§1. Интегрирование простых функций

1. Определение. Измеримая функция $\varphi : S \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она имеет конечное множество значений

$\varphi(S) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$ и для каждого $\alpha_k \neq 0$ множество $A_k = \varphi^{-1}(\alpha_k)$ имеет конечную меру, т.е. $\mu A_k < +\infty$. Множество $\varphi^{-1}(0)$ будет иметь конечную меру только тогда, когда $\mu S < +\infty$.

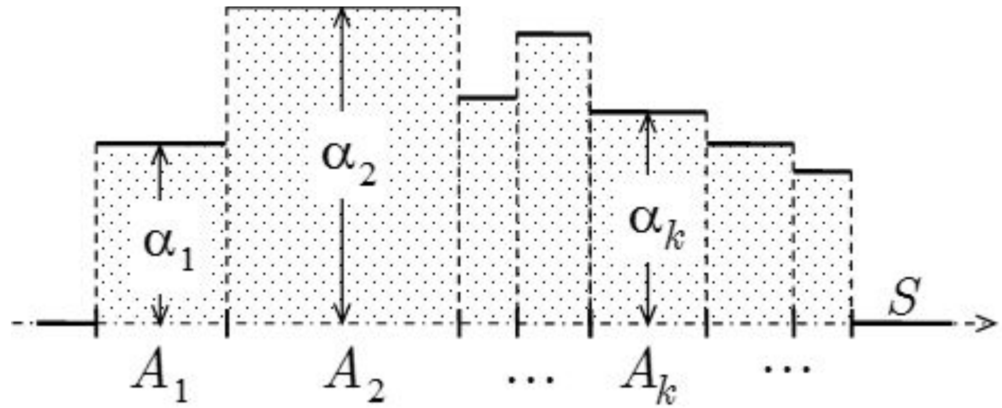

Рис. 1. Простая функция φ

Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – все *ненулевые* значения простой функции φ, и все эти α_k попарно различны, то (см. рис. 1)

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}(t) \text{ для всех } t \in S \quad (1)$$

$$\text{или, короче, } \varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k} \quad (1')$$

2. Определение. Пусть задана *неотрицательная простая функция* (1) и $C \in \Sigma$. *Интеграл* $\int\limits_C \varphi \, d\mu$ (*от функции* φ *по мере* μ *и по множеству* C) определяется равенством $\int\limits_C \varphi \, d\mu = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C \cap A_k\right)$. (2)

Иногда нужно указать переменную, по которой происходит интегрирование. Тогда вместо $\int\limits_C \varphi \, d\mu$ пишут $\int\limits_C \varphi(t) \, d\mu(t)$, $\int\limits_C \varphi(x) \, d\mu(x)$ и т.п.

3. Замечание. Интеграл (2) имеет простой геометрический смысл. А именно, если $S = C = \mathbb{R}$, μ – мера Лебега на прямой, функция (1) неотрицательна и все A_k – промежутки конечной меры, то правая часть равенства (2) совпадает с площадью множества

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \in \mathbb{R}, \; 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)\right\},$$

именуемого *подграфиком* функции φ (см. рис.1).

Если $S = C = \mathbb{R}^2$, μ – мера Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$, функция (1) на $\mathbb{R}^2$ неотрицательна и все A_k – прямоугольники, то интеграл (2) есть объем подграфика $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; 0 \leqslant z \leqslant \varphi(x, y)\right\}$

Установим основные свойства интеграла (2) от простой функции $\varphi : S \to [0, +\infty)$.

Первые 4 свойства очевидны.

(a) *Всегда* $0 \leqslant \int\limits_C \varphi \, d\mu < +\infty$.

(b) *Если* $B, C \in \Sigma$ *и* $B \subset C$, *то* $\int\limits_B \varphi \, d\mu \leqslant \int\limits_C \varphi \, d\mu$.

(c) *Если* $\mu C = 0$ *или* $\varphi = 0$ *на* C, *то* $\int\limits_C \varphi \, d\mu = 0$.

(d) *Если* $\alpha \geqslant 0$, $\mu C < +\infty$ *и* $\varphi(t) = \alpha$ *для всех* $t \in C$, *то* $\int\limits_C \varphi \, d\mu = \alpha \cdot \mu C$.

4. Теорема. (Счетная аддитивность интеграла).

Пусть $\varphi : S \to [0, +\infty)$ *– простая функция. Отображение*

$$\mu_\varphi : \Sigma \to [0, +\infty), \ \mu_\varphi(C) = \int_C \varphi \, d\mu \ \textit{для всех } C \in \Sigma,$$

является неотрицательной мерой на Σ.

