Математика.
Лекция 14.

Кривые второго порядка

- К кривым второго порядка относятся: окружность, эллипс, парабола и гипербола, которые могут быть получены как сечения кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. Поэтому эти кривые называются ***коническими сечениями***.

- Если записать уравнение таких сечений в декартовой прямоугольной системе координат, то это всегда будут алгебраическое уравнение второго порядка. Общий вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- Порядок кривой имеет геометрическую интерпретацию - это максимальное число точек пересечения кривой и прямой, т. е. кривые второго порядка не могут пересекаться с прямой более чем в двух точках.

- Коэффициенты уравнения могут принимать любые действительные значения, но по крайней мере одно из чисел A или C не равно нулю. Путем преобразования системы координат общее уравнение кривых второго порядка можно привести к виду, в котором будет отсутствовать произведение $x \cdot y$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

При определенных условиях из общего уравнения можно получиться одна из конкретных кривых:

1. Окружность, если $A=C$.
2. Эллипс, если $A \neq C$ (A *и* C одного знака).
3. Гипербола, если $A \neq C$ (A *и* C разного знака).
4. Парабола, если $A=0$; $C \neq 0$ или $A \neq 0$; $C=0$.

Окружность и ее каноническое уравнение

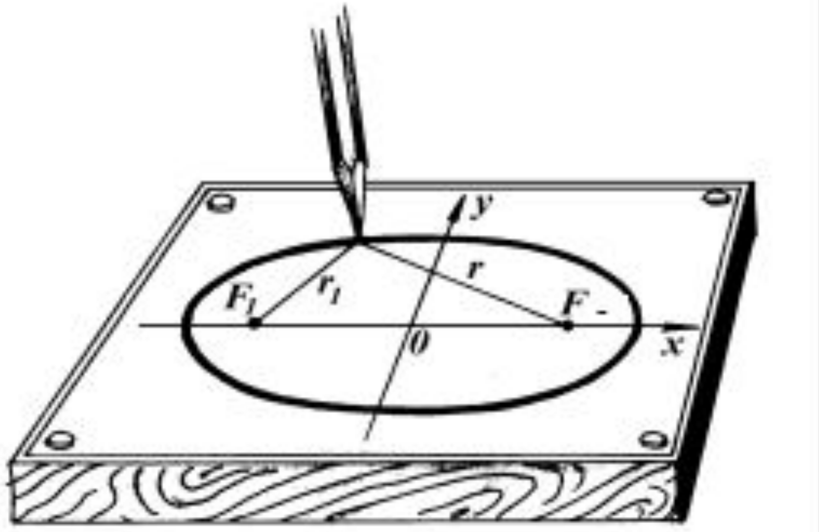
- *Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Эллипс и его каноническое уравнение

- *Эллипсом* называется множество точек плос кости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 той же плоскости, назы ваемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

- Возьмем на плоскости две про извольные точки F_1 и F_2 и за крепим в этих точках кнопками концы нити длиной $2a$ так, что бы длина $2a$ была больше рас стояния между фокусами F_1 и F_2. Затем, натянув нить остри ем карандаша, перемещаем его по бумаге, следя за тем, чтобы нить все время оставалась натя нутой.

