

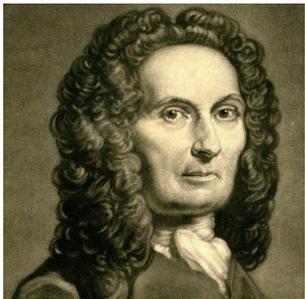
Теория и методика изучения линии векторов и координат

В помощь студентам ДПП «Образование и педагогика», профиль
«Математика»

История развития векторного исчисления в математической науке и образовании

Направление	Геометрическое	Физическое	Алгебраическое
Область изучения	Отрезки и их исчисления	Векторные величины	Расширение понятия операции

Каспар Вессель



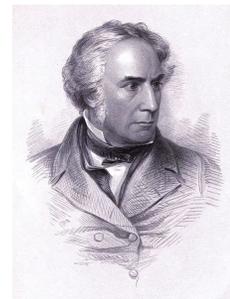
Рене Декарт



Огюстен Коши



Уильям Гамильтон



Лазар Карно



Цель изучения векторного метода

- ▶ 1. продемонстрировать еще один, не похожий на другие, метод решения различных геометрических задач и доказательства большого числа теорем;
- ▶ 2. показать, что вектора используются и в других науках, таких как физика, география, химия, это сможет сделать кругозор учащихся значительно шире и будет способствовать развитию их взглядов на жизнь;
- ▶ 3. решать задачи векторным методом для того, чтобы развивать у обучающихся такие мыслительные операции, как обобщение и конкретизация;
- ▶ 4. способствовать развитию такого рода качеств мышления, как гибкость (не шаблонность), целенаправленность, рациональность, критичность и др. у обучающихся;
- ▶ 5. показать, насколько тесно связаны между собой такие предметы, как алгебра и геометрия.

Требования к уровням освоения

С учетом типа общеобразовательного учреждения, учащиеся вправе изучать математику на нескольких уровнях - базовом, расширенном и углубленном. Необходимо подчеркнуть, что тот объем знаний по теме «Векторы и координаты на плоскости» при изучении математики на базовом уровне можно считать слишком малым для того, чтобы обучающиеся в полной мере овладели векторным методом решения планиметрических задач. В условиях расширенного уровня изучения предполагается обучение детей некоторым составляющим векторного метода, поскольку он включает в себя довольно большой перечень результатов. Углубленный уровень изучения предусматривает полное освоение обучающимися векторного метода и использование его при решении многих задач и доказательства некоторых теорем.

Базовый уровень

- ▶ Оперировать на базовом уровне понятиями вектор, сумма векторов, произведение вектора на число, координаты на плоскости;
- ▶ определять приблизительно координаты точки по ее изображению на координатной плоскости.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- ▶ использовать векторы для решения простейших задач на определение скорости относительного движения.

Расширенный уровень

- ▶ Оперировать понятиями вектор, сумма, разность векторов, произведение вектора на число, угол между векторами, скалярное произведение векторов, координаты на плоскости, координаты вектора;
- ▶ выполнять действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число), вычислять скалярное произведение, определять в простейших случаях угол между векторами, выполнять разложение вектора на составляющие, применять полученные знания в физике, пользоваться формулой вычисления расстояния между точками по известным координатам, использовать уравнения фигур для решения задач;
- ▶ применять векторы и координаты для решения геометрических задач на вычисление длин, углов.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- ▶ использовать понятия векторов и координат для решения задач по физике, географии и другим учебным предметам.

Углубленный уровень

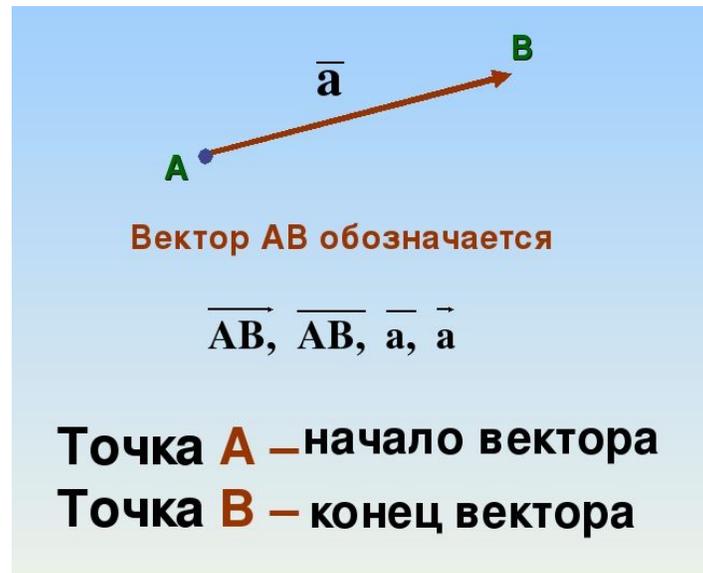
- ▶ Свободно оперировать понятиями вектор, сумма, разность векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение векторов, координаты на плоскости, координаты вектора;
- ▶ владеть векторным и координатным методом на плоскости для решения задач на вычисление и доказательства;
- ▶ выполнять с помощью векторов и координат доказательство известных ему геометрических фактов (свойства средних линий, теорем о замечательных точках и т.п.) и получать новые свойства известных фигур;
- ▶ использовать уравнения фигур для решения задач и самостоятельно составлять уравнения отдельных плоских фигур.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- ▶ использовать понятия векторов и координат для решения задач по физике, географии и другим учебным предметам.

