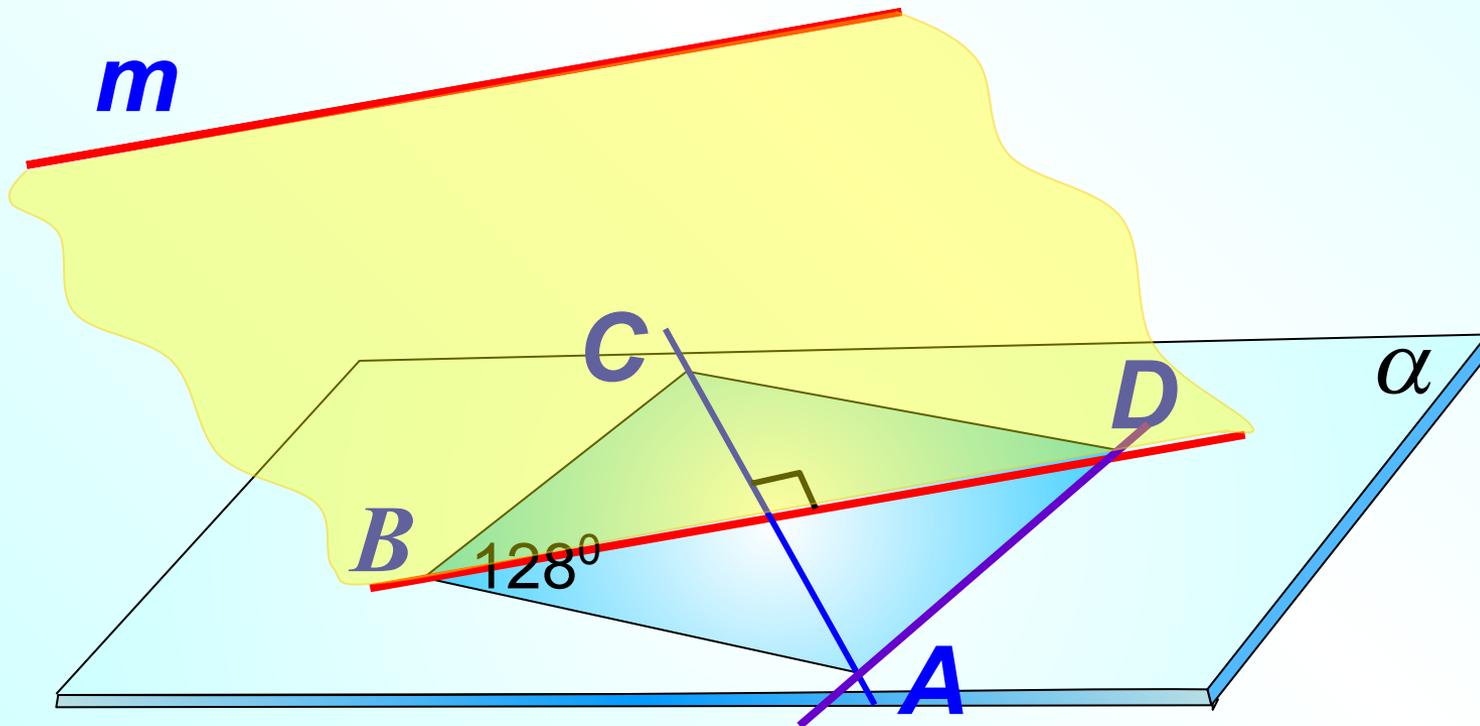
$MA \perp BC$?



