Государственное Бюджетное

Образовательное Учреждение

Лицей №1523 г.Москвы

Геометрия

8 класс

Теоретический материал

© Хомутова Лариса Юрьевна

Крайко Мария Александровна

Тема 2: Четырехугольники.

Теорема Фалеса.

Теорема Вариньона.

1. Теорема Фалеса.

Теорема Фалеса: Если параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на одной из них равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на второй прямой.

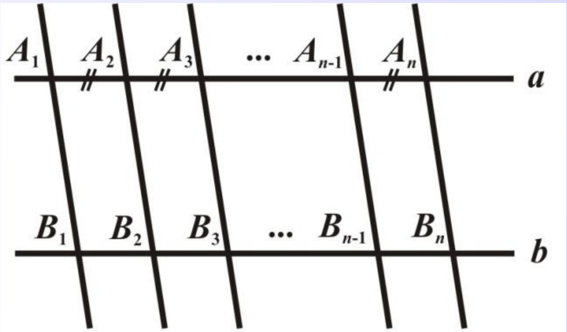

Рисунок 13а

Дано:
прямые a, b;
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n \subset a$;

$B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n \subset b$;

$A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| \dots \| A_{n-1}B_{n-1} \| A_nB_n$;

$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$.

Доказать: $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n$.

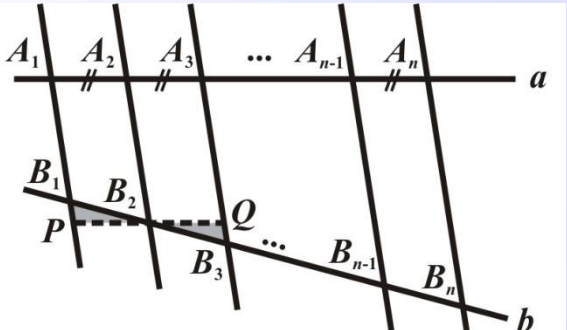

Рисунок 13б

Доказательство: Рассмотрим два случая: $a \| b$ (рисунок 13а) и $a \cap b$ (рисунок 13б):

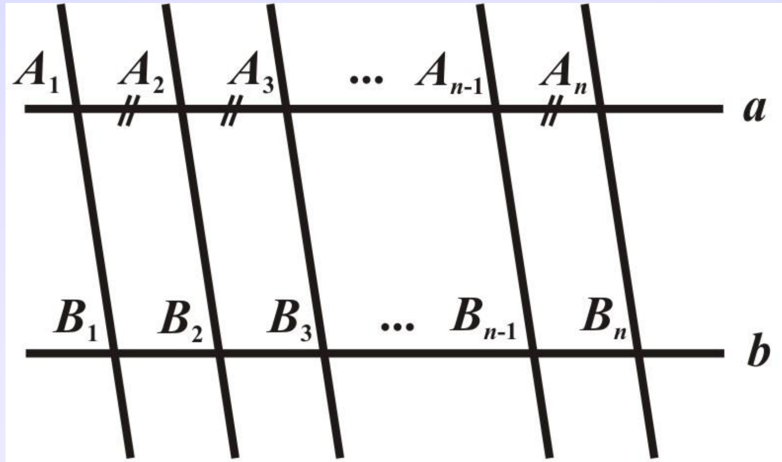

Рисунок 13а

$a \| b$:

$A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_{n\text{-}1}A_nB_nB_{n\text{-}1}$ – параллелограммы по определению, $\Rightarrow$

по свойству противоположных сторон параллелограмма

$A_1A_2=B_1B_2$, $A_2A_3=B_2B_3$, …, $A_{n\text{-}1}A_n=B_{n\text{-}1}B_n$.

Т.к. к тому же по условию $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{n\text{-}1}A_n$, то $B_1B_2=B_2B_3=\ldots=B_{n\text{-}1}B_n$.

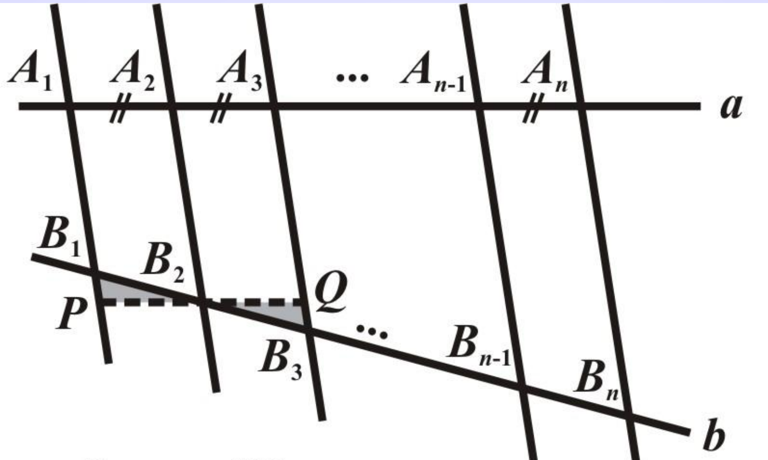

Рисунок 13б

$a \cap b$:

1) Проведем через точку B_2 прямую $PQ \parallel a$: $P \in A_1B_1$, $Q \in A_3B_3$. Тогда из п.1 $PB_2 = B_2Q$.