Доказательство. Очевидно $\mu_\varphi(\varnothing) = 0$. Пусть $C = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$, где все $C_j \in \Sigma$. Нужно доказать равенство $\mu_\varphi C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_\varphi C_j$.

Используем разложение (1) функции φ. Для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$C \cap A_k = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (C_j \cap A_k) \text{ и } \mu(C \cap A_k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(C_j \cap A_k).$$

Поэтому

$$\mu_\varphi C = \int_C \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(C_j \cap A_k).$$

Отсюда по свойству линейности суммы ряда

$$\mu_{\varphi} C = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu\left(C_j \cap A_k\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C_j \cap A_k\right).$$

По определению (2) $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C_j \cap A_k\right) = \int_{C_j} \varphi \, d\mu$.

Следовательно,

$$\mu_{\varphi} C = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu\left(C_j \cap A_k\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{C_j} \varphi \, d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_{\varphi}\left(C_j\right). \square$$

Из теоремы 4 и из свойства (с) вытекает следующий полезный факт:

5. Следствие. *Если* $B, C \in \Sigma$, $B \subset C$ и $\varphi = 0$ на $C \setminus B$, *то* $\int_{B} \varphi \, d\mu = \int_{C} \varphi \, d\mu$.

Доказательство. Применяя теорему 4 и свойство (с), имеем

$$\int_{C} \varphi \, d\mu = \int_{C \setminus B} \varphi \, d\mu + \int_{B} \varphi \, d\mu = 0 + \int_{B} \varphi \, d\mu = \int_{B} \varphi \, d\mu . \square$$

6. Теорема. (*). (Линейность интеграла). *Пусть* $C \in \Sigma$, $\alpha \geqslant 0$ *и* φ, ψ *– неотрицательные простые функции. Тогда*

$$\int\limits_C (\varphi + \psi)\, d\mu = \int\limits_C \varphi\, d\mu + \int\limits_C \psi\, d\mu,\ \int\limits_C \alpha\varphi\, d\mu = \alpha \cdot \int\limits_C \varphi\, d\mu. \quad (3)$$

(**). (Монотонность интеграла). *Пусть* $C \in \Sigma$ *и пусть неотрицательные простые функции* φ, ψ *таковы, что* $\varphi \leqslant \psi$ *на множестве* C, *т.е.* $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ *для всех* $t \in C$. *Тогда* $\int\limits_C \varphi\, d\mu \leqslant \int\limits_C \psi\, d\mu$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$, $\psi = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}$

– разложения вида (1), т.е. такие, что числа $\alpha_k \in \mathbb{R}$ попарно различны и положительны, множества $A_k \in \Sigma$ непусты и попарно не пересекаются, числа $\beta_i \in \mathbb{R}$ попарно различны и положительны, множества $B_i \in \Sigma$ непусты и попарно не пересекаются. По определению 2

$$\int\limits_C \varphi\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k),\ \int\limits_C \psi\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \mu(C \cap B_i). \quad (4)$$

Обозначим $E = \left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k \right) \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i \right)$, $A_0 = E \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k \right)$, $B_0 = E \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i \right)$. Ясно, что $E,\ A_0,\ B_0 \in \Sigma$, $\varphi(t) = 0$ на A_0 и $\psi(t) = 0$ на B_0. Полагая $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, из (4) получим

$$\int_C \varphi \, d\mu = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \cdot \mu(C \cap A_k), \quad \int_C \psi \, d\mu = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \cdot \mu(C \cap B_i). \quad (5)$$

Отметим еще, что $E = \bigsqcup_{k=0}^{m} A_k = \bigsqcup_{i=0}^{n} B_i$. (6)

(*). Докажем равенства (3). Очевидно $C = (C \setminus E) \sqcup (C \cap E)$. На множестве $C \setminus E$ обе функции φ и ψ равны 0. По свойству (c)

$$\int_{C \setminus E} (\varphi + \psi) d\mu = 0 = 0 + 0 = \int_{C \setminus E} \varphi d\mu + \int_{C \setminus E} \psi d\mu . \quad (7)$$

Из (6) имеем

$$C \cap E = C \cap E \cap E = C \cap \left(\bigsqcup_{k=0}^{m} A_k \right) \cap \left(\bigsqcup_{i=0}^{n} B_i \right) = \bigsqcup_{k=0}^{m} \bigsqcup_{i=0}^{n} D_{ki}, \quad (8)$$

где $D_{ki} = C \cap A_k \cap B_i$. На каждом множестве D_{ki}

$$\varphi(t) = \alpha_k, \;\; \psi(t) = \beta_i, \; (\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t) = \alpha_k + \beta_i .$$