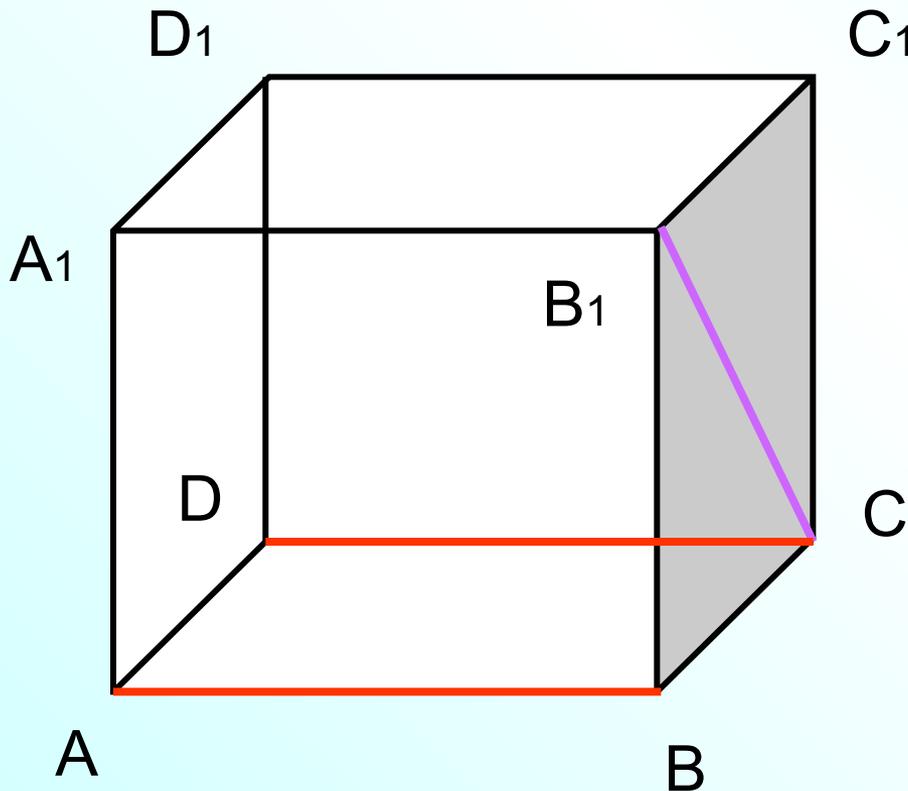
Прямая m параллельна диагонали BD ромба $ABCD$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что

а) m и AC – скрещивающиеся прямые – и найдите угол между ними;

б) m и AD – скрещивающиеся прямые – и найдите угол между ними, если $\angle ABC = 128^\circ$.



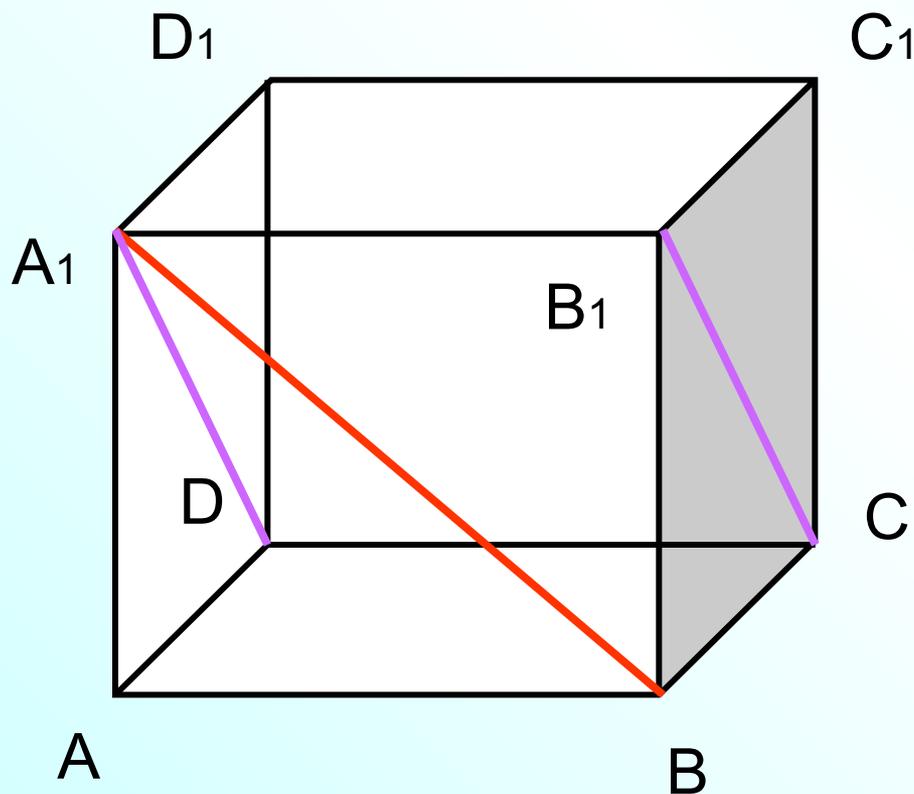
В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.
Найдите угол между прямыми AB и CB_1



Ответ:

