Динамика механической системы

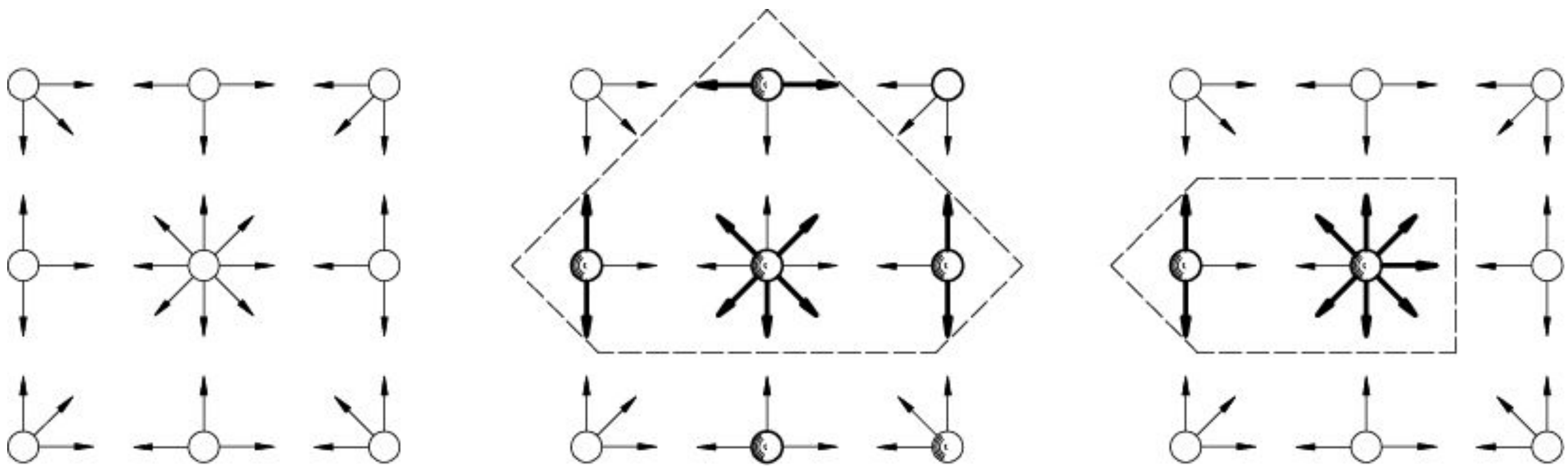
Механической системой называется такая совокупность материальных точек или тел,
в которой положение или движение каждой точки (или тела)
зависит от положения и движения всех остальных

Силы, действующие на точки
или тела системы,
разделяются,
на ***внешние***
и
внутренние

Свойства внутренних сил
(на основании 3-го закона динамики):

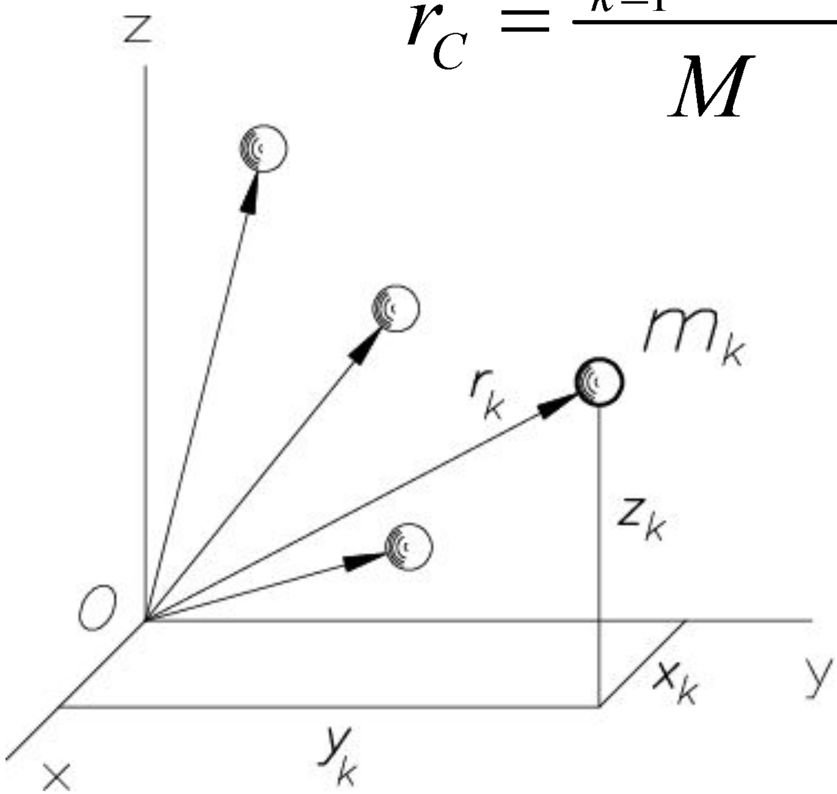
1. *Геометрическая сумма (**главный вектор**) всех внутренних сил системы равняется нулю.*

2. *Сумма моментов (**главный момент**) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю*

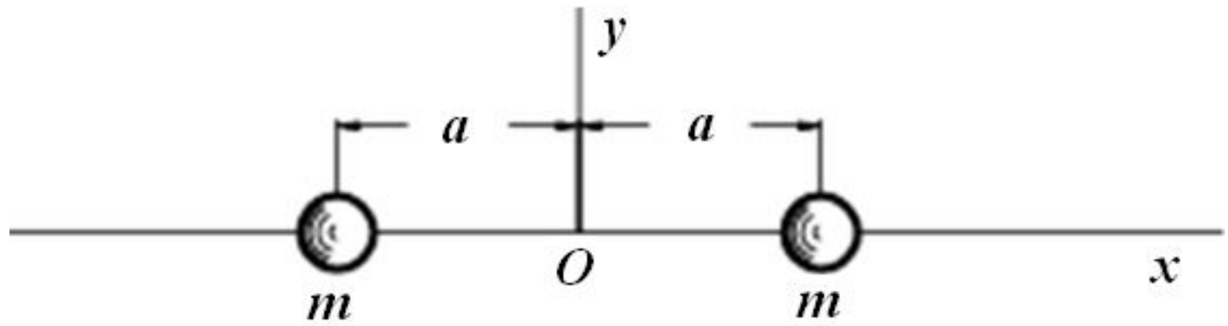


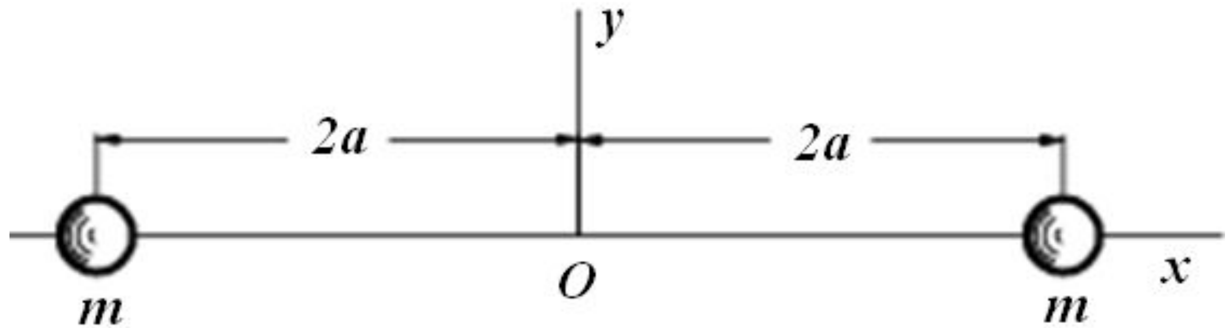
Центр масс системы

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k}{M}. \quad M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$