2) $\Delta B_1B_2P = \Delta B_3B_2Q$ по стороне и прилежащим к ней углам ($PB_2 = B_2Q$, $\angle B_1B_2P = \angle B_3B_2Q$ как вертикальные, $\angle B_1PB_2 = \angle B_3QB_2$ как внутр. н/л при $A_1B_1 \parallel A_3B_3$ и секущей PQ); $\Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3$.

Аналогично доказывается равенство остальных отрезков.

2. Средняя линия треугольника.

Средней линией треугольника (сокращенно – *ср. л.*) называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон (на рисунке 14 *MN* – средняя линия треугольника *ABC*).

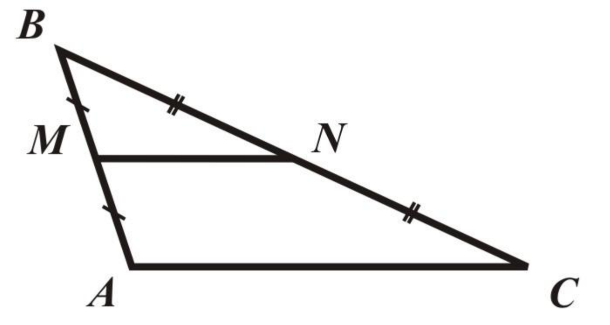

Рисунок 14

Замечание: В любом треугольнике можно провести три средние линии.

Теорема о средней линии треугольника: Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине (рисунок 15).

Дано:
ΔABC;
M – середина AB;
N – середина BC.

Доказать: $MN || AC$;

$$MN = \frac{AC}{2}$$

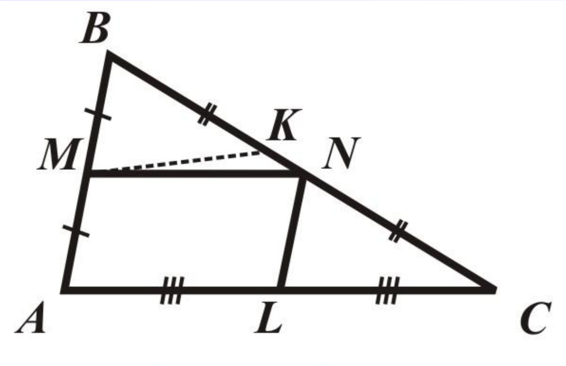

Рисунок 15

Доказательство:

1) Проведем через точку M прямую $MK || AC$: $K \in BC$. Т.к. $AM=MB$, то по т. Фалеса $BK=KC$, т.е. K – середина BC. Но по условию N – середина BC, $\Rightarrow$ точки K и N совпадают, а значит, $MN || AC$.

2) Отметим L – середину стороны AC. NL – ср. л. ΔABC, $\Rightarrow$ из п. 1 $NL || AB$. Тогда $AMNL$ - п/г по определению, $\Rightarrow$

$$MN = AL = \frac{AC}{2}$$

3. Теорема Вариньона.

<u>Теорема Вариньона:</u> Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма(рисунок16).

Дано:

$ABCD$ – четырехугольник;
M – середина AB,
N – середина BC,
K – середина CD,

L – середина AD.

Доказать: $MNKL$ – п/г.

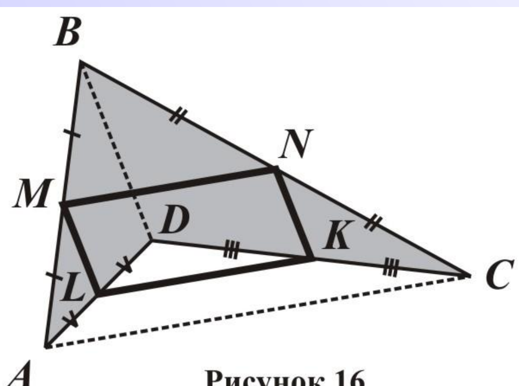

Рисунок 16

Доказательство:

1)Проведем диагонали AC и BD.

2) MN – ср. л. ΔABC, $\Rightarrow$ по теореме о средней линии треугольника $MN || AC$; LK – ср. л. ΔADC, $\Rightarrow$ по теореме о средней линии треугольника $LK || AC$. Тогда $MN || AC || LK$, $\Rightarrow MN || LK$.

3)ML – ср. л. ΔABD, $\Rightarrow$ по теореме о средней линии треугольника $ML || BD$; NK – ср. л. ΔBDC, $\Rightarrow$ по теореме о средней линии треугольника $NK || BD$. Тогда $ML || BD || NK$, $\Rightarrow ML || NK$.
$MN || LK$, $ML || NK$, $\Rightarrow MNKL$ - п/г по определению.