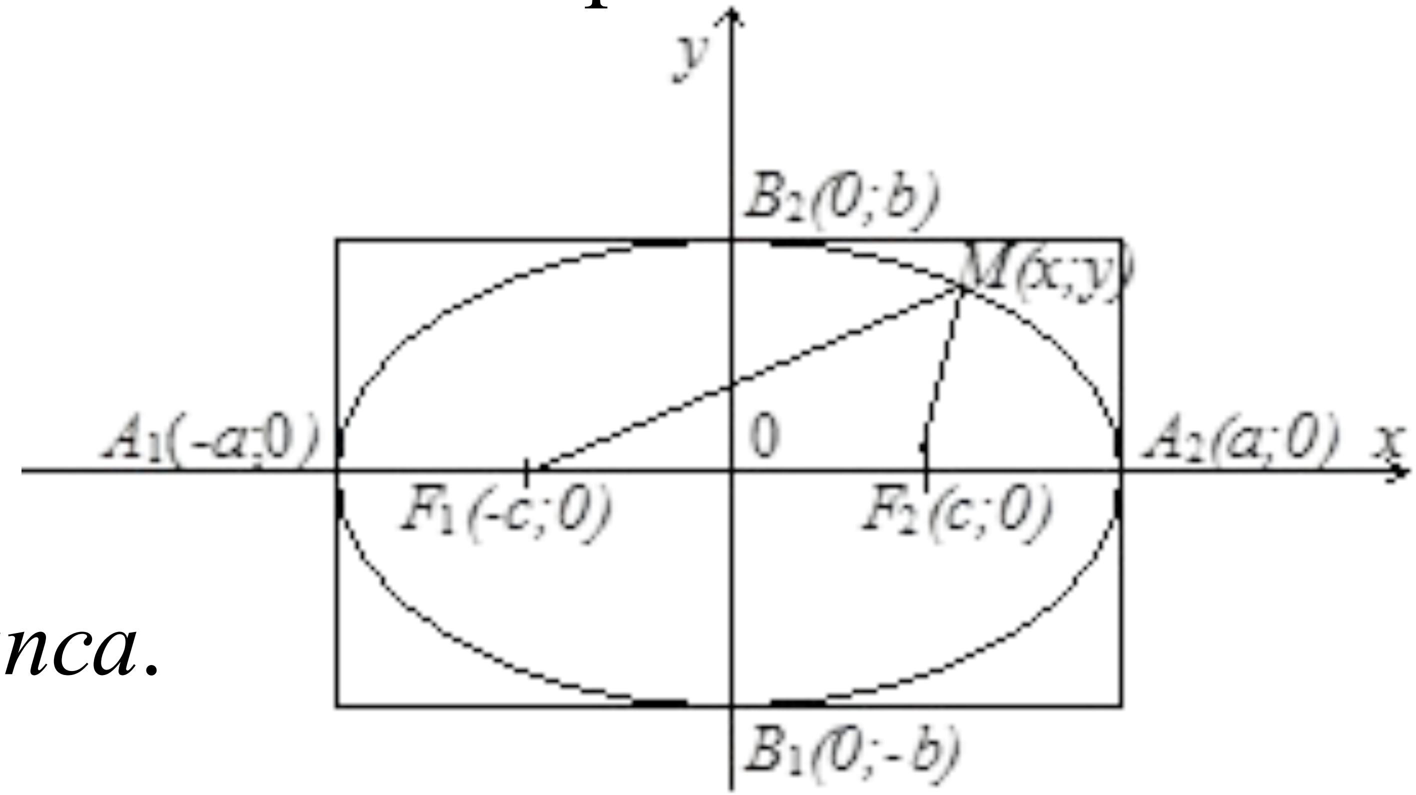


- Острие карандаша опишет замкнутую кривую линию, для каждой точки M которой справедливо равенство

$$F_1 M + F_2 M = 2a.$$

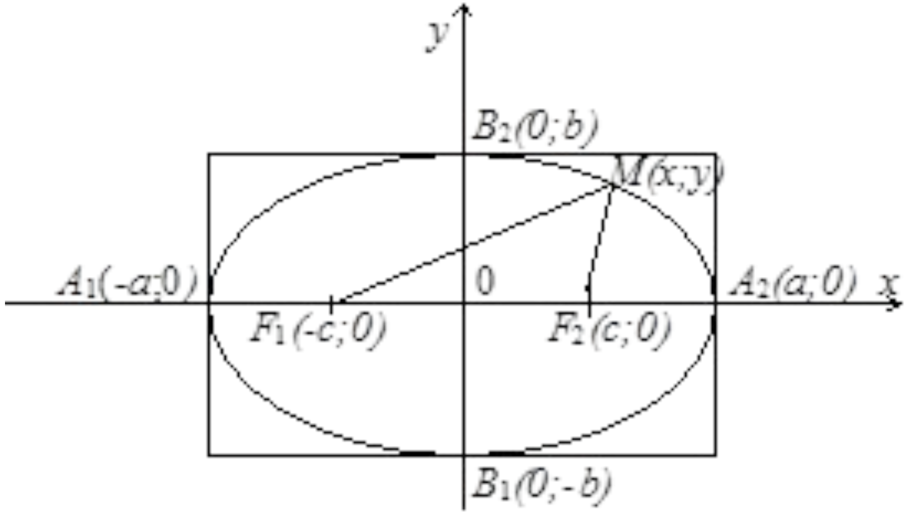
- Для вывода уравнения эллипса обозначим расстояние меж ду фокусами $2c$. Так как $a^2 - c^2 > 0$, то, обозначив эту разность через b^2, получим после некоторых преобразований