$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_k x_k}{M}; \\ y_C &= \frac{\sum m_k y_k}{M}; \\ z_C &= \frac{\sum m_k z_k}{M}. \end{aligned}\right\}$$



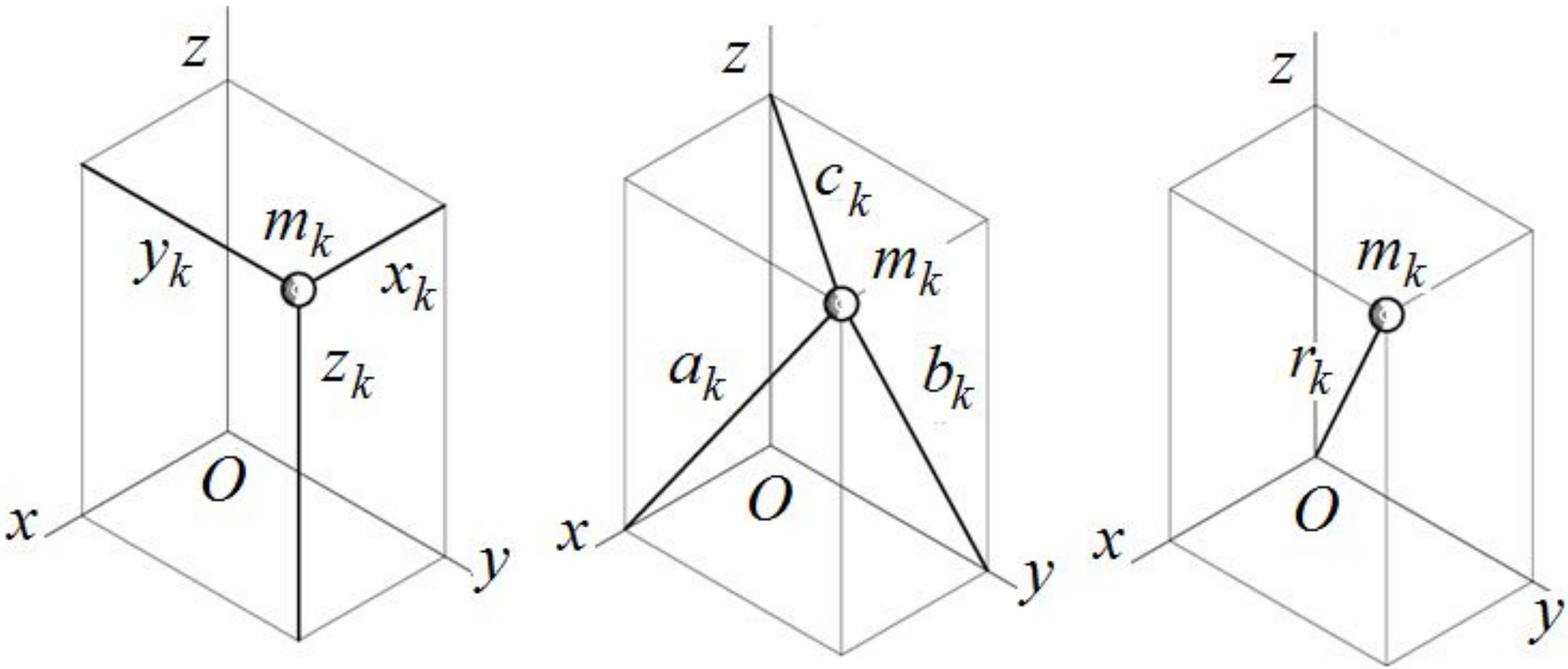


$$x_{C_1} = \sum m_k x_k / \sum m_k = (ma - ma) / 2m = 0$$

$$x_{C_2} = \sum m_k x_k / \sum m_k = (2ma - 2ma) / 2m = 0$$

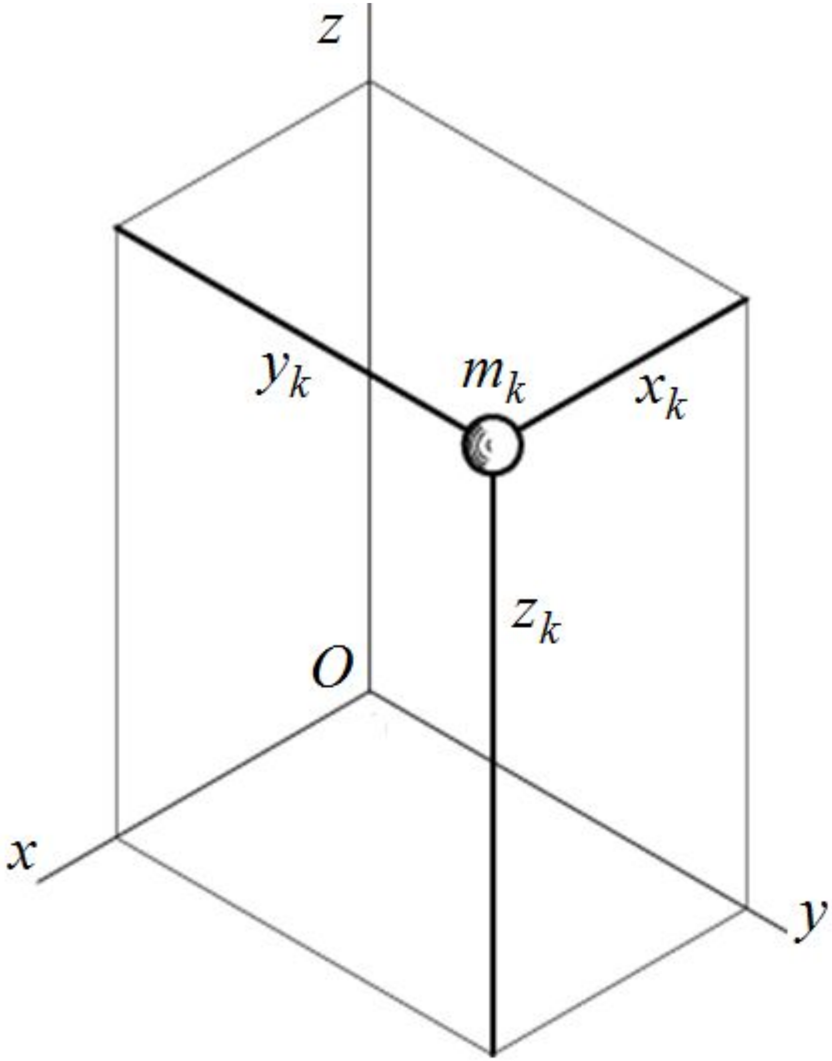
$$J_{y1} = \sum m_k x_k^2 = (ma^2 + ma^2) = 2ma^2$$

