Решение логарифмических неравенств

(Рекомендации по выполнению задания С3)

При решении логарифмических неравенств можно использовать условия равносильности. Преимущество использования условий равносильности по сравнению с обычным способом решения состоит в том, что не надо думать о том, большим или меньшим единицы является основание. Это особенно важно при решении заданий ЕГЭ, когда время для их решения ограничено.

Для неравенств вида

$\log_a f(x) > 0\ (< 0)$;

$\log_a f(x) \geq 0\ (\leq 0)$

существует

<u>Правило 1</u>: ***Знак*** $\log_a f(x)$ ***совпадает со знаком произведения***

$(a-1)(f(x)-1)$ ***в ОДЗ.***

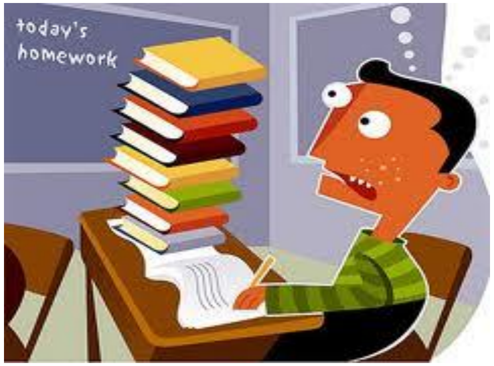
Используя это правило, можно записать условие равносильности, включающее ОДЗ

- ***для строгих** логарифмических неравенств:*

$$\log_a f(x) > 0(< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-1) > 0(< 0). \end{cases}$$

- ***для нестрогих*** *логарифмических неравенств:*

$$\log_a f(x) \le 0\ (\ge 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-1) \le 0(\ge 0). \end{cases}$$



Для логарифмических неравенств вида **$\log_a f(x) > \log_a g(x)$** *и более сложных существует*

<u>Правило 2</u>. *Знак разности* $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ ***совпадает со знаком произведения*** $(a-1)(f(x)-g(x))$ ***в ОДЗ.***

Используя <u>Правило 2</u>, можно записать условие равносильности, включающее ОДЗ для неравенств вида:

$$\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x) - g(x)) > 0 (< 0). \end{cases}$$

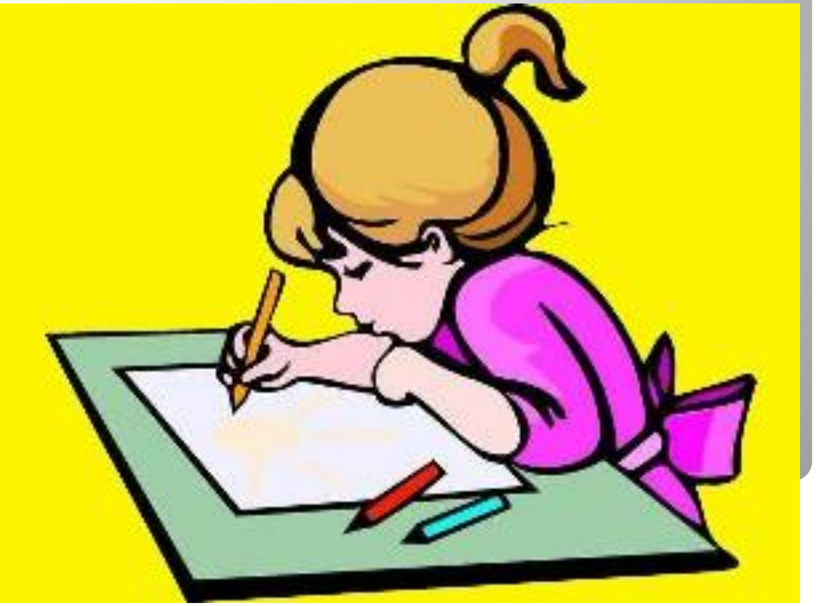
Также можно очень просто решить более сложные неравенства, используя <u>Правило 2</u>, например:

$$\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{h(x)} \geq 0(\leq 0) \Leftrightarrow \frac{(a-1)(f(x)-g(x))}{h(x)}) \geq 0(\leq 0)$$

в ОДЗ.

Очень важно, что освобождение от всех логарифмов происходит за один шаг. Использование данных правил сводит решение логарифмических неравенств к рациональным (дробно-рациональным) неравенствам, которые решаются методом интервалов.

Рассмотрим применение Правила 1 на примере.



Решим логарифмическое неравенство:

$$\frac{\log_3\left(x+\frac{4}{5}\right)}{\log_7\left(x^2-2x+\frac{7}{16}\right)}<0$$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+\dfrac{4}{5}>0, \\ x^2-2x+\dfrac{7}{16}>0; \end{cases} \begin{cases} x>-\dfrac{4}{5}, \\ (x-\dfrac{7}{4})(x-\dfrac{1}{4})>0; \end{cases} \begin{cases} x>-\dfrac{4}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{1}{4}, \\ x>\dfrac{7}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Применяя метод интервалов, найдем общее решение данной системы:

$$(-\frac{4}{5};\frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4};\infty)$$

По Правилу 1

знак $\log_3(x+\frac{4}{5})$

совпадает со знаком произведения $(3-1)(x+\frac{4}{5}-1)$

а знак $\log_7(x^2-2x+\frac{7}{16})$

со знаком $(7-1)(x^2-2x+\frac{7}{16}-1)$

Поэтому в ОДЗ имеем:

$$\frac{\log_3(x+\frac{4}{5})}{\log_7(x^2-2x+\frac{7}{16})}<0 \qquad \frac{(3-1)(x+\frac{4}{5}-1)}{(7-1)(x^2-2x+\frac{7}{16}-1)}<0;$$

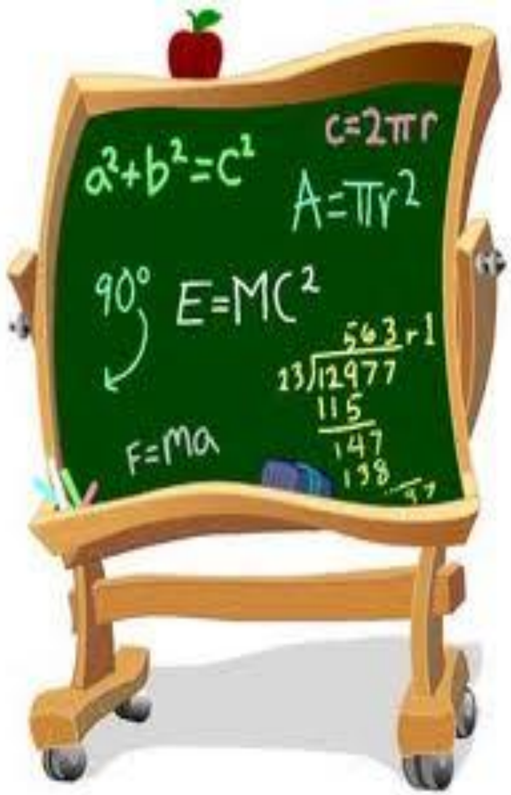
$$\frac{x-\frac{1}{5}}{x^2-2x-\frac{9}{16}}<0; \frac{x-\frac{1}{5}}{(x+\frac{1}{4})(x-\frac{9}{4})}<0$$

Применяя метод интервалов, получим решение данного неравенства:

$$(\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{5}; \frac{9}{4})$$

Найдем общее решение исходного неравенства с учетом ОДЗ.

<u>Ответ:</u> $$(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{5}; \frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4}; \frac{9}{4})$$



Таким образом, использование данных правил, позволяет просто справиться с логарифмическими неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

Спасибо за внимание!