По свойству (d)

$$\int_{D_{ki}} (\varphi+\psi) d\mu = (\alpha_k + \beta_i) \cdot \mu D_{ki} = \alpha_k \cdot \mu D_{ki} + \beta_i \cdot \mu D_{ki} = \int_{D_{ki}} \varphi \, d\mu + \int_{D_{ki}} \psi \, d\mu \quad (9)$$

Применяя теорему 4, из равенств (8) и (9) получим

$$\int_{C \cap E} (\varphi + \psi) \, d\mu = \sum_{i,k} \int_{D_{ki}} (\varphi + \psi) \, d\mu = \sum_{i,k} \int_{D_{ki}} \varphi \, d\mu + \sum_{i,k} \int_{D_{ki}} \psi \, d\mu =$$

$$= \int_{C \cap E} \varphi \, d\mu + \int_{C \cap E} \psi \, d\mu .$$

Отсюда и из (7) следует первое из равенств (3). Второе равенство (3) очевидно.

(**). Допустим теперь, что $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ для всех $t \in C$. Тогда

$$\int\limits_{D_{ki}} \varphi \, d\mu \leqslant \int\limits_{D_{ki}} \psi \, d\mu$$

для всех k и i. Действительно, если $D_{ki} \neq \varnothing$, то

$$\alpha_k = \varphi(t) \leqslant \psi(t) = \beta_i \text{ на } D_{ki},$$

так как $\varphi \leqslant \psi$ на множестве C, и по свойству (d)

$$\int\limits_{D_{ki}} \varphi \, d\mu = \alpha_k \cdot \mu(D_{ki}) \leqslant \beta_i \cdot \mu D_{ki} = \int\limits_{D_{ki}} \psi \, d\mu . \quad (10)$$

Если же $D_{ki} = \varnothing$, пусто, то обе части неравенства (10) равны 0.

Применяя теорему 4 и соотношения (8) и (10), имеем

$$\int\limits_C \varphi\, d\mu = \int\limits_{C \setminus E} \varphi\, d\mu + \int\limits_{C \cap E} \varphi\, d\mu = 0 + \int\limits_{C \cap E} \varphi\, d\mu = \int\limits_{C \cap E} \varphi\, d\mu =$$

$$\overset{(8)}{=} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{D_{ki}} \varphi\, d\mu \overset{(10)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{D_{ki}} \psi\, d\mu \overset{(8)}{=}$$

$$= \int\limits_{C \cap E} \psi\, d\mu = 0 + \int\limits_{C \cap E} \psi\, d\mu = \int\limits_{C \setminus E} \psi\, d\mu + \int\limits_{C \cap E} \psi\, d\mu = \int\limits_C \psi\, d\mu .$$

Утверждение (**) также доказано. □

Из утверждения (**) следует еще одно полезное свойство:

(e) *Пусть* $C \in \Sigma$ *и неотрицательные простые функции* φ, ψ *таковы, что* $\varphi(t) = \psi(t)$ *для всех* $t \in C$. *Тогда* $\int\limits_C \varphi\, d\mu = \int\limits_C \psi\, d\mu$.

§2. Интегрирование неотрицательных измеримых функций

1. Определение. Пусть $C \in \Sigma$ и функция $f : C \to [0, +\infty]$ измерима. В этом случае *интеграл от функции* f *по мере* μ *по множеству* C определяется равенством

$$\int_C f \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int_C \varphi \, d\mu , \quad (1)$$

где супремум берется по всем простым функциям $\varphi : S \to \mathbb{R}$ таким, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant f(t)$ для всех $t \in C$.

Если $B \subset C$, $B \in \Sigma$, то по определению $\int_B f \, d\mu = \int_C f\big|_B \, d\mu$.

Отметим простейшие свойства интеграла (1) от измеримой функции $f : C \to [0, +\infty]$.

(a) *Всегда* $0 \leqslant \int\limits_C f \, d\mu \leqslant +\infty$.

(b) *Если измеримая функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *совпадает на множестве* C *с простой функцией* $\psi : S \to [0, +\infty]$, *то новое определение интеграла от функции* $f = \psi$ *дает тот же результат, что и прежнее определение, т.е. справедливо равенство*

$$\int\limits_C f \, d\mu = \int\limits_C \psi \, d\mu , \qquad (2)$$

где левый интеграл понимается в смысле (1), *а правый – в смысле определения* 2 §1 гл.2.

