Презентация по Математическому Анализу

Лекция 16

Тройные интегралы

Определение тройного интеграла.

Рассмотрим тело, занимающее пространственную область ***T***, и предположим, что плотность распределения массы в этом теле является непрерывной функцией координат точек тела

$$\delta = \delta(x, y, z)$$

Разобьем тело произвольным образом на ***n*** частей. Объемы этих частей обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Выберем затем в каждой части по произвольной точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна ее значению в точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$ получим приближенное выражение для массы всего тела в виде суммы

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Предел этой суммы при условии, что и каждое частичное тело стягивается в точку, то есть ее диаметр стремится к 0 и даст массу ***M*** тела

$$M_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_T \delta(x, y, z) dV \quad (*)$$

Сумма (*) называется интегральной суммой, а ее предел – тройным интегралом от функции $\delta = \delta(x, y, z)$ по пространственной области ***T*.**

К вычислению тройного интеграла приводят и другие задачи, поэтому в дальнейшем будем рассматривать тройной интеграл

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i = \iiint_T f(x,y,z)dV$$

, где *f(x,y,z)* – любая функция, непрерывная в замкнутой

ограниченной области ***T***, имеющей объем ***V***. Обычно эта область ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями.

Терминология для тройных интегралов совпадает с соответствующей терминологией для двойных интегралов. Свойства двойных интегралов полностью переносятся на тройные интегралы. Отметим, что если подынтегральная функция *f(x,y,z)=1*, то тройной интеграл выражает объем **V** области ***T***:

$$\iiint_T dV = V$$

Свойства 5 и 6 формулируются так:

5′. Значение тройного интеграла заключено между произведениями наименьшего ***(m)*** и наибольшего ***(M)*** значений подынтегральной функции в области ***T*** на объем области интегрирования.

$$mV \le \iiint_T f(x,y,z)dV \le MV$$

, где *V* объем области *T.*

6′. Тройной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на объем области интегрирования, то есть

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = f(\alpha,\beta,\gamma)\cdot V$$

Вычисление тройных интегралов.

1) *Декартовы прямоугольные координаты*

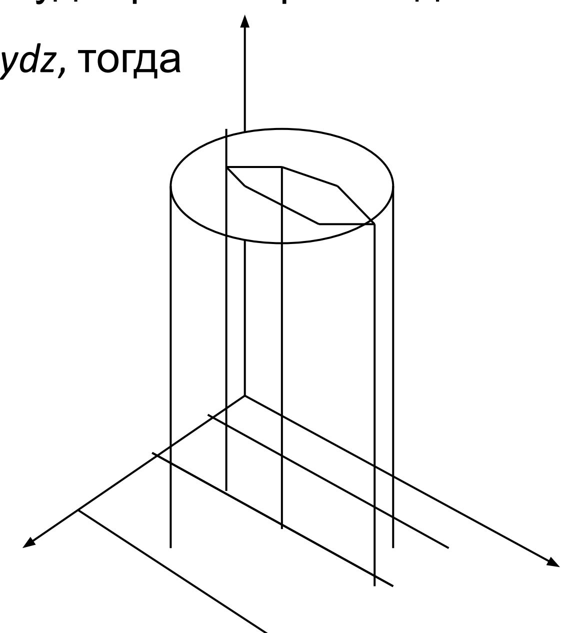
Пусть дан тройной интеграл от функции *f(x,y,z)* .

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV$$

Область *T* отнесена к системе декартовых координат *OXYZ.*

Разобьем область интегрирования ***T*** плоскостями параллельными координатным плоскостям. Тогда частичные области будут параллелепипеды с гранями параллельными *OXY,OXZ,OYZ*. Элемент объема будет равен произведению дифференциалов переменных интегрирования *dV=dxdydz*, тогда

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz$$



Правило вычисления такого интеграла следующее.

Считаем, что область интегрирования имеет вид

Опишем около ***T*** цилиндрическую поверхность с образующей, перпендикулярной к плоскости ***OXУ***.

Она касается области ***T*** вдоль некоторой линии ***L***, которая делит поверхность, ограничивающую область на две части, верхнюю и нижнюю.