9	0
---	---

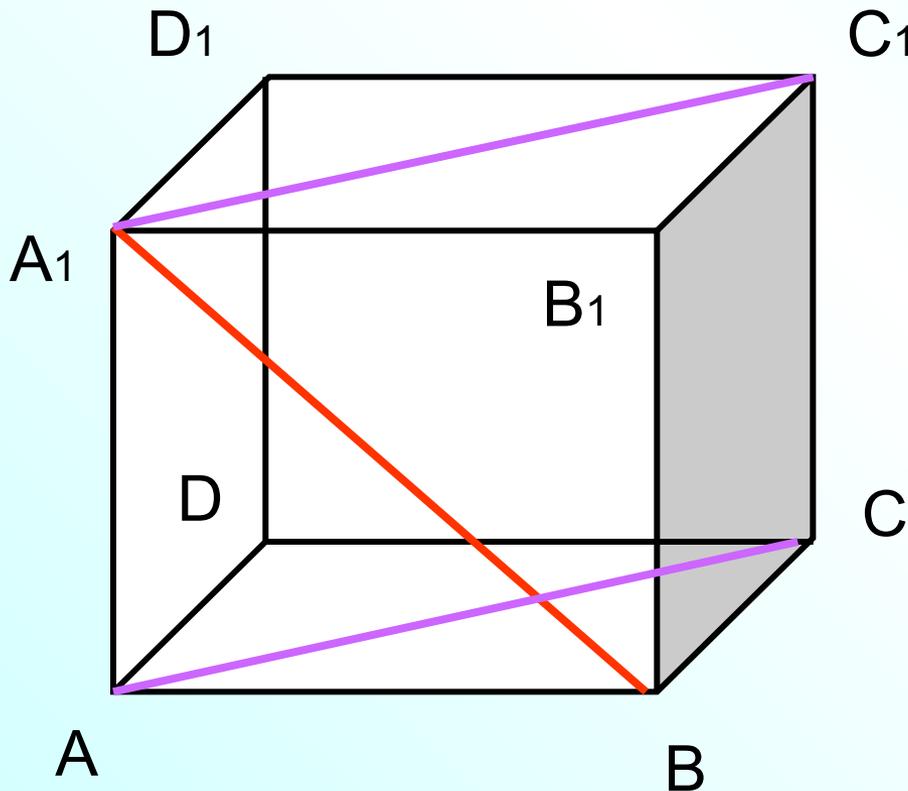
В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.
Найдите угол между прямыми $A_1 B$ и CB_1



Ответ:

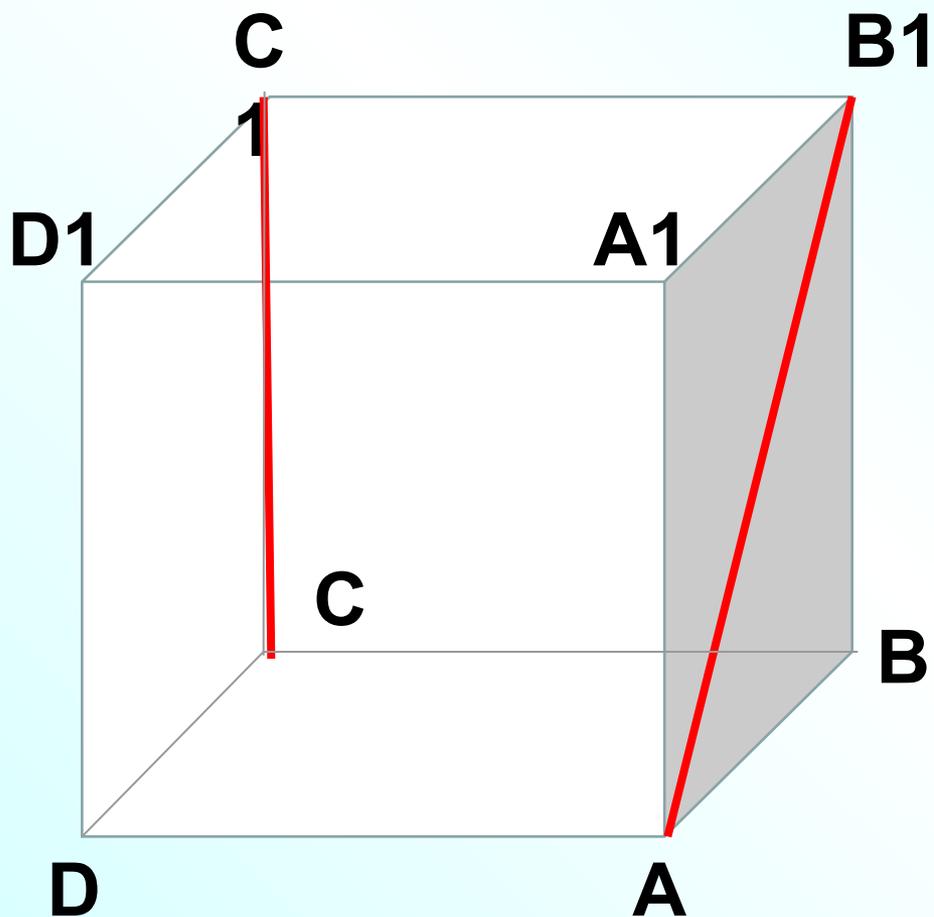
6	0
---	---

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.
Найдите угол между прямыми $A_1 B$ и AC



Ответ:

6	0
---	---



Задача 2

Ребро куба равно a .

