



«Методы и алгоритмы
цифровой обработки сигналов
на базе MATLAB»

*Методы непараметрического
спектрального анализа.
Основные показатели качества
оценок СПМ*

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОЦЕНОК СПМ (1)

Для **сравнения** различных оценок СПМ используются специальные показатели (**показатели качества оценок СПМ**). **Показатели качества** позволяют количественно охарактеризовать оценки СПМ.

Данные показатели не всегда являются количественными, т.е. не всегда могут быть выражены количественными значениями. Существует ряд показателей, которые **качественно** характеризуют конкретную оценку СПМ.

Показатели качества являются **информативными** для **сравнения различных оценок СПМ** и выбора лучшей из них по тому или иному критерию.

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОЦЕНОК СПМ (2)

Применяемые на практике показатели качества:

- 1) смещенность / несмещенность;
- 2) состоятельность / несостоятельность.

Смещение оценки

(с использованием оператора математического ожидания)

$$\beta = \alpha - M \{ \hat{\alpha} \} \qquad \beta = M \{ \alpha \} - M \{ \hat{\alpha} \} = M \{ \alpha - \hat{\alpha} \}$$

В дальнейшем рассматриваются **эргодические сигналы**, для которых усреднение по ансамблю реализаций эквивалентно **усреднению по времени** одной реализации теоретически бесконечной длины.

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОЦЕНОК СПМ (3)

Смещение оценки СПМ

$$\beta = M \{ S(\omega) - \hat{S}(\omega) \}$$

Для асимптотически несмещенной оценки СПМ

$$\beta = M \{ S(\omega) - \hat{S}(\omega) \} \rightarrow 0$$

Оценка называется **несмещенной**, если ее смещение равно нулю.

Оценка называется **асимптотически несмещенной**, если ее смещение стремится к нулю с ростом длины выборки (при ее стремлении к бесконечности).

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОЦЕНОК СПМ (4)

Применяемые на практике показатели качества:

- 1) смещенность / несмещенность;
- 2) состоятельность / несостоятельность.

Условие состоятельности оценки параметра

$$M \left\{ (\alpha - \hat{\alpha})^2 \right\} = D \{ \hat{\alpha} \} + \beta^2 \rightarrow 0$$

Условие состоятельности оценки СПМ

$$\beta = M \left\{ S(\omega) - \hat{S}(\omega) \right\} \rightarrow 0$$

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОЦЕНОК СПМ (5)

Условие состоятельности оценки СПМ

$$M \left\{ \left[S(\omega) - \hat{S}(\omega) \right]^2 \right\} = D \left\{ \hat{S}(\omega) \right\} + \beta^2 \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} D \left\{ \hat{S}(\omega) \right\} \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

Следствием несостоятельности оценки СПМ является эффект **изрезанности периодограммы**, проявляющийся в наличии осцилляций в периодограммной оценке.

При улучшении качества оценки СПМ данный эффект (эффект изрезанности) **ослабляется**.

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОЦЕНОК СПМ (6)

Для сглаживания периодограммы применяется то или иное ее усреднение, реализованное в периодограммах **Даньелла, Бартлетта, Уэлча и методе Блэкмана-Тьюки.**

Количественные показатели качества оценок СПМ

- 1) добротность;
- 2) среднеквадратическое отклонение.

Добротность оценки СПМ

$$Q = \hat{S}_{\text{cp}}^2 / \sigma_{\hat{S}}^2$$

$$\sigma_{\hat{S}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\hat{S}(\omega_k) - \hat{S}_{\text{cp}} \right)^2$$

$$\hat{S}_{\text{cp}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{S}(\omega_k)$$

$$\sigma_{\hat{S}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\hat{S}(\omega_k) - \hat{S}_{\text{cp}} \right)^2$$

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОЦЕНОК СПМ (7)

Чем больше **добротность**, тем выше **качество оценки СПМ**.

Среднеквадратическое отклонение (СКО) оценки СПМ –
имеет ту же размерность, что и СПМ.

Несмещенная оценка СКО

СПМ

$$\sigma_{\hat{S}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\hat{S}(\omega_k) - \hat{S}_{\text{cp}} \right)^2}$$