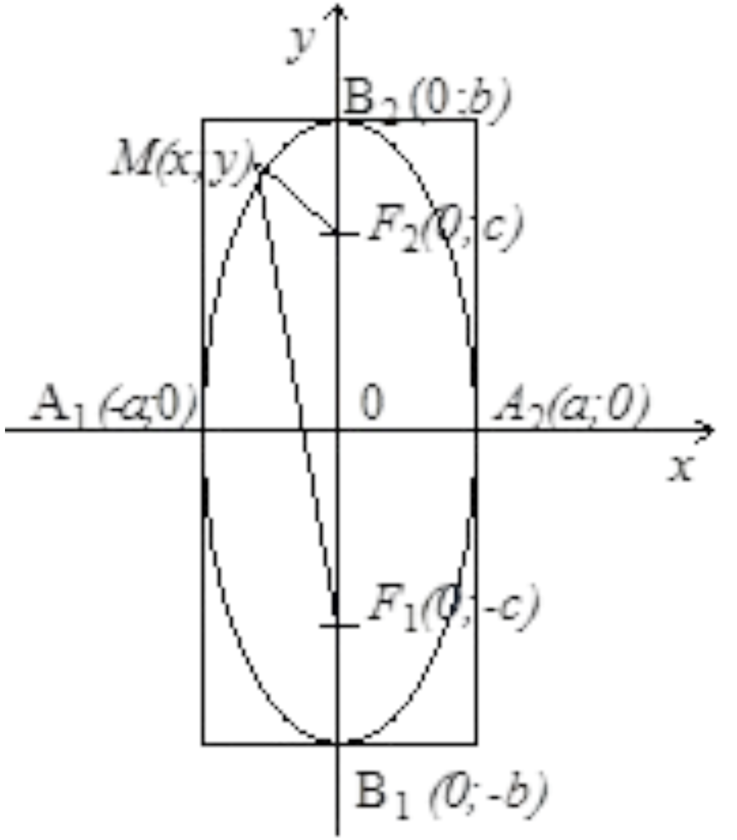
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- Числа a и b - *полуоси эллипса*.

- Эллипс - это линия симметричная отно сительно осей $0x$ и $0y$.
- Эллипс пересекает ось $0x$ в т. A_1 $(-a;0)$ и A_2 $(a;0)$, а ось $0y$ - в точках B_1 $(0; -b)$ и B_2 $(0; b)$. A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами* эллипса.
- Эллипс - фигура, вписанная в прямо угольник со сторонами $2a$ и $2b$, парал лельными координатным осям.
- Отрезок $A_1 A_2 = 2a$ называется *большой осью* эллипса, а отрезок $B_1B_2 = 2b$ - его *малой осью*; $0A_1 = 0A_2 = a$ и $0B_1 = 0B_2 = b$ - полуоси эллипса; $0F_1 = 0F_2 = c$ — полуфокусное расстояние.





Фокальное свойство эллипса.

- Одним из замечательных свойств эллипса является его оптическое свойство. Предположим, что эллипс представляет собой "зеркальную" кривую, от которой луч света отражается по закону "угол падения равен углу отражения". Если в одном фо кусе такого зеркального эллипса поместить точечный источник света, то после отражения от стенок эллипса все лучи пройдут через второй фо кус.

Фокальное свойство эллипса.

- Это явление можно наблюдать реально в трехмерном пространстве. Для этого нужно взять поверхность, получающуюся вращением эллипса вокруг прямой, проходящей через его фокусы (такую поверхность называют эллипсоидом вращения). Если эллипсоид вращения покрыть изнутри зеркальным слоем и в одном из фокусов поместить источник света ("солнце"), то наблюдатель, находящийся внутри эллипсоида, увидит два "солнца" (в первом фокусе - где оно размещено и во втором фокусе, где в действительности ничего нет).