Уравнение нижней части $z = z_1(x, y)$

Уравнение верхней части $z = z_2(x, y)$

Построенная цилиндрическая поверхность высекает из плоскости ***OXУ*** область ***D***, которая является ортогональной проекцией пространственной области ***T*** на плоскость ***OXУ***, при этом ***L*** проецируется в границу области.

Сначала интегрируем по направлению оси Z.

Для этого функция ***f(x ,y , z)*** интегрируется по заключенному в ***T*** отрезку прямой (α, β)

параллельной оси ***OZ*** и проходящей через некоторую точку ***P(x, y)*** области ***D***.

При данных ***x и y*** переменная z будет изменяться от $z = z_1(x, y)$

аппликаты точки входа (α) до аппликаты точки выхода (β) прямой из области Т.

Результат интегрирования представляет собой величину, зависящую от точки ***P(x, y)*** , обозначим через ***F(x, y).*** Тогда

$$F(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

При интегрировании ***x, y*** рассматриваются как постоянные величины.

Получим значение искомого тройного интеграла, если возьмем интеграл от функции ***F(x ,y)*** при условии, что точка ***P(x , y)*** изменяется по области **D**, то есть если вычислим двойной интеграл:

$$\iint_D F(x,y)dxdy$$

Таким образом, тройной интеграл может быть представлен в виде

$$I=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

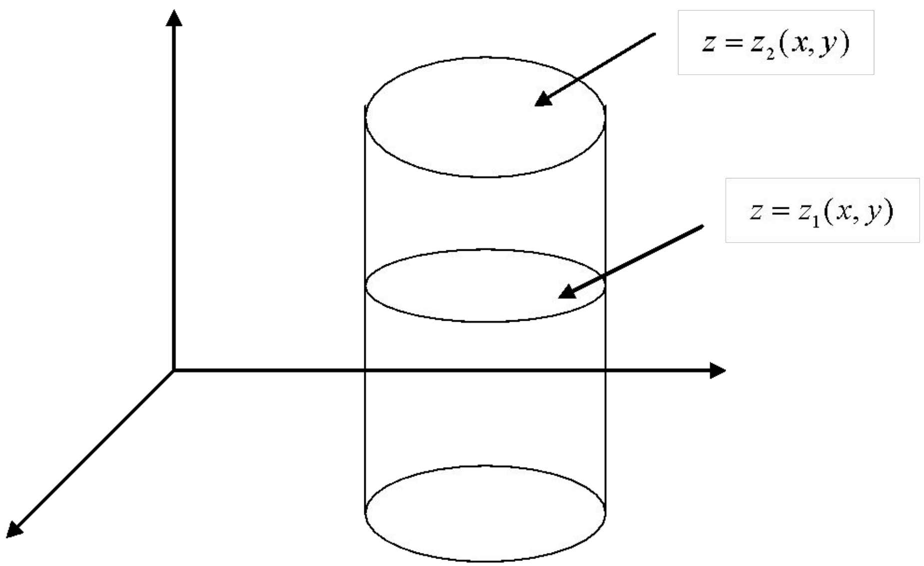
Приводя далее двойной интеграл по области ***D*** к повторному и интегрируя сначала по ***y***, а затем по ***x***, получим

$$I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \quad (\times)$$

где $y_1(x), y_2(x)$ - ординаты точек входа в область ***D*** и выхода из нее прямой *x= const* (в плоскости ***OXY***); ***a ,b*** – абсциссы конечных точек интервала оси ***OX***, на который проецируется область D.

Таким образом, вычисление тройного интеграла по области Т производится посредством трех последовательных интегрирований.

Формула (×) сохраняется и для областей, имеющих цилиндрическую форму, то есть ограниченных цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси **OZ**, а снизу и сверху поверхностями, уравнения которых соответственно $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$