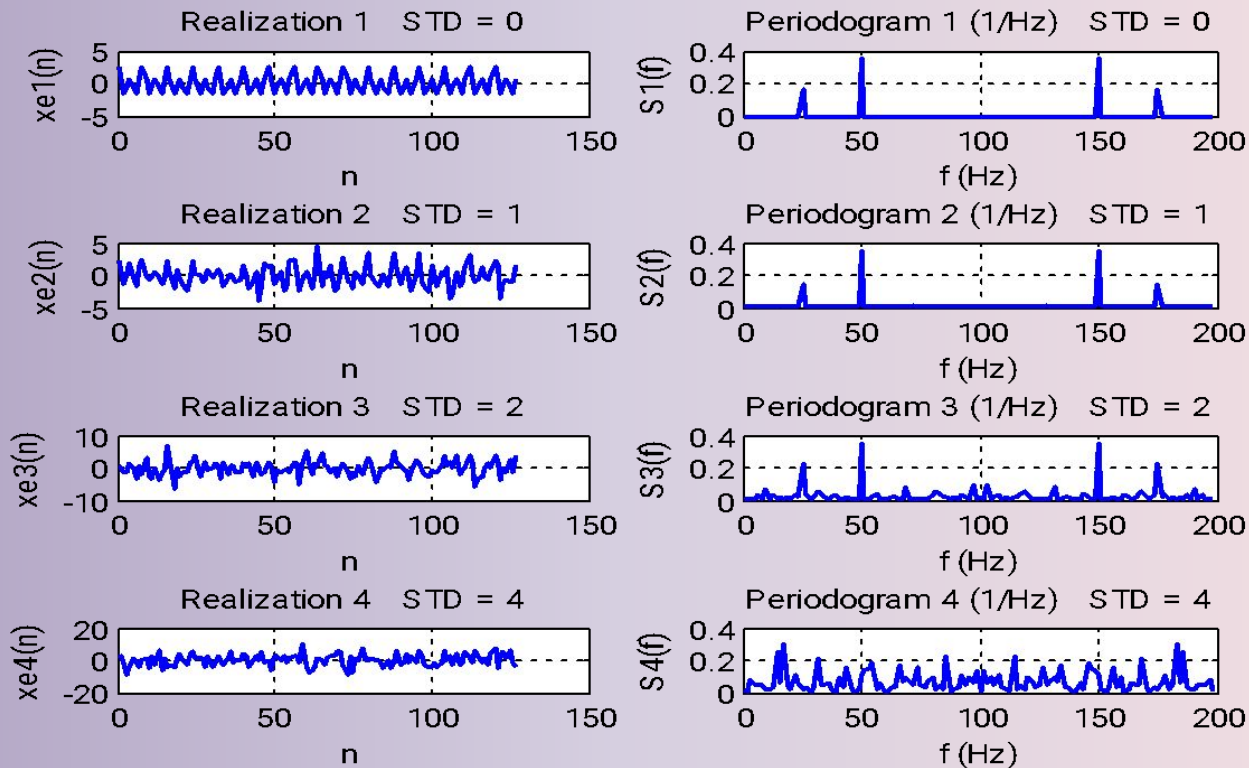
Смещенная оценка СКО

СПМ

$$\sigma_{\hat{S}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\hat{S}(\omega_k) - \hat{S}_{\text{cp}} \right)^2}$$

Чем меньше **СКО**, тем выше **качество оценки СПМ**.

ПРОВЕРКА ИНФОРМАТИВНОСТИ ПЕРИОДОГРАММЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УРОВНЯ ШУМА



МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ТРЕБУЕМОЙ АКФ (1)

Данная процедура позволяет получить последовательность с **требуемой АКФ** на основе нормального белого шума с заданными статистическими характеристиками.

1. Моделирование воздействия КИХ-фильтра — нормального белого шума $x_{WN}(n)$ длины N и вычисление константы $N_0/2$ с помощью функции `var`.
2. Моделирование требуемой АКФ $R_y(m)$ длины $L = 2N - 1$.
3. Вычисление СПМ $S_y(k)$ с использованием ДПФ:

$$S_y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} R_y(m) \cos\left(\frac{2\pi}{N}mk\right) - R_y(0), k = 0, 1, \dots, L-1,$$

с помощью функции `fft`:

$$S = 2 * \text{real}(\text{fft}(R(N:L), L)) - R(N)$$

4. Вычисление АЧХ КИХ-фильтра $|H(k)|$, $k = 0, 1, \dots, L-1$.



МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ТРЕБУЕМОЙ АКФ (2)

5. Моделирование ФЧХ $\varphi(k)$ КИХ-фильтра 1-го типа:

$$\varphi(k) = -k\pi R/L, \quad k = 0, 1, \dots, L-1,$$

где R — *четный* порядок КИХ-фильтра, $(R+1)$ — его длина (длина ИХ), $[2(R+1)+1]$ — длина АКФ ИХ.

В этом случае порядок R будет равен длине требуемой АКФ от ее центрального отсчета до ближайшего отсчета, значение которого близко к нулю.

Необходимо иметь в виду, что порядок R определяет начальные нули реакции КИХ-фильтра при ННУ, поэтому его не следует завышать.

6. Вычисление частотной характеристики КИХ-фильтра:

$$H(k) = |H(k)|e^{j\varphi(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1.$$

7. Вычисление ИХ КИХ-фильтра на периоде L круговой свертки с помощью ОДПФ $H(k)$ с использованием функции `ifft`.

8. Вычисление реакции КИХ-фильтра длины N (*случайной последовательности с требуемой АКФ*) по формуле свертки на основе ДПФ с использованием функции `fftfilt`.



«Методы и алгоритмы
цифровой обработки сигналов
на базе MATLAB»

*Методы непараметрического
спектрального анализа.
Основные показатели качества
оценок СПМ*

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)