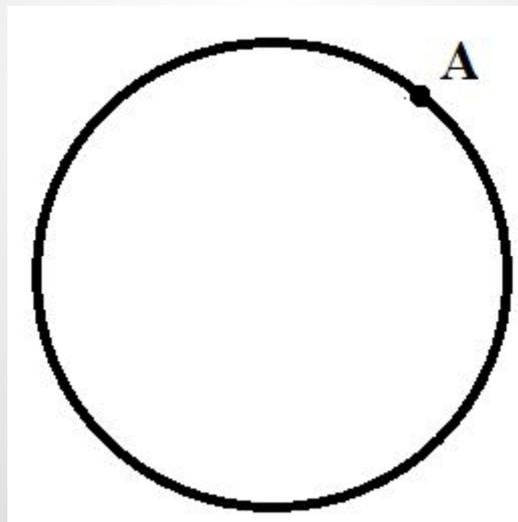


# Основные уравнения теории упругости

Геометрические соотношения Коши.  
Уравнения неразрывности (совместности)  
деформаций Сен-Венана. Физические  
уравнения теории упругости. Линейные  
зависимости между деформациями и  
напряжениями для анизотропного тела.

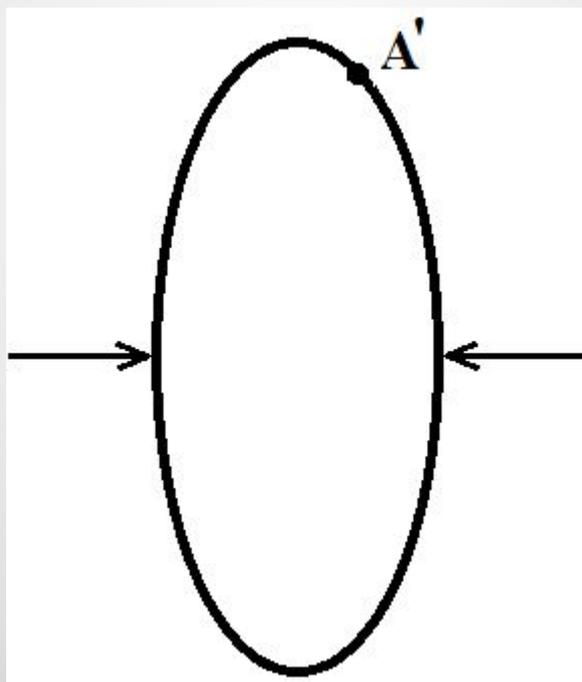
## Геометрические соотношения Коши

При действии внешних нагрузок точки заданного деформируемого тела перемещаются в пространстве



## Геометрические соотношения Коши

При действии внешних нагрузок точки заданного деформируемого тела перемещаются в пространстве