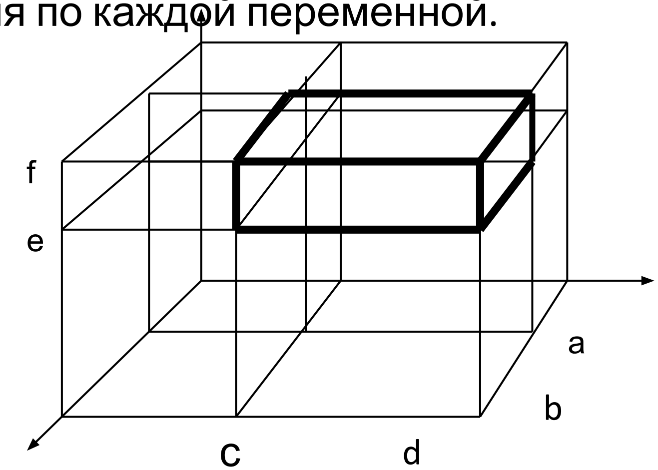


Если областью интегрирования служит внутренняя часть параллелепипеда с гранями параллельными координатным плоскостям, то пределы интегрирования постоянные во всех трех интегралах

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^f f(x,y,z)dz$$

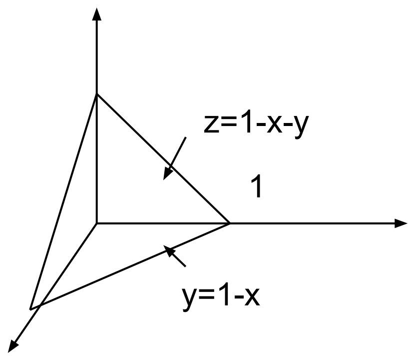
В этом случае интегрирование можно проводить в любом порядке, пределы интегрирования при этом будут сохраняться.

Замечание Если в общем случае менять порядок интегрирования (например интегрировать сначала по направлению оси OY, а затем по области плоскости OXZ), то это приводит к изменению порядка интегрирования в тройном интеграле и к изменению пределов интегрирования по каждой переменной.



<u>Пример</u>. Вычислить $I = \iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz$

где Т – область, ограниченная координатными плоскостями *x=0, y=0, z=0* и плоскостью *x + y + z =1*



<u>Решение</u>. Интегрирование по *z* совершается от *z=0 до z=1-x-y.*

Обозначая за **D** - проекцию области **Т** на плоскость **ОХУ**, получим

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+x)dz = \iint\limits_D [(x+y)z + \frac{z^2}{2}]\Big|_0^{1-x-y} dxdy = \iint\limits_D [(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2}]dxdy$$

Расставим пределы интегрирования по области – треугольнику, стороны которого: *x=0, y=0, x + y =1*

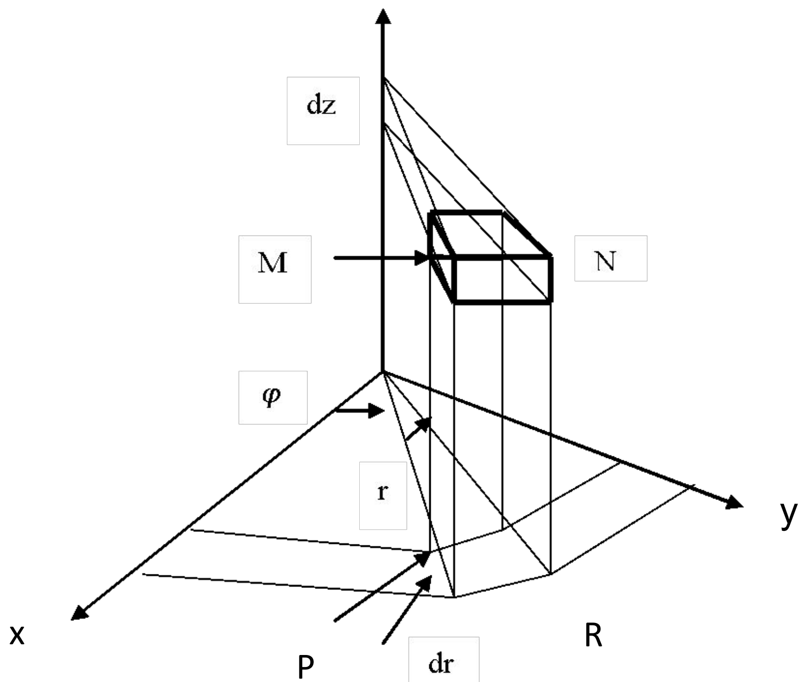
$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy[(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2}] = \int\limits_0^1 dx[\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6}]\Big|_0^{1-x} =$$

$$\int\limits_0^1 [\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6}]dx = \frac{1}{8}$$

2. Цилиндрические координаты

Отнесем область ***T*** к системе цилиндрических координат (r,φ,z), в которой положение точки М в пространстве определяется полярными координатами (r,φ) ее проекции ***P*** на плоскости ***OXY*** и ее аппликатой ***z***.