Различные подходы к понятию вектора в школе.

- ▶ В учебнике Погорелова А.В. дается следующее определение: «Вектором мы будем называть направленный отрезок. Направление вектора определяется указанием его начала и конца. На чертеже направление вектора отмечается стрелкой».
- ▶ В учебнике Атанасяна Л.С. можно увидеть другой подход во введении этого понятия: «Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая - концом, называется направленным отрезком или вектором».



Две схемы введения векторов и координат.

Учебник Атанасяна

- ▶ Глава 9 Векторы
- ▶ Глава 10 Метод координат

Понятие вектора, нулевой вектор, длина или модуль вектора, равные векторы, откладывание вектора от точки, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, скалярное произведение векторов.

Учебник Погорелова

- ▶ Параграф 8 Декартовы координаты на плоскости
- ▶ Параграф 10 Векторы

Понятие вектора, абсолютная величина (модуль) вектора, равные векторы, нулевой вектор, откладывание вектора от точки, координаты вектора, сложение векторов. умножение вектора на число, коллинеарные вектора, скалярное произведение векторов.

Сложение и вычитание векторов

Учебник Атанасяна

Сумма векторов определяется в этом учебнике следующим образом:

- ▶ Пусть a и b - два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор \overrightarrow{AB} , равный a . Затем от точки B отложим вектор \overrightarrow{BC} , равный b . Вектор \overrightarrow{AC} называется **суммой векторов a и b** .

Такое определение суммы векторов обладает хорошей наглядностью, легко может быть мотивировано рассмотрением примера на перемещение материальной точки. Однако при этом громоздким является обоснование свойств сложения векторов и независимости векторов от выбранной точки.

- ▶ **Вычитание векторов** авторы определяют как действие, обратное сложению. Важное место здесь занимает теорема о том, что для любых векторов a и b справедливо соотношение $a - b = a + (-b)$. Эта теорема дает способ построения разности векторов: чтобы вычесть из вектора a вектор b , надо сложить вектор a с вектором, противоположным вектору b .

Учебник Погорелова

- ▶ **Суммой векторов a и b** с координатами (a_1, a_2) и (b_1, b_2) называется вектор c с координатами $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Из определения суммы векторов, признака равенства векторов и свойств сложения действительных чисел следуют все свойства сложения векторов. Такое определение суммы векторов позволяет легко обосновать свойства сложения векторов, но оно не указывает способа построения суммы двух данных векторов. Один из таких способов дает **теорема**: Каковы бы ни были точки A, B, C имеет место равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- ▶ **Разностью векторов a и b** ((a_1, a_2) и (b_1, b_2)) называется вектор c ((c_1, c_2)) такой, что $c + b = a$. Обозначается $c = a - b$, тогда $c_1 = a_1 - b_1, c_2 = a_2 - b_2$.

Способ построения разности двух векторов рассмотрен здесь в **задаче**: Даны векторы с общим началом: \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} . Докажите, что $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Умножение вектора на число

Учебник Атанасяна

- ➔ Произведением ненулевого вектора a на число k называют такой вектор b , длина которого равна $|k \cdot a|$, причем векторы a и b сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Свойства умножения вектора на число в этом учебнике не доказываются.

Учебник Погорелова

- ➔ Произведением вектора $a (a_1; a_2)$ на число λ называется вектор $(\lambda a_1; \lambda a_2)$

Координатное определение произведения вектора на число позволяет легко обосновать все свойства умножения вектора на число. Однако оно не дает способа построения произведения данного вектора на заданное число. Возникает проблема отыскания такого способа. Для этого рассматривается упражнение на построение произведения вектора на число:

Постройте произведение вектора $\vec{OA} (4; 5)$ на число а) 2; б) -3; в) 0; г) 5; д) -1,5.

Скалярное произведение векторов

Учебник Атанасяна

- ▶ Это понятие вводится как произведение длины этих векторов на косинус угла между ними. При таком (традиционном) подходе значительную трудность представляет доказательство распределительного свойства скалярного умножения векторов. Оно очень громоздко.

