Решение ЛДУ *2* - го порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$ay'' + b\,y' + c\,y = f(x).$$

Если $f(x) = 0,$ то уравнение называется о д н о р о д н ы м .

Если $f(x) \neq 0,$ то уравнение называется н е о д н о р о д н ы м .

Однородные линейные уравнения

Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения 2-го порядка

Если функции $y_1(x),\ y_2(x)$ *являются линейно независимыми решениями линейного однородного уравнения* $ay'' + b\,y' + c\,y = 0$ *то его общее решение является их линейной комбинацией*

$$Y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x).$$

Метод решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами – это метод Эйлера

Решение уравнения ищется в виде

$$y(x) = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}.$$

После подстановки в уравнение получаем квадратное уравнение

$$ak^2 + b\,k + c = 0,$$

которое называется х а р а к т е р и с т и ч е с к и м уравнением

Характеристическое уравнение получается из данного дифференциального формальной заменой в нем

$$y'' \to k^2,\ \ y' \to k,\ \ y \to 1.$$

Формулы для нахождения корней квадратного уравнения

$$ak^2 + bk + c = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

или теорема Виетта: $\begin{cases} k_1 + k_2 = -\dfrac{b}{a} \\ k_1 k_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ уравнения возможны три случая вида частных решений y_1, y_2

Общее решение ОЛДУ 2-го порядка имеет вид :

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

1. Если $D > 0,$ уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2$ и две линейно независимых функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x},$ из которых составляется общее решение однородного уравнения

$$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (1)$$

2. Если $D = 0,$ уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 = k$ и две линейно независимых функции $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ из которых составляется общее решение однородного уравнения

$$Y = e^{kx}(C_1 + C_2 x) \qquad (2)$$

3. Если $D < 0,$ уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и две линейно независимых функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ тогда общее решение уравнения

$$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (3)$$

Вид частного и общего решений ОЛДУ 2-го порядка

	D	корни хар. ур-я	частные решения (фср)	общее решение
1	D>0	$k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$,	$Y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	D=0	$k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{kx}$ $y_2 = xe^{kx}$	$Y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
3	D<0	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$Y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Примеры. Решить ОЛДУ с постоянными коэффициентами

$$\text{I. } D > 0, \quad k_1 \neq k_2$$

- $1.\ y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2},$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 1, \qquad (D > 0, \quad k_1 \neq k_2), \quad \underline{Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}}.$$

- $2.\ 2y'' + 5y' + 2y = 0.$

$$2y'' + 5y + 2y = 0 \Rightarrow 2k^2 + 5k + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow k_1 = -1/2, \quad k_2 = -2,$$

$\left\{ y_1 = e^{-x/2}, \quad y_2 = e^{-2x} \right\}$ - фср; $\quad Y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x}$ - общее решение

- $3.\ y'' - 4y' = 0.$

$$y'' - y' = 40 \Rightarrow k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k(k-4) = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 4, \qquad (k_1 \neq k_2),$$

$\left\{ y_1 = e^0 = 1, \quad y_2 = e^{4x} \right\}$ - фср; $\quad Y = C_1 + C_2 e^{4x}$ - общее решение

Примеры. Решить ОЛДУ с постоянными коэффициентами

$$\text{II. } D = 0, \quad k_1 = k_2$$

- 4. $y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2,$

или $(k+2)^2 = 0, \;\; k_1 = k_2 = -2, \quad (D = 0),$

$\left\{ y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x} \right\}$ - фср; $Y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$ - общее решение

- 5. $36y'' - 12y' + y = 0.$

$36y'' - 12y' + y = 0 \Rightarrow 36k^2 - 12k + 1 = 0$,

$(6k-1)^2 = 0, \;\; k_1 = k_2 = 1/6, \quad (D = 0),$

$\left\{ y_1 = e^{x/6}, \quad y_2 = xe^{x/6} \right\}$ - фср; $Y = e^{x/6}(C_1 + C_2 x)$ - общее решение

Рассмотрим случай отрицательного дискриминанта (D<0) квадратного уравнения. Оно имеет в этом случае комплексно-сопряженные корни

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i.$$

Числа α и β – действительные, а i – мнимая единица, определяемая соотношением $i^2 = -1$ или $\sqrt{-1} = \pm i.$

Теперь можно записывать решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом:

$$x^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -1 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i, \;\; \alpha = 0, \; \beta = 1.$$

$$x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -4 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = \pm 2i, \;\; \alpha = 0, \; \beta = 2.$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i, \;\; \alpha = -2, \; \beta = 1.$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i, \;\; \alpha = \frac{1}{2}, \; \beta = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Примеры. Решить ОЛДУ с постоянными коэффициентами

$$\text{III. } D < 0, \quad k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$\left\{ y_1 = e^{\alpha x} \, cos\, \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \, sin\, \beta x \right\}$ фср;

$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ - общее решение

- $6.\ y'' + 6y' + 13y = 0 \Rightarrow k^2 + 6k + 13 = 0 \Rightarrow$

$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i, \qquad \alpha = -3,\ \beta = 2,$

$\left\{ y_1 = e^{-3x} \, cos\, 2x, \quad y_2 = e^{-3x} \, sin\, 2x \right\}$ фср;

$Y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$ - общее решение

$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ - вид общего решения

- 7. $y'' + 25y = 0.$

$$y'' + 25y = 0 \Rightarrow k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k^2 = -25 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 5i,$$

$$\alpha = 0,\ \beta = 5,$$

$$Y = C_1 \cos 5x + C_1 \sin 5x.$$ - общее решение

- 8. $y'' - y' + y = 0.$

$$y'' - y' + y = 0 \Rightarrow k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$(D < 0, \quad k_{1,2} = \alpha \pm \beta i), \qquad \alpha = 1/2,\ \beta = \sqrt{3}/2,$$

$$Y = e^{x/2}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$ - общее решение