Выберем взаимное расположение осей координат как указано на следующем рисунке



Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки следующая:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z \quad (*)$$

Разбиваем область T на частичные области Vi тремя системами координатных поверхностей: $z = const, \varphi = const, z = const$

которыми будут соответственно круговые цилиндрические поверхности, осью которых является ось ***OZ***, полуплоскости, проходящие через ось ***OZ***, и плоскости параллельные ***ОХУ***.

Частичные области *Vi* - прямые цилиндры **MN**. Так как объем цилиндра **MN** равен площади основания, умноженной на высоту, то для элемента объема получаем выражение

$$dV = rdrd\varphi dz$$

Преобразование тройного интеграла $\iiint_T f(x, y, z)dV$ к цилиндрическим координатам производится совершенно аналогично преобразованию двойного интеграла к полярным координатам.

Для этого нужно в выражении подынтегральной функции *f(x, y, z)* переменные ***x, y, z*** заменить по формулам (*).

Элемент объема положить равным $dV = rdrd\varphi dz$ и вычислить T^* интеграл по области , построенной во вспомогательной декартовой системе $O_1 r\varphi z$ координат

Получаем

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iiint_{T^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$$

В обычно встречающихся случаях область T^* можно не строить и расставлять пределы интегрирования прямо по виду области ***T***.

Внутренне интегрирование производится по переменной ***z***; при этом уравнения поверхностей, ограничивающих область ***T***, должны быть записаны в цилиндрических координатах.

Если рассмотреть в качестве области интегрирования внутреннюю часть прямого цилиндра $r \le R, 0 \le z \le h$, то все пределы интегрирования постоянны

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^h f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz$$

Интеграл не меняется при перемене порядка интегрирования.

Приме
р

Вычислить интеграл $\iiint\limits_T z\,dV$, где область **T** ограничена снизу параболоидом $z = x^2 + y^2$

а сверху сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Уравнения этих поверхностей в цилиндрических координатах соответственно $z = r^2$

- параболоид; $r^2 + z^2 = 6$ - сфера

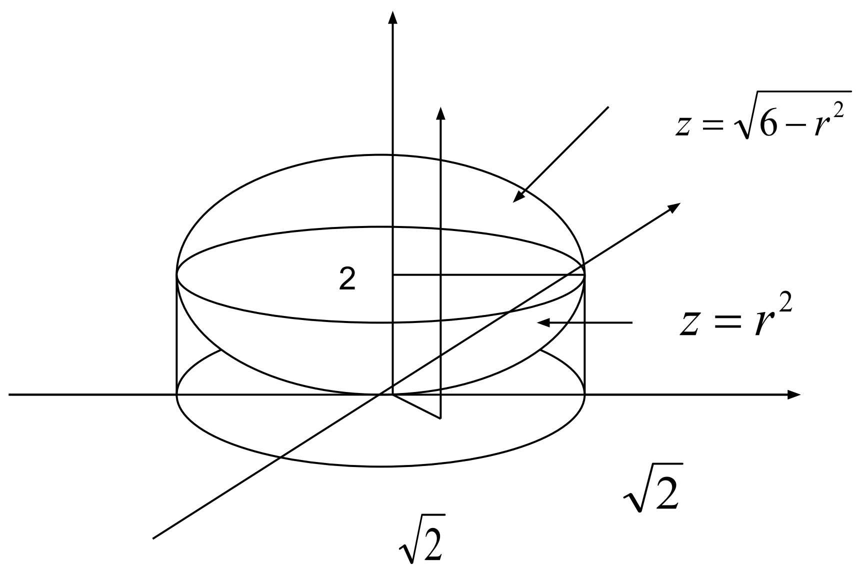
Линия их пересечения – окружность, лежащая в плоскости *z=2*; ее радиус равен $\sqrt{2}$