Доказательство. В случае $f = \psi$ простая функция ψ подчиняется условию $0 \leqslant \psi \leqslant f$ на C и, значит, участвует в супремуме (1). Поэтому

$$\int\limits_C f \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \varphi \, d\mu \geqslant \int\limits_C \psi \, d\mu . \qquad (3)$$

С другой стороны, если простая функция φ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \varphi \leqslant f = \psi$ на C, то по части (**) теоремы 6 §1 справедливо неравенство $\int\limits_C \varphi \, d\mu \leqslant \int\limits_C \psi \, d\mu$.

Переходя здесь к супремуму по всем простым функциям φ, удовлетворяющим неравенству $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C, получим обратное неравенство

$$\int\limits_C f \, d\mu \leqslant \int\limits_C \psi \, d\mu . \qquad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) вытекает равенство (2). □

(c) *Если* B, $C \in \Sigma$ *и* $B \subset C$, *то* $\int\limits_B f \, d\mu \leqslant \int\limits_C f \, d\mu$.

Доказательство. Пусть простая функция φ участвует в определении интеграла $\int\limits_B f \, d\mu$, т.е. $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant f(t)$ для всех $t \in B$. Функция

$$\tilde{\varphi} : S \to \mathbb{R}, \ \tilde{\varphi}(t) = (\chi_B \varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad t \in B, \\ 0, & \text{если} \quad t \in S \setminus B, \end{cases}$$

является простой, удовлетворяет условию $0 \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant f$ на C, равна 0 на $C \setminus B$. Применяя теорему 4, свойства (c) и (e) из §1, получим

$$\int_C \tilde{\varphi}\, d\mu = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu + \int_{C\setminus B} \tilde{\varphi}\, d\mu = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu + \int_{C\setminus B} 0 \cdot d\mu = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu + 0 = \int_B \tilde{\varphi}\, d\mu = \int_B \varphi\, d\mu .$$

Поскольку $0 \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant f$ на C, то $\tilde{\varphi}$ участвует в определении интеграла $\int_C f\, d\mu$. Поэтому

$$\int_B f\, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \text{на } B}} \int_B \varphi\, d\mu = \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \text{на } B}} \int_C \tilde{\varphi}\, d\mu \leqslant \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \text{на } C}} \int_C \varphi\, d\mu = \int_C f\, d\mu . \square$$

(d) *Пусть* $C \in \Sigma$, *функции* $f, g : C \to [0, +\infty]$ *измеримы и* $0 \leqslant f \leqslant g$ *на* C. *Тогда* $\int_C f\, d\mu \leqslant \int_C g\, d\mu$.

Доказательство. Это очевидное следствие определения (1).

(e) *Если функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\alpha > 0$, *то* $\int\limits_C \alpha f \, d\mu = \alpha \cdot \int\limits_C f \, d\mu$.

Доказательство. Это следует из свойства (d) §1:

$$\alpha \cdot \int\limits_C f \, d\mu = \alpha \cdot \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \varphi \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \left(\alpha \cdot \int\limits_C \varphi \, d\mu \right) = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \alpha\varphi \, d\mu =$$

$$= \sup_{0 \leqslant \alpha\varphi \leqslant \alpha f} \int\limits_C \alpha \cdot \varphi \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant \alpha f} \int\limits_C \psi \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \psi/\alpha \leqslant f} \int\limits_C \psi \, d\mu = \sup_{0 \leqslant \psi/\alpha \leqslant f} \left(\alpha \cdot \int\limits_C \frac{\psi}{\alpha} \, d\mu \right) =$$

$$= \alpha \cdot \sup_{0 \leqslant \psi/\alpha \leqslant f} \int\limits_C \frac{\psi}{\alpha} \, d\mu = \alpha \cdot \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \varphi \, d\mu = \alpha \cdot \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C f \, d\mu . \ \square$$

(f) *Если функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\int\limits_C f \, d\mu < +\infty$, *то*

$$\mu \{ t \in C \, ; \, f(t) = +\infty \} = 0 .$$

Доказательство. Обозначим $B = \{t \in C\ ;\ f(t) = +\infty\}$. Допустим, что $\mu B > 0$. Так как пространство (S, Σ, μ) не имеет атомов бесконечной меры, найдется множество $D \in \Sigma$ такое, что $D \subset B$ и $0 < \mu D < +\infty$ (если $0 < \mu B < +\infty$, то положим $D = B$).

Для простых функций $\varphi_n = n\chi_D$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ на C, так как $\varphi_n(t) = 0$ при $t \in S \setminus D$ и $f(t) = +\infty$ при $t \in D$. Следовательно, $\int\limits_C f\, d\mu = \sup\limits_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int\limits_C \varphi\, d\mu \geqslant \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_C \varphi_n\, d\mu = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (n \cdot \mu D) = +\infty$.