Фокальное свойство эллипса.

- Если же во второй фокус поместить непрозрачное тело (экран), то все лучи, исходящие от "солнца" собираются (фокусируются) на экране, и это может вызвать его интенсивный разогрев.
- Описанное выше свойство лежит в основе акустического эффекта, наблюдаемого в некоторых пещерах и искусст венных сооружениях, своды которых имеют эллиптиче скую форму: если находиться в одном из фокусов, то речь человека, стоящего в другом фокусе, слышна так хорошо, как будто он находится рядом.

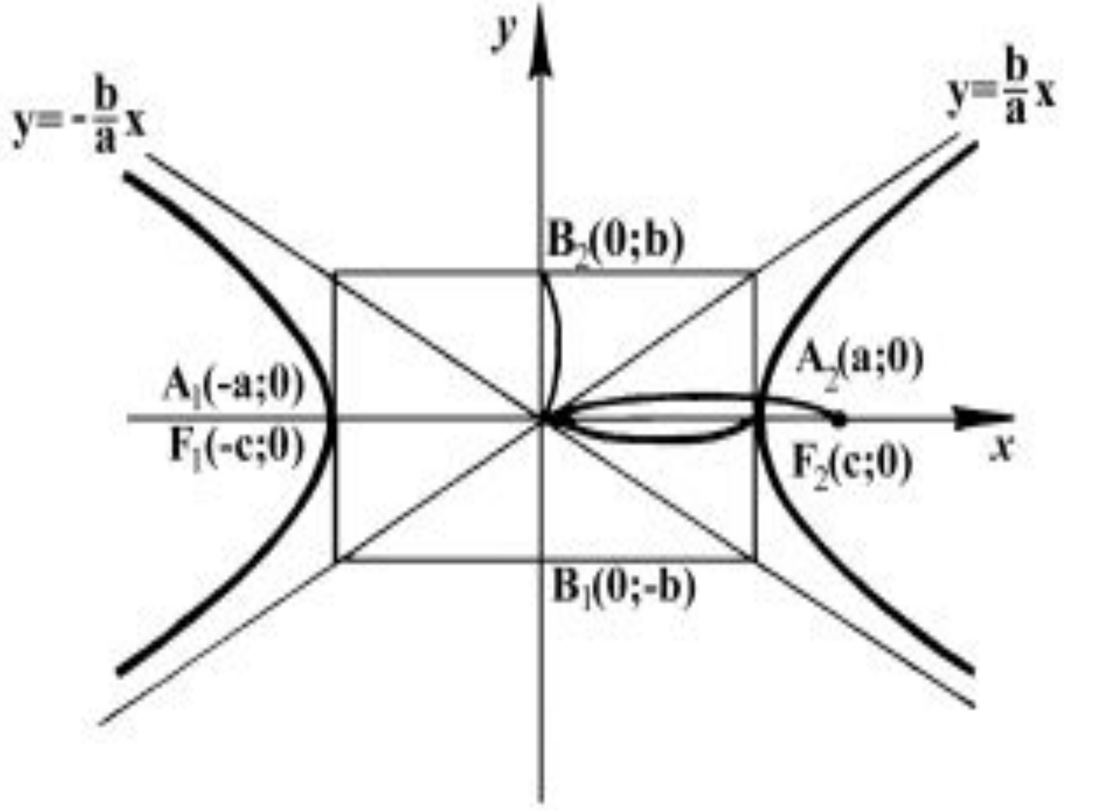
Фокальное свойство эллипса.

- Все планеты солнечной системы движутся во круг солнца по орбитам, имеющим форму элли пса, в одном из фокусов которого находится Солнце. По эллипсам, одним из фокусов которых является Земля, движутся вокруг Земли ее искус ственные спутники и естественный спутник Лу на.
- Эллипсами пользуются при конструировании различных деталей механизмов и машин.