Эти значения получаются при решении системы уравнений

$$\begin{cases} z = r^2 \\ z^2 + r^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow z^2 + z = 6 \Rightarrow z^2 + z = 6 = 0 \Rightarrow z = 2; z = -3; r = \sqrt{2}$$

Решени
е

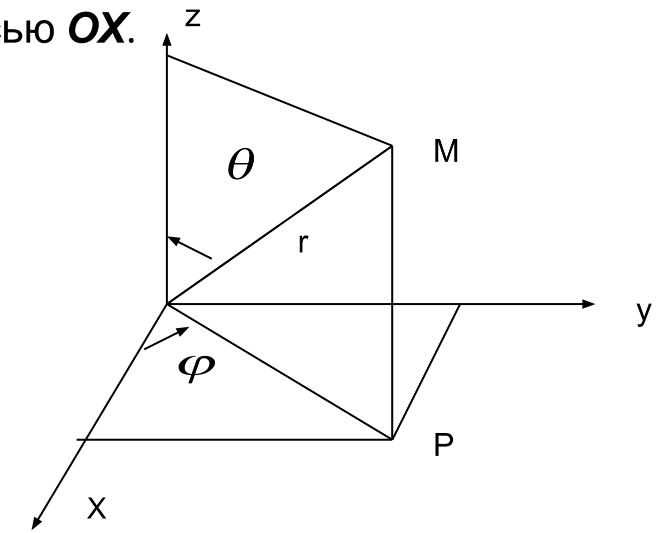
$$\iiint_T z\,dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}}\, r\,dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (6 - r^2 - r^4)\,r\,dr = \frac{11}{3}\pi$$



3. Сферические координаты

Отнесем область интегрирования ***T*** к сферическим координатам (r, φ, θ)

В этой системе координат положение точки ***M*** пространства определяется ее расстоянием *r* от начала координат (длина радиус-вектора точки), углом θ между радиус-вектором точки и осью ***OZ*** и углом φ между проекцией радиус-вектора точки на плоскость ***OXУ*** и осью ***OX***.



Установим связь между декартовыми и сферическими координатами. Из рисунка имеем

$$z = MP = r\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = r\cos\theta; OP = r\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = r\sin\theta; x = OP\cos\varphi; y = OP\sin\varphi$$

<u>Окончательно</u>

$$x = r\sin\theta\cos\varphi; y = r\sin\theta\sin\varphi; z = r\cos\varphi \qquad (*)$$

Разобьем область *T* на частичные области V_i тремя системами координатных поверхностей:

$$z = const, \varphi = const, \theta = const$$

которыми будут соответственно сферы с центром в начале координат, полуплоскости, проходящие через ось ***OZ***, и конусы с вершиной в начале координат и с осями, совпадающими с одной из полуосей ***OZ*** (см. рисунок).

Частичными областями V_i служат *«шестигранники».* Отбросив бесконечно малые высших порядков, будем рассматривать шестигранник **MN** как прямоугольный параллелепипед с измерениями равными: **dz** – по направлению полярного радиуса; $rd\varphi$ - по направлению радиана; $r\sin\varphi d\varphi$ - по направлению параллели.

Для элемента объема получаем выражение

$$dV = r^2 \sin\theta \cdot dz \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

Заменив в тройном интеграле **x, y, z** по формулам (*) и взяв элемент объема равным (**), перейдя к области T^* получаем

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \iiint f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta$$

Особенно удобно применение сферических координат в случае, когда область интегрирования ***T*** – шар с центром в начале координат или шаровое кольцо.

Например, в последнем случае, если радиус внутреннего шара ***R1***, а внешнего ***R2***. пределы интегрирования следует расставить так

$$\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{R1}^{R2}f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2dr$$

если *T* – шар, то полагаем *R1*=0.

Пример

Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_T xyzdV$, где **Т** – часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ расположенная в первом октанте.

Решение

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^R r^5 dr = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{R^6}{6} = \frac{R^6}{48}$$

Замечание

Не существует общего указания, когда следует применять ту или иную систему координат. Это зависит от области интегрирования и от вида подынтегральной функции. Иногда следует написать интеграл в разных системах координат и только потом решить, в какой из них вычисление будет наиболее простым.