Это противоречит условию, что $\int\limits_C f\, d\mu < +\infty$. □

(g) *Если функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима,* $\int\limits_C f\, d\mu < +\infty$ *и* $\alpha > 0$, *то множество* $B_\alpha = \{t \in C\ ;\ f(t) \geqslant \alpha\}$ *измеримо,* $\alpha \cdot \mu(B_\alpha) \leqslant \int\limits_C f\, d\mu$ *и, следовательно,* $\mu B_\alpha < +\infty$.

Доказательство. Измеримость множества B_α следует из измеримости функции f. Докажем, что есть последовательность множеств $D_n \in \Sigma$ конечной меры таких, что

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots, \text{все } D_n \subset B_\alpha \text{ и } \mu B_\alpha = \lim_{n \to \infty} \mu D_n. \quad (5)$$

Если $\mu B_\alpha < +\infty$, то положим $D_n = B_\alpha$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mu B_\alpha = +\infty$ и $\beta = \sup\{\mu D\ ;\ D \subset B_\alpha,\ \mu D < +\infty\}$.

Допустим, что $\beta < +\infty$. Выберем множества $D_n \subset B_\alpha$ так, что

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots \text{ и } \beta - \frac{1}{n} < \mu D_n < \beta.$$

Для множества $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots$ имеем $D \subset B_\alpha$ и $\mu D = \beta$. Коль скоро $\beta < +\infty$, то $B_\alpha \setminus D$ все еще имеет меру $\mu(B_\alpha \setminus D) = +\infty$. Поскольку в (S, Σ, μ) нет атомов бесконечной меры, то существует множество $E \subset B_\alpha \setminus D$ с мерой $0 < \mu E < +\infty$. Для множества $E \sqcup D$ имеем $E \sqcup D \subset B_\alpha$ и $\mu(E \sqcup D) = \mu E + \mu D = \mu E + \beta > \beta$ вопреки определению числа β.

Таким образом, $\beta = +\infty$ и согласно определению β найдутся множества $D_n \subset B_\alpha$ с мерой $\mu(D_n) < +\infty$ такие, что $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu D_n = \beta = +\infty = \mu B_\alpha$.

Функции $\varphi_n = \alpha \cdot \chi_{D_n}$, $n \in \mathbb{N}$, – простые. Если $t \in C \setminus D_n$, то $\varphi_n(t) = 0 \leqslant f(t)$. Если $t \in D_n$, то $t \in B_\alpha$ и $\varphi_n(t) = \alpha \leqslant f(t)$. Таким образом, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ на множестве C и, следовательно, функции φ_n участвуют в определении интеграла $\int\limits_C f\, d\mu$. Поэтому

$$\alpha \cdot \mu D_n = \alpha \cdot \mu(C \cap D_n) = \int\limits_C \varphi_n\, d\mu \leqslant \int\limits_C f\, d\mu .$$

Применяя теорему о непрерывности меры (теорема 6 §2 гл.1) и равенство (5), имеем теперь

$$\alpha \cdot \mu B_\alpha = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \mu D_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot \mu D_n) \leqslant \int\limits_C f\, d\mu . \square$$

(h) *Пусть* B, $C \in \Sigma$, $B \subset C$, *функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $f = 0$ *на* $C \setminus B$. *Тогда* $\int\limits_B f\, d\mu = \int\limits_C f\, d\mu$.

Доказательство. Если φ – простая функция и $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C, то $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на B и $\varphi = f = 0$ на $C \setminus B$. Применяя следствие 5 §1, получим $\int\limits_C \varphi\, d\mu = \int\limits_B \varphi\, d\mu \leqslant \int\limits_B f\, d\mu$.

Переходя здесь к супремуму по простым функциям φ таким, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C, получим $\int\limits_C f\, d\mu \leqslant \int\limits_B f\, d\mu$. Обратное неравенство $\int\limits_B f\, d\mu \leqslant \int\limits_C f\, d\mu$ справедливо по свойству (c).

(i) *Если* $C \in \Sigma$ *и* $\mu C = 0$, *то каждая функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\int\limits_C f \, d\mu = 0$.

Доказательство. Измеримость функции f следует из полноты пространства (S, Σ, μ) в смысле Лебега (любое подмножество множества меры 0 измеримо). Равенство $\int\limits_C f \, d\mu = 0$ очевидно, так как по свойству (c) §1 $\int\limits_C \varphi \, d\mu = 0$ для каждой простой функции φ.