Гипербола и ее каноническое уравнение

- *Гиперболой* называется множество точек плоскости, для которых разность расстояний до двух данных то чек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная $= 2a$.
- Пусть M — произвольная точка гиперболы. По опре делению: $|F_1M - F_2M| = 2a$.
- Расстояние между двумя фокусами F_1 и F_2 обозна чим через $2c$.
- Так как $c^2 - a^2 > 0$, то, обозначим $c^2 - a^2 = b^2$.

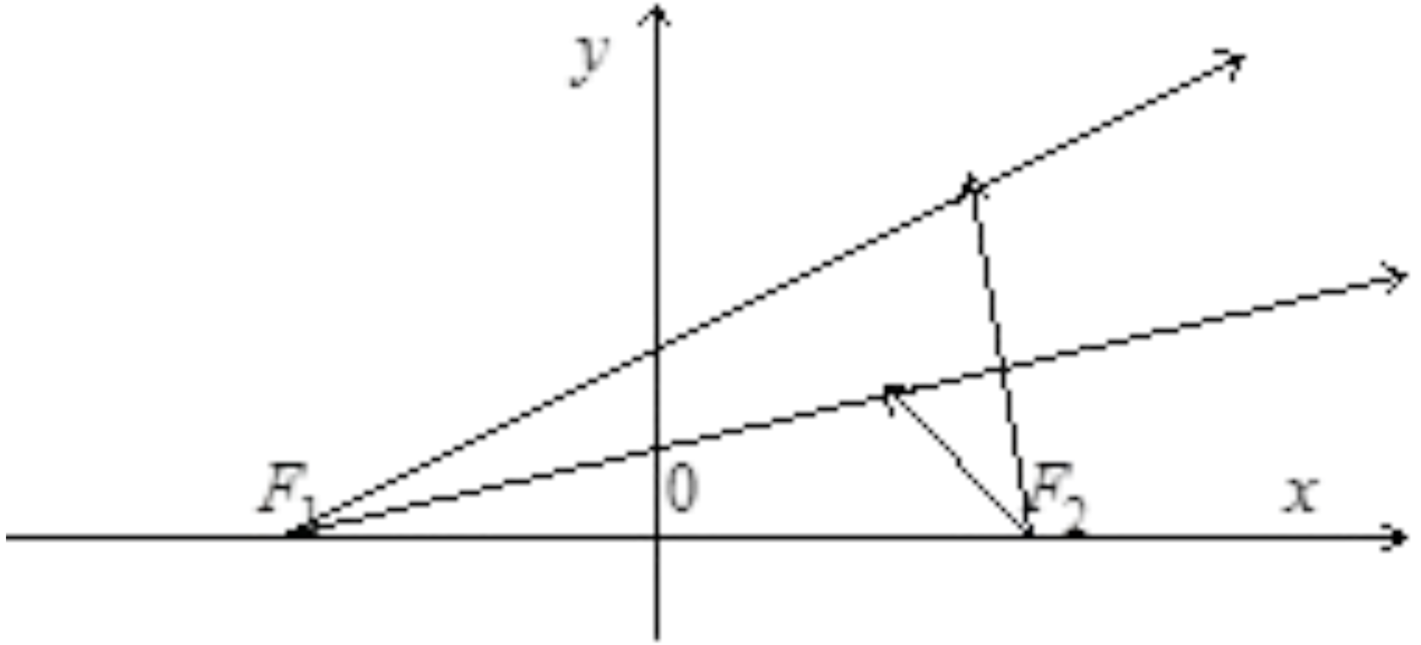
- Уравнение содержит четные степени *x* и *y*, следовательно, гипербола симме трична относительно осей координат. Оси *0x* и *0y* — оси симметрии гипер болы, а точка 0(0;0) — центр гипербо лы.
- Ось *0x*, на которой лежат фокусы ги перболы, называют *фокальной осью* гиперболы.
- С осью *0y* гипербола не пересекается, поэтому фокальную ось гиперболы называют *вещественной* осью, а пер пендикулярную ей ось — *мнимой* осью.
- Соответственно, *a* и *b* называют *веще ственной* и *мнимой* полуосями гипер



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Фокальное свойство гиперболы.

- Гипербола обладает оптическим свойством, которое опи сывается следующим образом: луч, исходящий из источ ника света, находящегося в одном из фокусов гиперболы, после отражения движется так как будто он исходит из другого фокуса.