Найти : $\widehat{(AB_1, CC_1)}$

Решение:

$$CC_1 \parallel BB_1$$

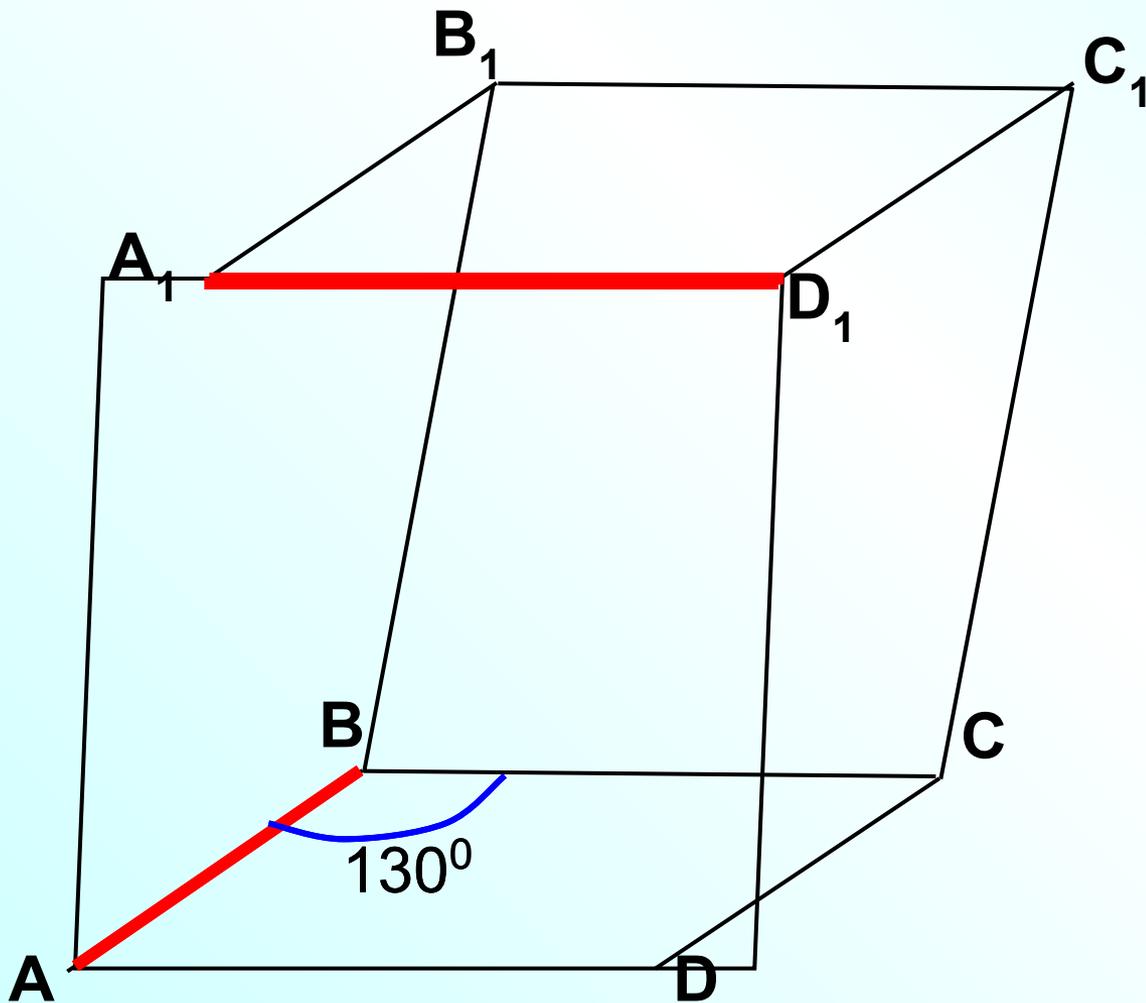
$$\angle (AB_1, CC_1) = \angle AB_1B$$

$$\angle AB_1B = 45^\circ$$

Ответ:

$$\angle (AB_1, CC_1) = 45^\circ$$

На рисунке $ABCD$ – параллелограмм, $\angle ABC = 130^\circ$,
 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Найдите
угол между прямыми AB и A_1D_1 .



На рисунке $ABCD$ – параллелограмм, $\angle BCC_1 = 120^\circ$,
 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Найдите
угол между прямыми BB_1 и AD .