$$J_{y2} = \sum m_k x_k^2 = (m4a^2 + m4a^2) = 8ma^2$$



z
m_k
y_k
x_k
z_k
O
x
y
z
c_k
m_k
a_k
b_k
O
x
y
z
m_k
r_k
O
x
y

Момент инерции твердого тела относительно координатных плоскостей:



скалярная величина,

равная сумме произведений массы каждой точки тела

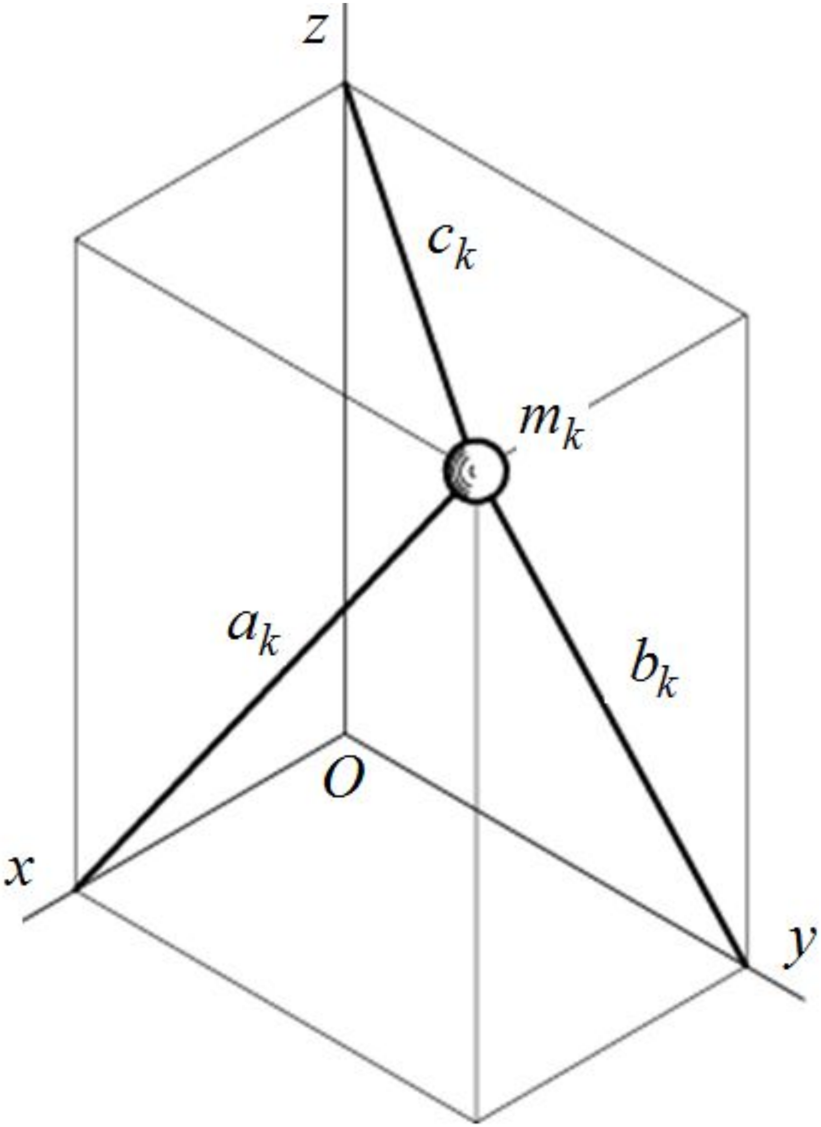
на квадрат расстояния от этой точки до плоскости

$$J_{yOz} = \sum m_k x_k^2$$

$$J_{zOx} = \sum m_k y_k^2$$

$$J_{xOy} = \sum m_k z_k^2$$

Момент инерции твердого тела относительно координатных осей:



скалярная величина,
равная сумме
произведений
массы каждой точки тела
на квадрат расстояния
от этой точки до оси

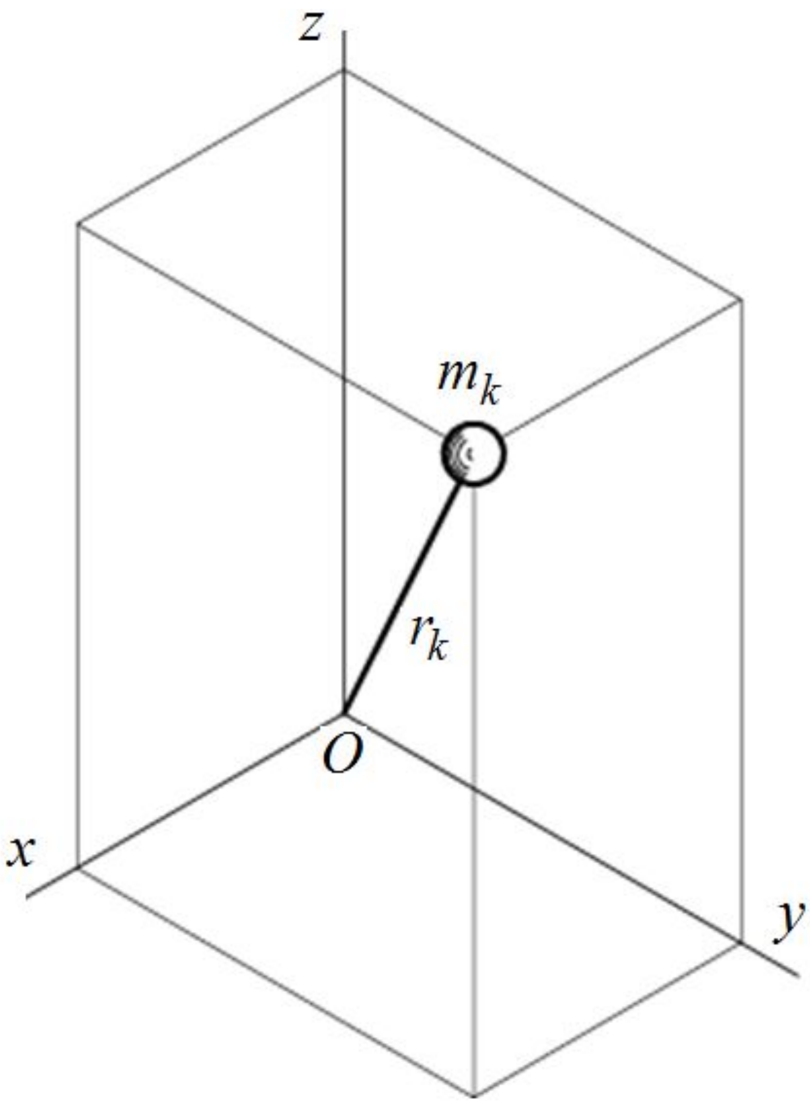
$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

$$J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2)$$

$$J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Момент инерции твердого тела