Учебник Погорелова

- ▶ Скалярное произведение векторов изучается в 8 классе и определяется как сумма произведений их соответствующих координат (т. е. число): $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$,

При этом в учебнике доказывается теорема: *Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.*

Типы задач, обучающие «Векторному методу» в курсе геометрии 7-9

- ▶ Перевод геометрического языка на векторный и обратно.
- ▶ Выполнение операций над векторами.
- ▶ Представление вектора в виде суммы, разности векторов, произведения вектора на число.
- ▶ Переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот.
- ▶ Нахождение длины вектора и величины угла между векторами
- ▶ Применение векторного метода в конкретных ситуациях

(Файл с примерами задач будет отправлен на почту)

Координатный метод решения задач

Основные понятия:

- ▶ 1. *Абсцисса* (от лат. *abscissus* - отрезанный, отсеченный) - отрезок, отсекаемый на оси Ox .
- ▶ 2. *Ордината* (от лат. *ordinatus* - упорядоченный) - одна из декартовых координат точки, обычно вторая, обозначаемая буквой y . Первоначально была только одна ось и ординатами были отрезки, параллельные друг другу и перпендикулярные оси, то есть в каждой абсциссе строился свой перпендикуляр.
- ▶ 3. *Координаты (точки)* - числа, взятые в определенном порядке и характеризующие положение точки на линии, на плоскости, на поверхности или в пространстве.
- ▶ 4. *Координатная прямая* - прямая, на которой указан способ изображения действительных чисел.
- ▶ 5. *Координатная плоскость* - плоскость с введенной на ней системой координат; $x = 0$, $y = 0$ - оси координат; $x = const$, $y = const$ - координатные линии.
- ▶ 6. *Координатный метод* - способ определения положения точки (на прямой, плоскости, в пространстве) с помощью чисел. Используя координатный метод, алгебраические уравнения можно истолковать в виде геометрических образов (графиков) и, наоборот, искать решение геометрических задач с помощью аналитических формул (уравнений и их систем).

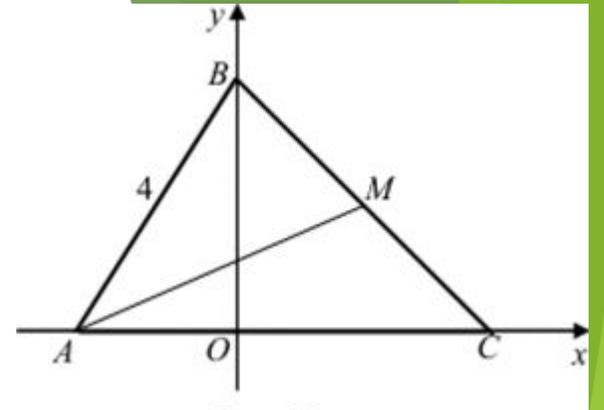
Компоненты координатного метода

- ▶ построение точки по ее координатам;
- ▶ - нахождение координат заданных точек;
- ▶ - вычисление расстояния между точками, заданными своими координатами;
- ▶ - оптимальный выбор прямоугольной системы координат;
- ▶ - составление уравнения фигуры по её характеристическому свойству;
- ▶ - видение за уравнением конкретного геометрического образа;
- ▶ - преобразование алгебраических равенств

Этапы решения геометрической задачи координатным методом

- ▶ I этап. Оптимальный выбор прямоугольной системы координат.
- ▶ II этап. Перевод задачи на координатный язык.
- ▶ III этап. Выполнение преобразований полученного в координатной форме выражения (решение задачи на координатном языке).
- ▶ IV этап. Перевод (и осмысление) полученного результата с координатного языка на тот язык, на котором была сформулирована задача.

Задача: В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60^\circ$. Найти медиану, проведенную из вершины A



- *I этап.* Выберем прямоугольную систему координат так, как показано на рис.
- *II этап.* $\triangle AOB$ - прямоугольный, $\angle ABO = 30^\circ$, поэтому $AO = 2$, тогда $OC = 4$, $OB = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$. Значит, $A(-2; 0)$, $C(4; 0)$, $B(0; 2\sqrt{3})$. Так как M середина стороны BC , то $M(2; \sqrt{3})$.
- *III этап.* По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AM = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19}.$$

- *IV этап.* В нашем случае этот этап осуществляется автоматически: расстояние между точками A и M (где M - середина BC) - это и есть длина медианы, проведенной из вершины A .

Ответ: Медиана $AM = \sqrt{19}$

Практическое занятие:

- ▶ 1. Сформулируйте определение вектора, изложите правила сложения векторов, умножение вектора на число. Как определяются координаты вектора? Дайте определение скалярного произведения векторов
- ▶ 2. Дайте определение аффинной и декартовой систем координат на плоскости и в пространстве.
- ▶ 3. Методика введения понятия вектора в школьном курсе
- ▶ 4. Методика введения системы координат в школьном курсе
- ▶ 5. Характеристика системы задач (можно использовать задачи из файла)
- ▶ 6. Решите задачу векторным методом: Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. Раскройте методику решения данной задачи.
- ▶ 7. Составить таблицу эвристик «Что требуется доказать (на геометрическом языке)», «Что достаточно доказать (на векторном языке)». Предложить методику её использования на уроке (можно использовать задачи из файла из раздела 6).
- ▶ 8. Методика изучения операций над векторами (одно на выбор):
 1. Разработать фрагменты уроков по введению понятий вектора, длины вектора, коллинеарных и равных векторов.
 2. Разработать фрагмент урока «Операции над векторами в графической форме» с использованием интерактивного планшета
 3. Подготовиться к проведению деловой игры «Сложение и вычитание векторов».
 4. Разработать методику изучения умножения вектора на число (скалярного произведения векторов) в форме урока-лекции.