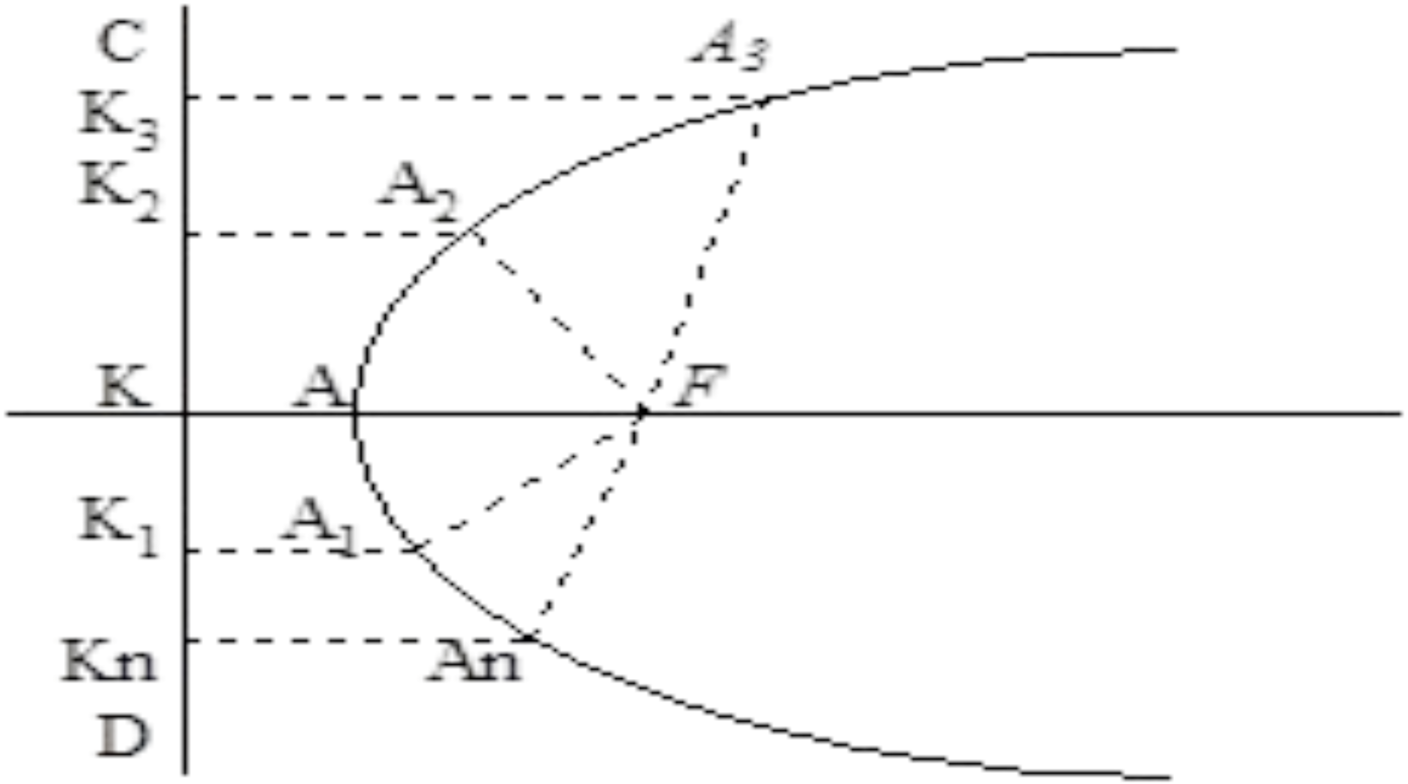
Фокальное свойство гиперболы.

- Если сделать зеркало, изогнув зеркально отполированный лист металла по дуге гиперболы, и в точке, соответствующей фокусу гиперболы, поместить источник света, то лучи, отражаясь от зеркала будут расходиться. Такие рефлекторы (отражатели) используются не только в прожекторах или автомобильных фарах, но и в проекционных аппаратах, обогревательных приборах, медицинских установках (лампы синего света, кварцевые лампы и др.)
- Для передачи радио и телевизионных сигналов на большие рас стояния, конструируют высокие антенны, имеющие в вертикаль ном разрезе форму гиперболы (Шуховская башня радиовещания в Москве, Эйфелева башня в Париже).