относительно полюса (полярный момент инерции):



скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от точки до этого

полюса

$$J_O = \sum m_k r_k^2$$

Зависимости между моментами инерции твердого тела

$$J_O = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = J_{yOz} + J_{yOz} + J_{xOy} \qquad (1)$$

$$J_x + J_y + J_z = 2\sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2J_O,$$

откуда $\quad J_O = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) \qquad (2)$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_{zOx} + J_{xOy}; \\ J_y &= J_{yOz} + J_{xOy}; \\ J_z &= J_{yOz} + J_{zOx}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Радиус инерции

$$J_z = m i_z^2$$

где m - масса тела;

i_z - радиус инерции тела относительно оси z.

ТЕОРЕМА О МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

(теорема Гюйгенса-Штайнера)

«Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси

*равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через его **центр масс**, сложенному с произведением*

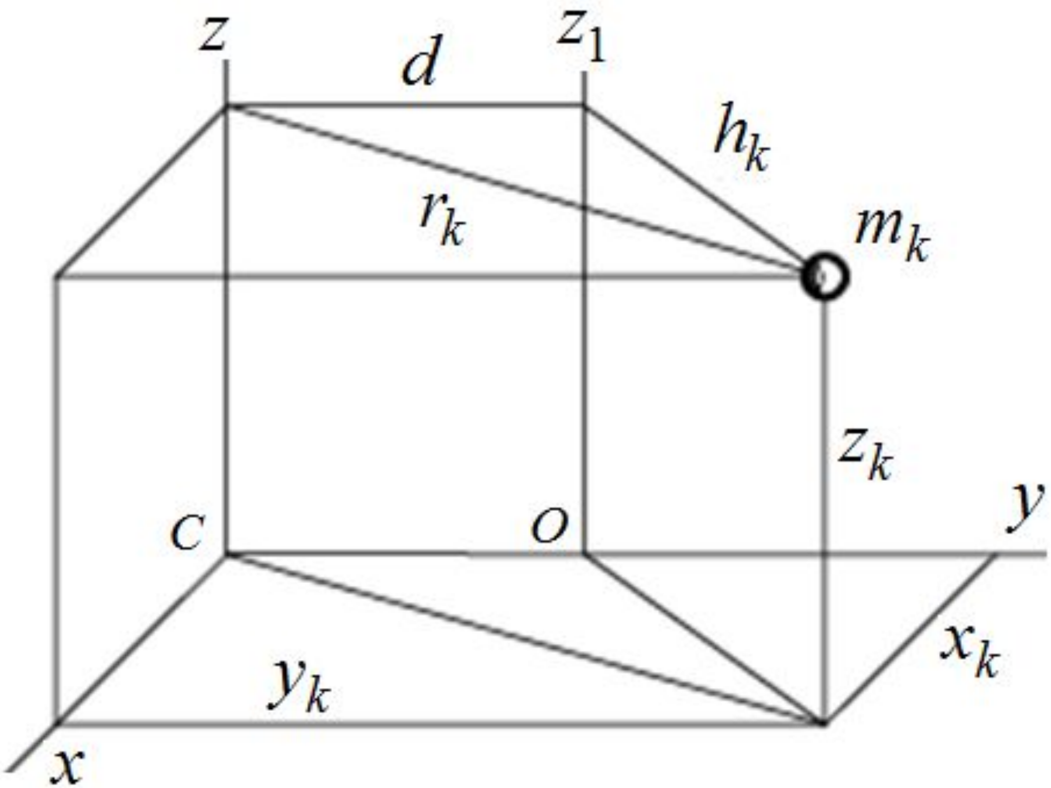
массы тела

на квадрат расстояния

между осями»

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2;\ \ h_k^2 = x_k^2 + (y_k - d)^2 = x_k^2 + y_k^2 + d^2 - 2y_k d;$$

$$J_{C_z} = \sum m_k r_k^2; \quad J_{z_1} = \sum m_k h_k^2; \quad J_{z_1} = J_{C_z} + d^2 \sum m_k - 2d \sum m_k y_k;$$



$$\sum m_k y_k = m y_C = 0;$$

$$J_{z_1} = J_{C_z} + md^2$$

Из совокупности параллельных осей, ось, проходящая через центр масс тела, характеризуется *наименьшим моментом инерции*

Так как

$$J_O = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y + J_z),$$

следовательно, ***центр масс тела является полюсом, относительно которого полярный момент инерции тела имеет наименьшее возможное значение***

Дифференциальные уравнения движения системы в векторной форме

$$\left.\begin{aligned} m_1\overline{a}_1 &= \overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n\overline{a}_n &= \overline{F}_n^e + \overline{F}_n^i. \end{aligned}\right\}$$

Теорема о движении центра масс

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i; \qquad (1) \qquad\qquad \sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C; \qquad (2)$$

$$\sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}; \qquad (3)$$

$$\sum m_k \vec{a}_k = M\vec{a}_C; \qquad (4)$$

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e; \qquad (5)$$

«Произведение **массы** системы
на **ускорение** ее центра масс
равно
геометрической сумме
всех действующих на систему **внешних** сил»

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e; \\ M\frac{d^2y_C}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e; \\ M\frac{d^2z_C}{dt^2} &= \sum F_{kz}^e. \end{aligned}\right\}$$

Закон сохранения движения центра масс

Следствие 1:

Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

Тогда

$$M\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^e = 0,$$

$$\textit{тогда} \quad \overline{a}_C = 0$$

$$\textit{или} \quad \overline{v}_C = const$$

*Если **сумма всех внешних сил**,*
действующих на систему,
***равна нулю**,*
*то **центр масс** этой системы*
*движется **с постоянной** по модулю и направлению*
скоростью,
*т.е. **равномерно и прямолинейно**.*
В частности, если вначале центр масс был в
покое, то он и останется в покое.