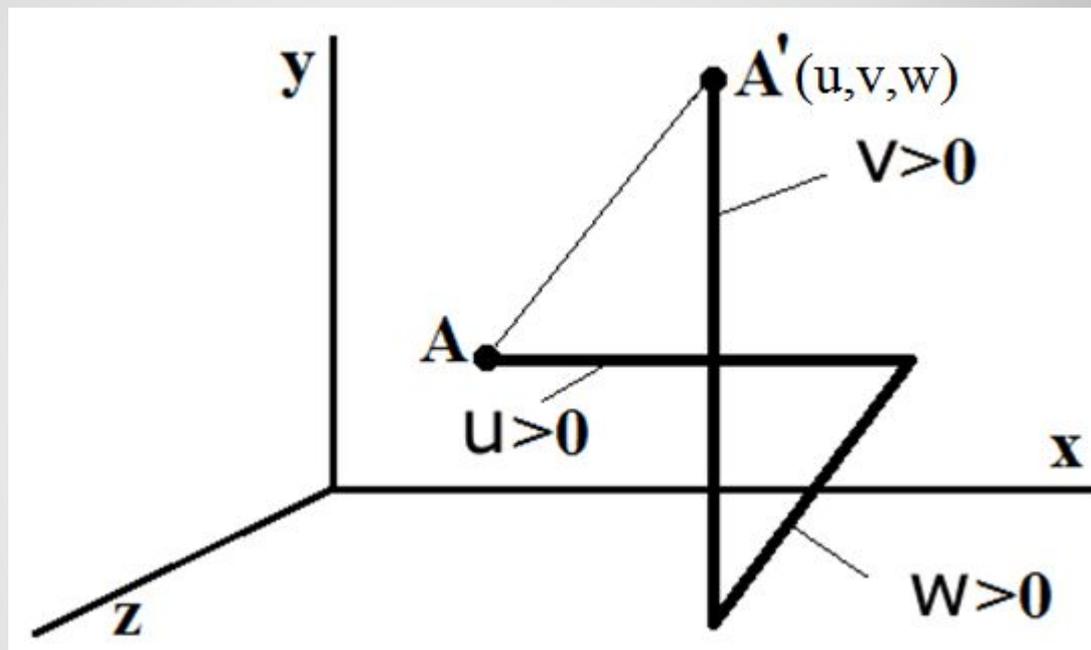


## Геометрические соотношения

Геометрически деформация тела характеризуется двумя группами функций.

*Первая группа* – это компоненты перемещений точек  $u$ ,  $v$  и  $w$ , параллельные осям координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Для точки  $A$  тела такие перемещения показаны на рис.



Условимся далее считать  $u, v$  и  $w > 0$ , если они совпадают с положительным направлением соответствующей оси координат, и наоборот.

Три функции  $u = u(x, y, z);$

$$v = v(x, y, z);$$

$$w = w(x, y, z)$$

определяют поле перемещений деформируемого тела.

В силу гипотезы о сплошности тела полагаем, что эти функции и их частные производные требуемого порядка по  $x, y, z$  непрерывны.

Вторая группа – это относительные деформации элементарных параллелепипедов  $dx, dy, dz$ , на которые мысленно можно расчленить тело. В каждой точке они составляют тензор деформаций

$$T_D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Шесть различных компонент которого как функции координат  $x, y, z$  определяют поле деформаций.

$$T_D = T_D(x, y, z)$$

Геометрические уравнения Коши устанавливают зависимости между перемещениями и деформациями. Для их вывода будем считать функции  $u$ ,  $v$  и  $w$  заданными, а через них выразим деформации.

Для определения деформации  $\varepsilon_x$  рассмотрим отрезок АВ длиной  $dx$ .

Обозначим

$$\partial_x u = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

- частный дифференциал (линейная часть приращения) функции  $u$  при изменении координаты  $x$  на  $x+dx$ .

В результате получим линейные и угловые деформации в виде (5)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Геометрические соотношения (1) носят название **уравнений Коши**.

## Уравнения неразрывности деформаций (совместности деформаций) Сен-Венана

Геометрические соотношения Коши (1) связывают 6 составляющих деформаций

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$

и три составляющих перемещения  $u, v, w$ .

Если заданы три составляющие перемещения, то шесть составляющих деформации определяются из этих уравнений однозначно, т. е. заданным трем составляющим перемещения соответствует единственная система единственная система из 6 составляющих деформации.

## **Уравнения неразрывности деформаций (совместности деформаций) Сен-Венана**

Если же заданы шесть составляющих деформации, то для определения трех составляющих перемещения необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений (5) в частных производных.

При произвольном выборе составляющих деформации 6 уравнений с тремя неизвестными не всегда могут быть решены однозначно. Поэтому между шестью составляющими деформации должны существовать определенные зависимости.

## Уравнения Сен-Венана

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \right\} (2)$$

## Уравнения Сен-Венана

Представим себе тело разрезанное на малые параллелепипеды. Если каждый из этих параллелепипедов получит произвольные деформации, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное твердое тело: в некоторых точках после деформирования возникнут бесконечно малые разрывы. Уравнения же (2) устанавливают такие зависимости между составляющими деформации, при удовлетворении которых тело после деформирования остается сплошным, и непрерывным.