Парабола и ее каноническое уравнение

- *Параболой* называется множество точек, для каждой из которых расстояние до данной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой директрисой.

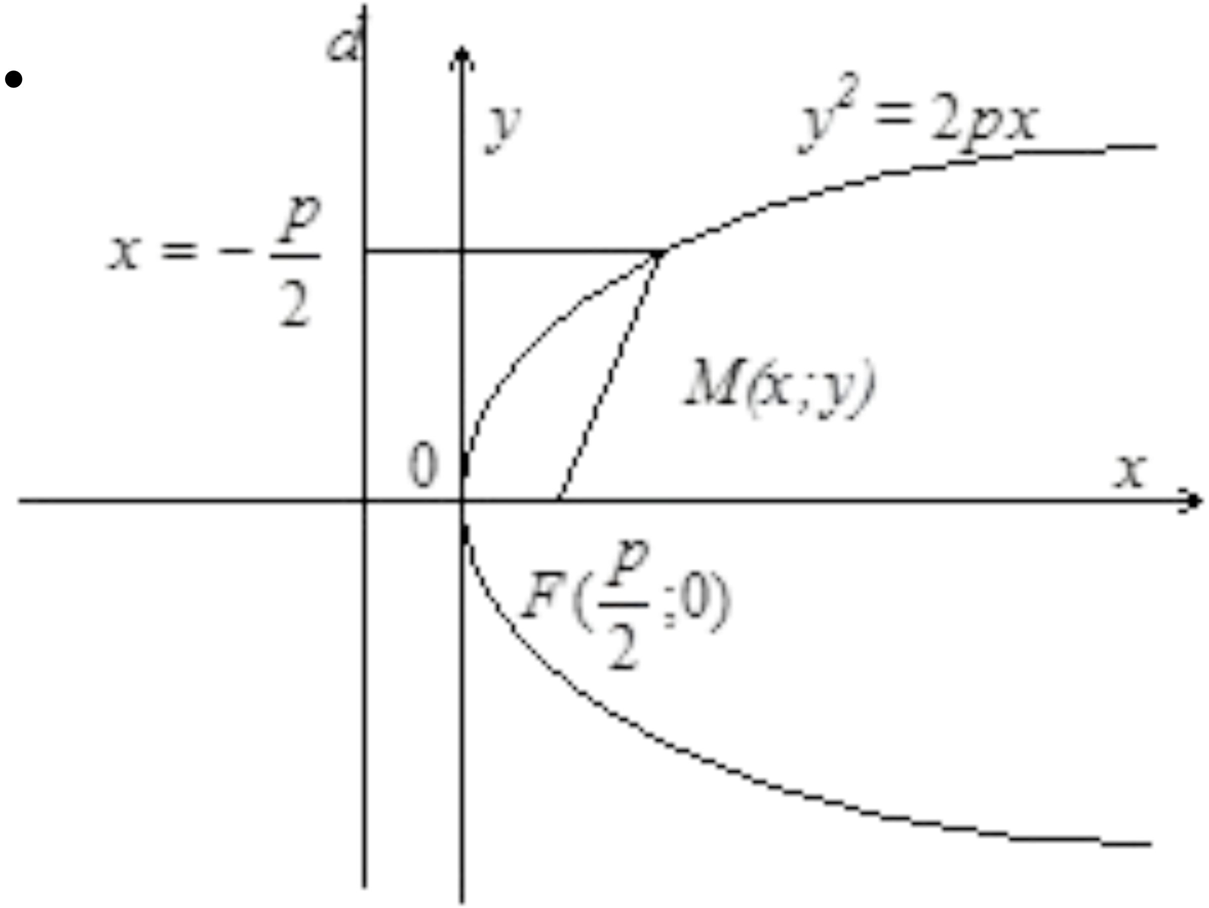
- Из определения параболы следует, что A; A_1; A_2; ...; A_n будут точками параболы, директрисой которой является данная прямая CD и фокусом точка F, если будут выполняться следующие равенства: $AK = AF$; $A_1 K_1 = A_1 F$; $A_2 K_2 = A_2 F$; ... ; $A_n K_n = A_n F$.