Действие внутренних сил
движение центра масс системы
изменить
не может

Следствие 2

Пусть сумма проекций внешних сил, действующих на систему, на какую-нибудь ось (например, ось *Ox*) равна нулю

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0; \quad \frac{dx_C}{dt} = v_{Cx} = const$$

Следовательно,

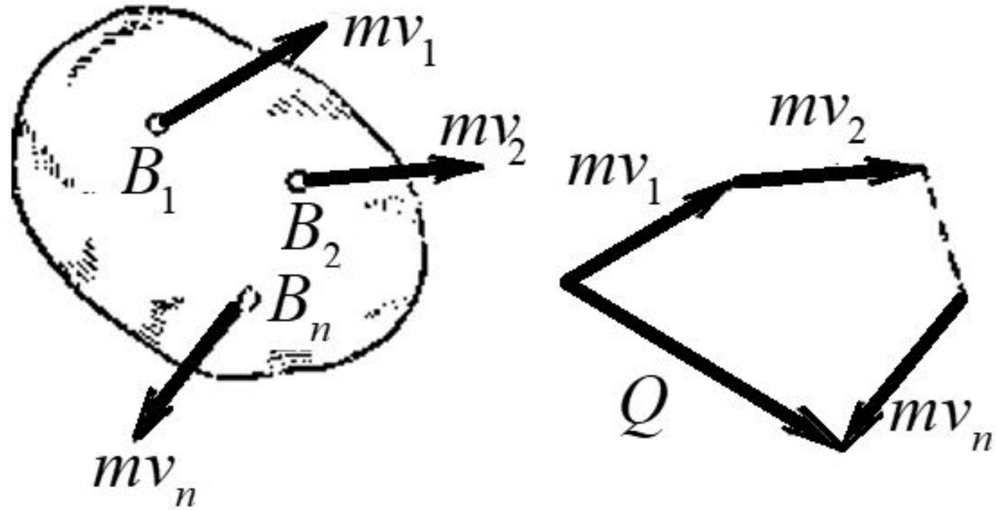
если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю,

то проекция скорости центра масс системы

на эту ось

есть величина постоянная

Количество движения системы



*Количество движения системы -векторная величина **Q**, равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы*

$$\sum m_k \overline{r}_k = M\overline{r}_C;$$

$$\sum m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} = M\frac{d\overline{r}_C}{dt};$$

$$\sum m_k \overline{v}_k = M\overline{v}_C.$$

$$\overline{Q} = M\overline{v}_C.$$

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме:

«Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил»

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i;$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{v}_k\right) = \frac{d\bar{Q}}{dt};$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e$$

В проекциях на координатные оси

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dQ_x}{dt} &= \sum F_{kx}^e; \\
\frac{dQ_y}{dt} &= \sum F_{ky}^e; \\
\frac{dQ_z}{dt} &= \sum F_{kz}^e
\end{aligned}\right\}$$

Теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме:

«Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени»

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e;$$

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \overline{F}_k^e dt;$$

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e.$$

В проекциях на координатные оси

$$\left.\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum S_{kx}^e; \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum S_{ky}^e; \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum S_{kz}^e. \end{aligned}\right\}$$

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

2) Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Эти результаты и выражают закон сохранения количества движения системы.

Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут.

Главным моментом количеств движения системы (кинетическим моментом, моментом количеств движения) относительно данного центра О называется величина **L***о, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:*

$$\bar{L}_O = \sum \bar{M}_O(m_k \bar{v}_k)$$

Кинетические моменты относительно координатных осей:

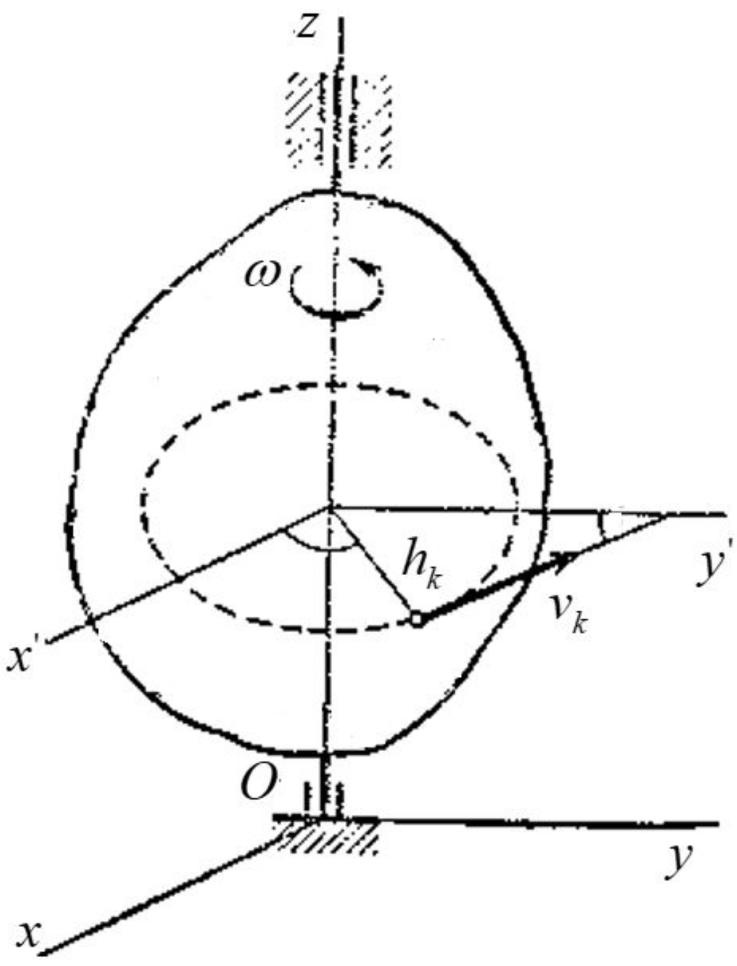
$$L_x = \sum M_x(m_k v_k);$$

$$L_y = \sum M_y(m_k v_k);$$

$$L_z = \sum M_z(m_k v_k).$$

Кинетический момент системы является характеристикой вращательного движения системы

Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси



$$L_z = \sum M_z(m_k v_k) =$$

$$= \left(\sum m_k h_k^2\right)\omega;$$

$$L_Z = J_Z \omega$$

Теорема об изменении кинетического момента системы

$$\frac{d}{dt}[\bar{M}_O(m_k\bar{v}_k)] = \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_O(\bar{F}_k^i);$$

$$\frac{d}{dt}[\sum \bar{M}_O(m_k\bar{v}_k)] = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^i);$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e).$$

«Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра»

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси, получим:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x(\bar{F}_k^e);$$

$$\frac{dL_y}{dt} = \sum M_y(\bar{F}_k^e);$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Закон сохранения кинетического момента количеств движения

1. *Если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен*

2. Если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси будет величиной постоянной

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ —

скалярная величина

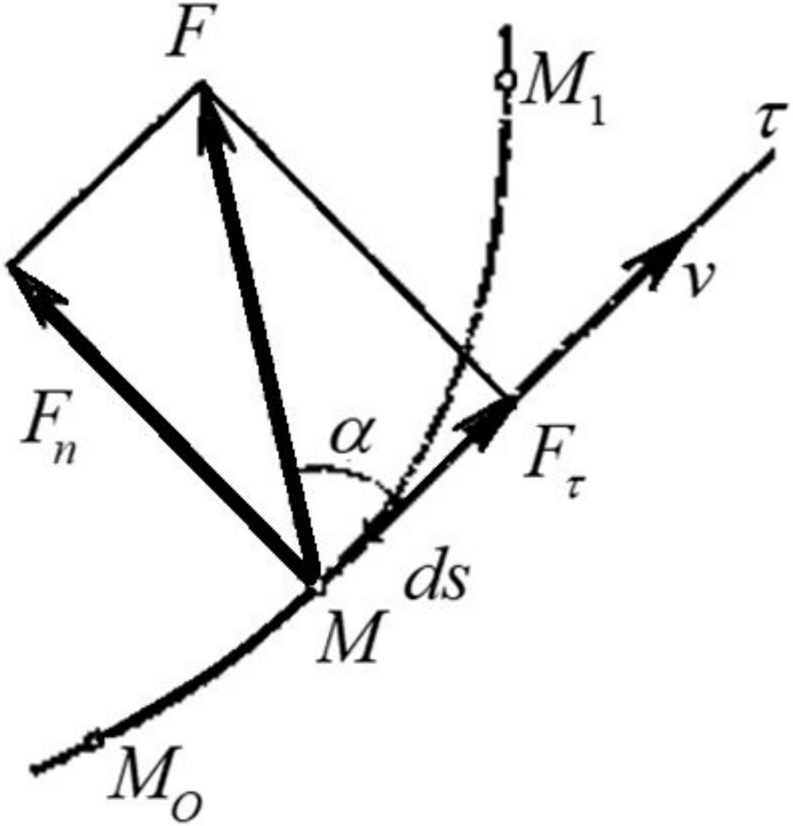
$$T = \frac{mv^2}{2},$$

равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

В системе СИ единица измерения

$$кг \cdot м^2 / сек^2 = н \cdot м = джоуль$$

Работа силы. Мощность



Элементарная работа силы ***F*** называется скалярная величина

$$dA = F_\tau ds =$$

$$= F\cos\alpha \cdot ds =$$

$$= \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

Элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения

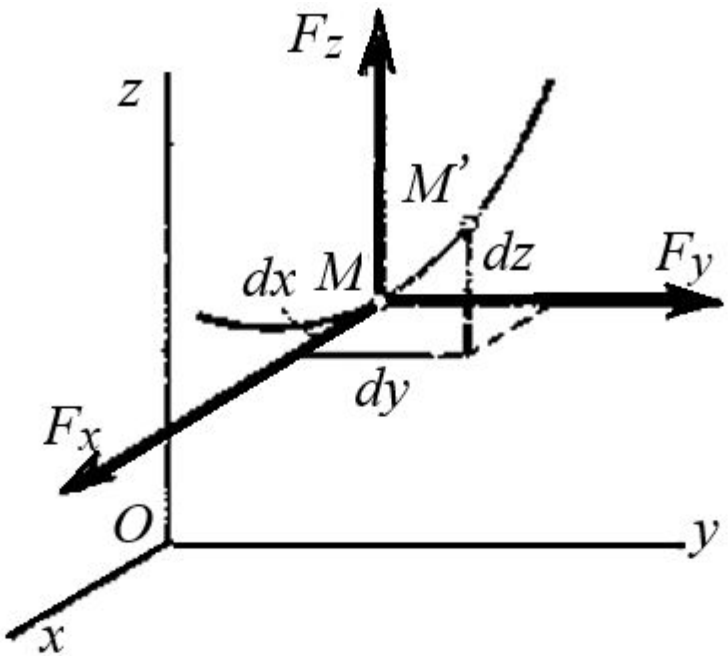
Если угол **α острый**, то работа **положительна**.

Если угол **α** **тупой**, то работа **отрицательна**.

Если угол **$\alpha=90^0$**,
т.е. если сила направлена перпендикулярно
перемещению,
то элементарная работа силы **равна нулю**

Аналитическое выражение элементарной работы

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = (F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}) \cdot (dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k})$$



Так как $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{i} \cdot \overline{k} = \overline{j} \cdot \overline{k} = 0$,

а $\overline{i} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k} = 1$,

то $\quad dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Работа силы на любом конечном перемещении вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ
и будет равна:

$$A_{(M_0 M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

***Работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу
от элементарной работы***

Единицей измерения работы в системе СИ является *джоуль*
(1 дж=1Нм)

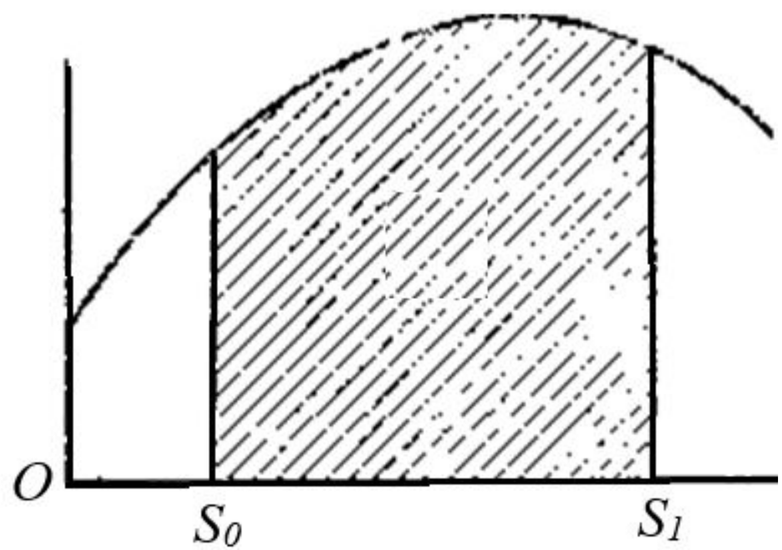
ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАБОТЫ

Графический способ вычисления работы

Если сила зависит от расстояния S

и известен график зависимости F_τ от S

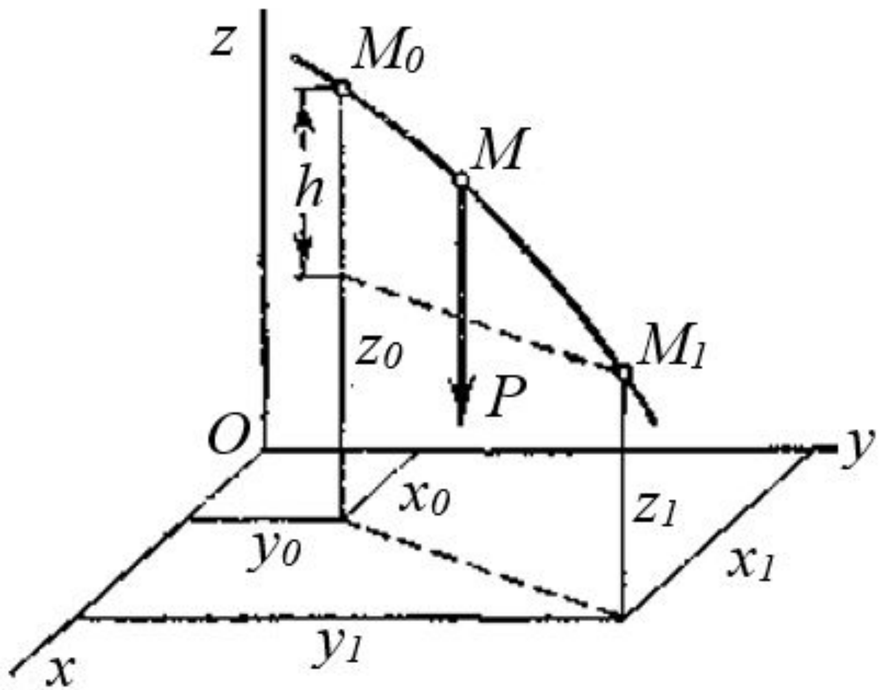
то работу силы ***F*** можно вычислить графически



Работа силы тяжести

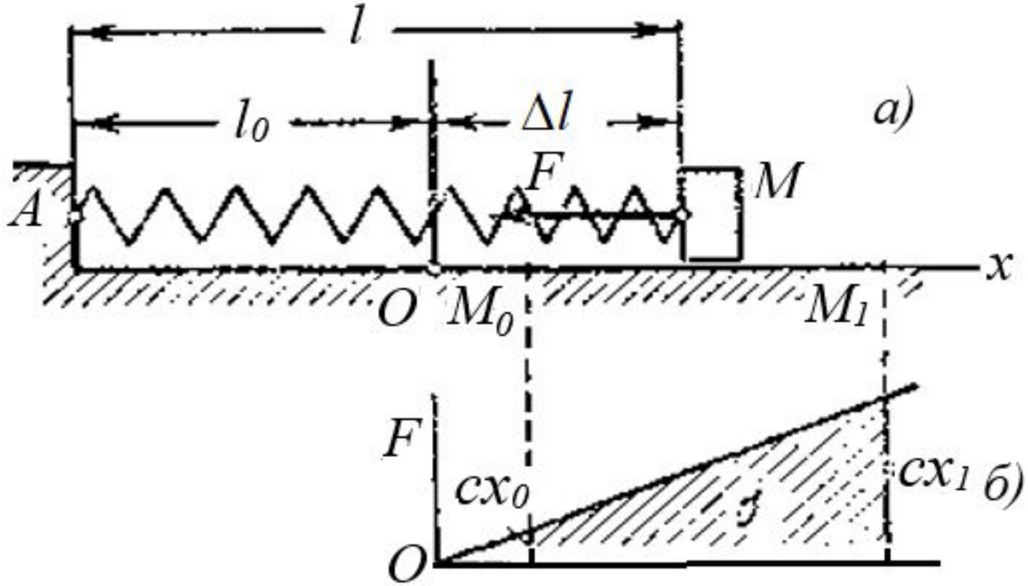
$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} (-P)dz = -P\int\limits_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1) = Ph.$$

$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$$



Работа силы тяжести не зависит
от вида той траектории,
по которой перемещается точка ее
приложения.
Силы, обладающие таким свойством,
называются ***потенциальными***

Работа силы упругости



$$F = c\left|\Delta l\right| = c\left|x\right|$$

$$A = \int_0^x -cx\,dx = -c\int_0^x x\,dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2)$$

Работа силы упругости равна
половине произведения коэффициента жесткости
на разность квадратов
начального и конечного удлинений (или сжатии)
пружины

Работа силы трения

$$A_{тр(M_0M_1)} = -\int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F \quad \cdot ds = -\int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} f \cdot N \cdot ds$$

Работа силы трения при скольжении
всегда отрицательна.
Величина этой работы зависит от длины дуги M_0M_1 ,
следовательно,
сила трения является
силой ***непотенциальной***

Мощность

Мощность - величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$W = {dA}/{dt} = {F_\tau ds}/{dt} = F_\tau v$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является *ватт* (1*вт*=1 *дж/сек*), а в системе МкГС—1 *кГм/сек*. В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 *кГм/сек* или 736 *вт*.

Теорема
об изменении кинетической энергии точки

$$ma_\tau = \sum F_{i\tau}$$

$$a_\tau = {dv}/{dt} = {dv}/{ds} \cdot {ds}/{dt} = {dv}/{ds} \cdot v$$

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{i\tau}; \quad mvdv = \sum F_{i\tau} \cdot ds;$$

$$d(\frac{mv^2}{2}) = \sum F_{i\tau} \cdot ds$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}$$

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении
равно алгебраической сумме работ
всех действующих на точку сил
на том же перемещении

Кинетическая энергия системы –
скалярная величина E,
равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы

$$E = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

Поступательное движение

$$E_{пост} = \sum \frac{m_i v_C^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) v_C^2 = \frac{1}{2} M v_C^2$$

Кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс

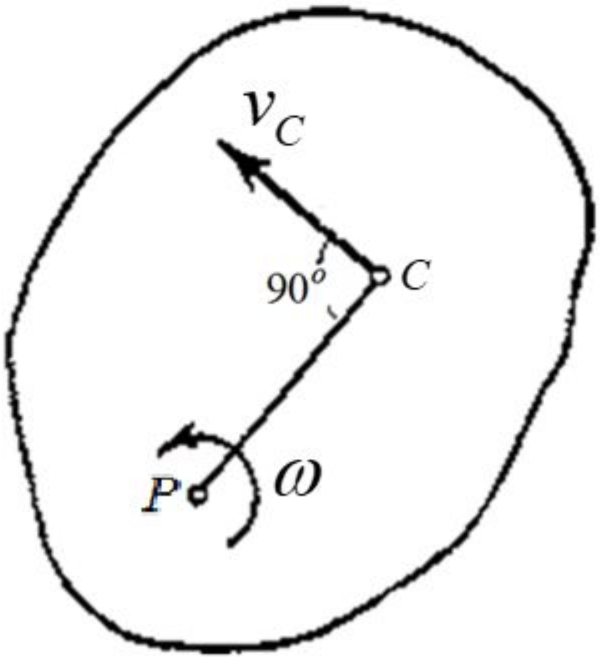
Вращательное движение

$$E_{вр} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (h_i \omega)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum m_i h_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости