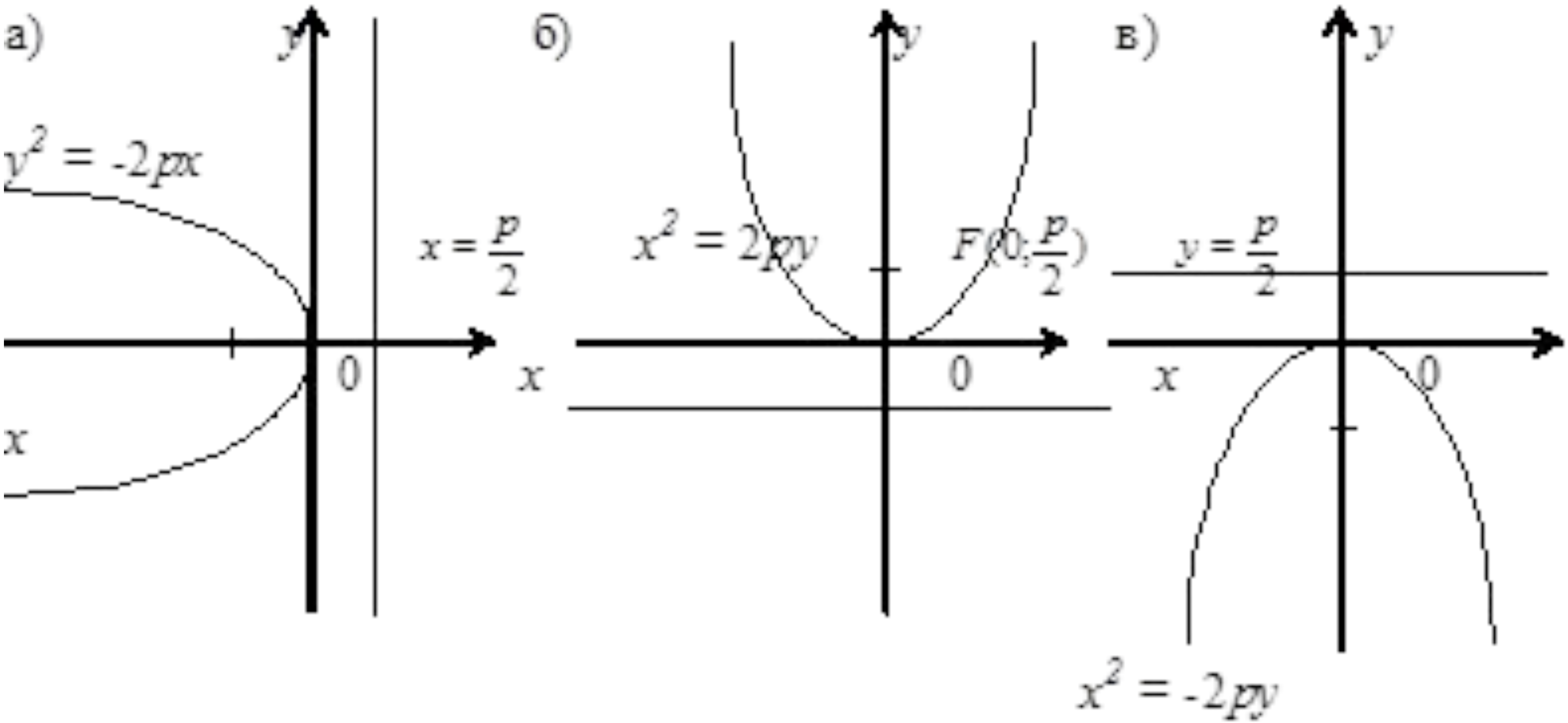
Каноническое уравнение параболы

- $y^2 = 2p \cdot x$
  - Уравнение содержит y во второй степени, следовательно, парабола симметрична относительно оси $0x$.
  - Координаты начала координат (0;0) удовлетворяют уравнению параболы, следовательно, вершина параболы лежит в начале координат.

-



Разновидности расположения параболы



Фокальное свойство параболы.

- Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.
- Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.