Плоскопараллельное движение



$$E_{плоск} = \frac{1}{2} J_P \omega^2 = \frac{1}{2}(J_C + Md^2)\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M(\omega d)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2$$

Кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс

Некоторые случаи вычисления работы

Работа сил тяжести,
действующих на систему,
вычисляется как работа их равнодействующей G
на перемещении центра тяжести
(или центра масс) системы

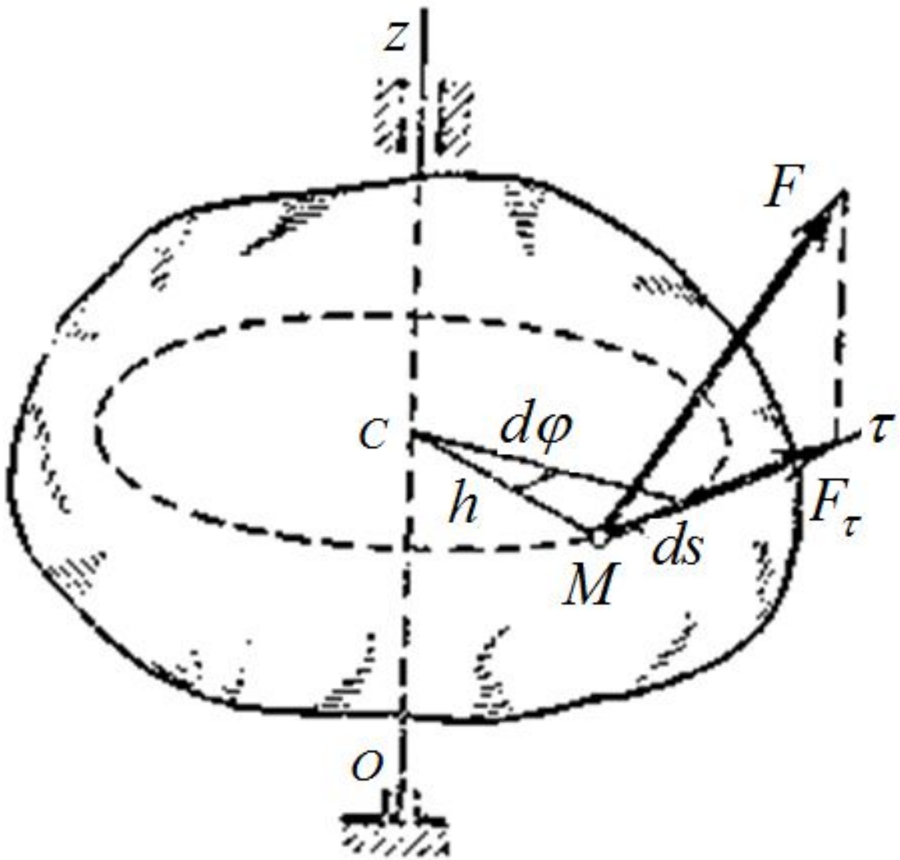
Работа сил, приложенных к вращающемуся телу

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi;$$

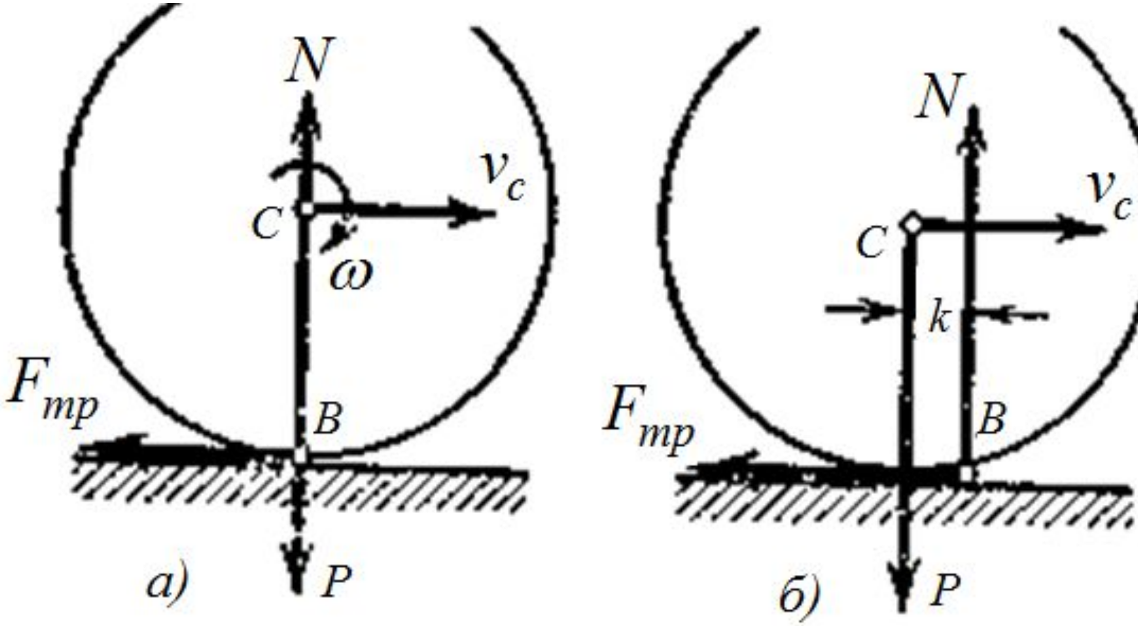
При повороте на конечный угол $A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi.$

В случае постоянного момента $(M_z = \text{const})$ $A = M_z \varphi_1.$

Мощность $W = \dfrac{dA}{dt} = M_z \dfrac{d\varphi}{dt} = M_z \omega.$



Работа сил трения, действующих на катящееся тело



При качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела ***равна нулю.***

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей

$$A^{кач} = -kN\varphi_1 = -\frac{k}{R}Ns_C.$$

Теорема об изменении

кинетической энергии системы

Для каждой из точек системы $d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dA_i^e + dA_i^j;$

Складывая почленно, получим

$$d\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum dA_i^e + \sum dA_i^j \qquad = \sum {}_i^e + \sum {}_i^j .$$

Проинтегрировав обе части этого равенства

в пределах, соответствующих перемещению

системы из некоторого начального положения

$$E_1 - E_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j .$$

Изменение
кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ
на этом перемещении
всех приложенных к системе
внешних
и
внутренних сил

Принцип Даламбера:

«Если к заданным (активным) силам, действующим на точку, и реакциям наложенных связей

присоединить силу инерции,

то получится уравновешенная система сил»

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N}; \quad \bar{P} + \bar{N} - m\bar{a} = 0; \qquad -m\bar{a} = \bar{\Phi};$$

$$\bar{P}_i + \bar{N}_i + \bar{\Phi}_i = 0$$