

- Операция
- Решение
- Оперирующая сторона
- Активные средства операции
- Стратегия оперирующей стороны
- Действующие факторы операции
- ✓ Определенные
- ✓ Неопределенные
- Критерий операции
- Математическая модель операции

Типы моделей

❖ Материальные

- *Физические*
- *Статические*
- *Динамические*
- ✓ *Имитирующие*
- ✓ *Аналоговые*

❖ Идеальные

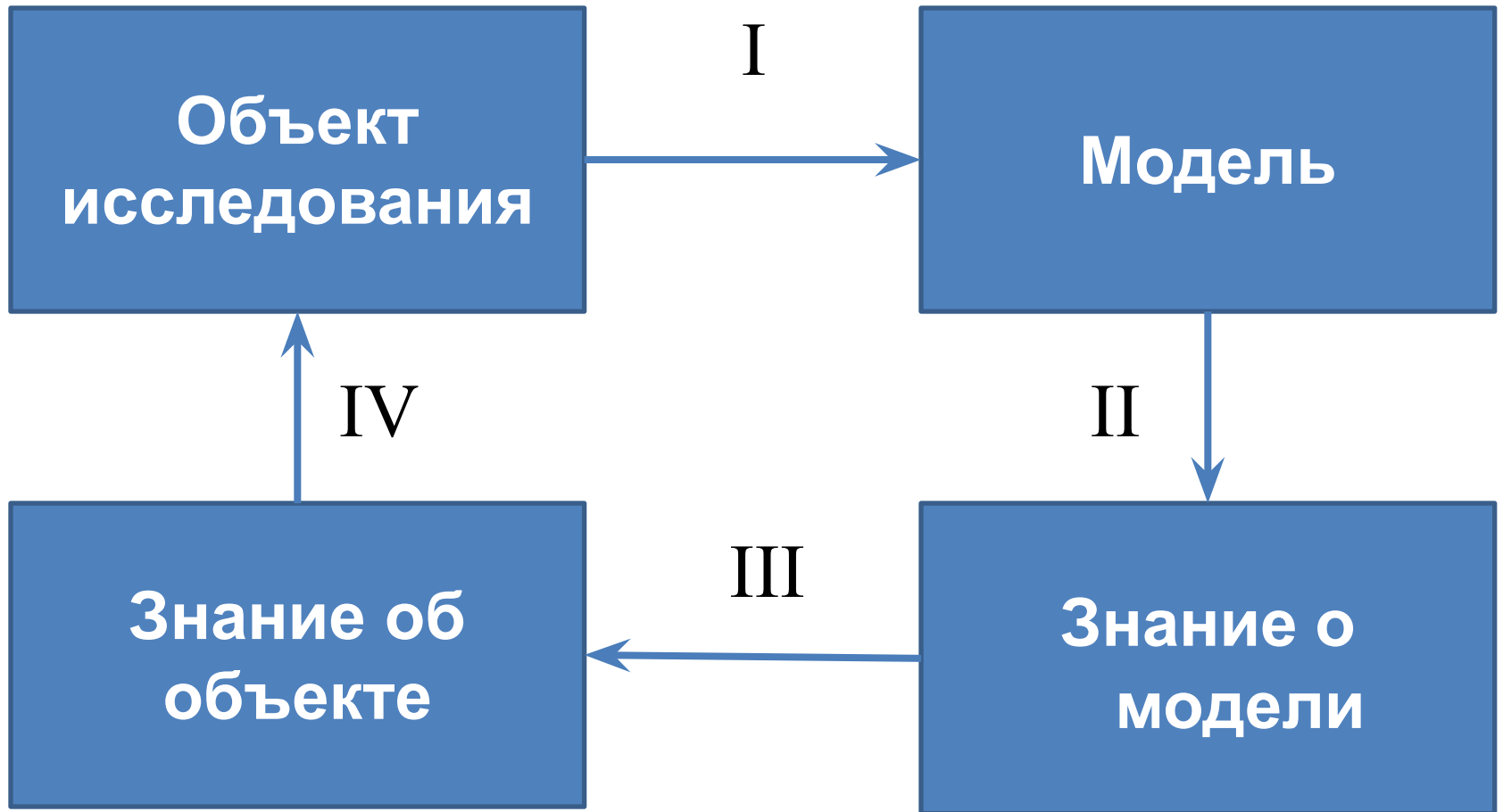
- *Образные*

Требования к мат. моделям

- Универсальность
- Точность
- Адекватность
- Экономичность

Универсальность математической модели характеризуют полноту отражения в ней свойств реального объекта. Математическая модель отражает не все, а лишь некоторые свойства реального объекта. Например в транспортной задаче линейного программирования отражаются затраты на перевозку единицы груза и расстояние, но не маршрут.

Схема процесса моделирования



Простейшая модель оптимального планирования

Фирма работает на современном рынке, выпускает **3 вида продукции**, используя **4 вида ресурсов**. Затраты прочих ресурсов скалькулированы. Фирма работает на коротком периоде, следовательно, капитал фиксированный. Необходимо найти оптимальный план работы фирмы.

Продукция	Цена [т.руб./шт.]	Денежные средства [т.руб.]	Рабочая сила [чел-час./шт.]	Затраты времени оборудования, [час/шт.]	
				Группа оборудова ния - 1	Группа оборудова ния - 2
1	80	50	10	5	9
2	40	10	4	2	4
3	60	30	6	1	4
Объемы ресурсов в месяц		1800 [т. руб./мес.]	920 [чел- час/мес.]	140 [час/мес.]	320 [час/мес.]



- Формализация переменных

X_1, X_2, X_3 - количество единиц продукции
[шт./мес.]

- Формализация ограничений

$$\text{ГО-1} \quad 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 140$$

$$\text{ГО-2} \quad 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 320$$

$$\text{РС} \quad 10x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 920$$

$$\text{ДС} \quad 50x_1 + 10x_2 + 30x_3 \leq 1800$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$$

- Формализация целевой функции

$$\text{В} \quad 80x_1 + 40x_2 + 60x_3 \rightarrow \max$$

Анализ эффективности использования ресурсов видами продукции

	1 вид продукци и	2 вид продукци и	3 вид продукци и
ДС	$80/50=1,6$	$40/10=4$	$60/30=2$
РС	$80/5=16$	$40/2=20$	$60/1=60$
ГО-1	$80/9=8,2$	$40/4=10$	$60/4=15$
ГО-2	$80/16=5$	$40/4=10$	$60/6=10$

1 вид продукции не эффективен => не войдет в оптимальный план => X_1 может быть исключен и модель примет вид

$$10x_2 + 30x_3 \leq 1800$$

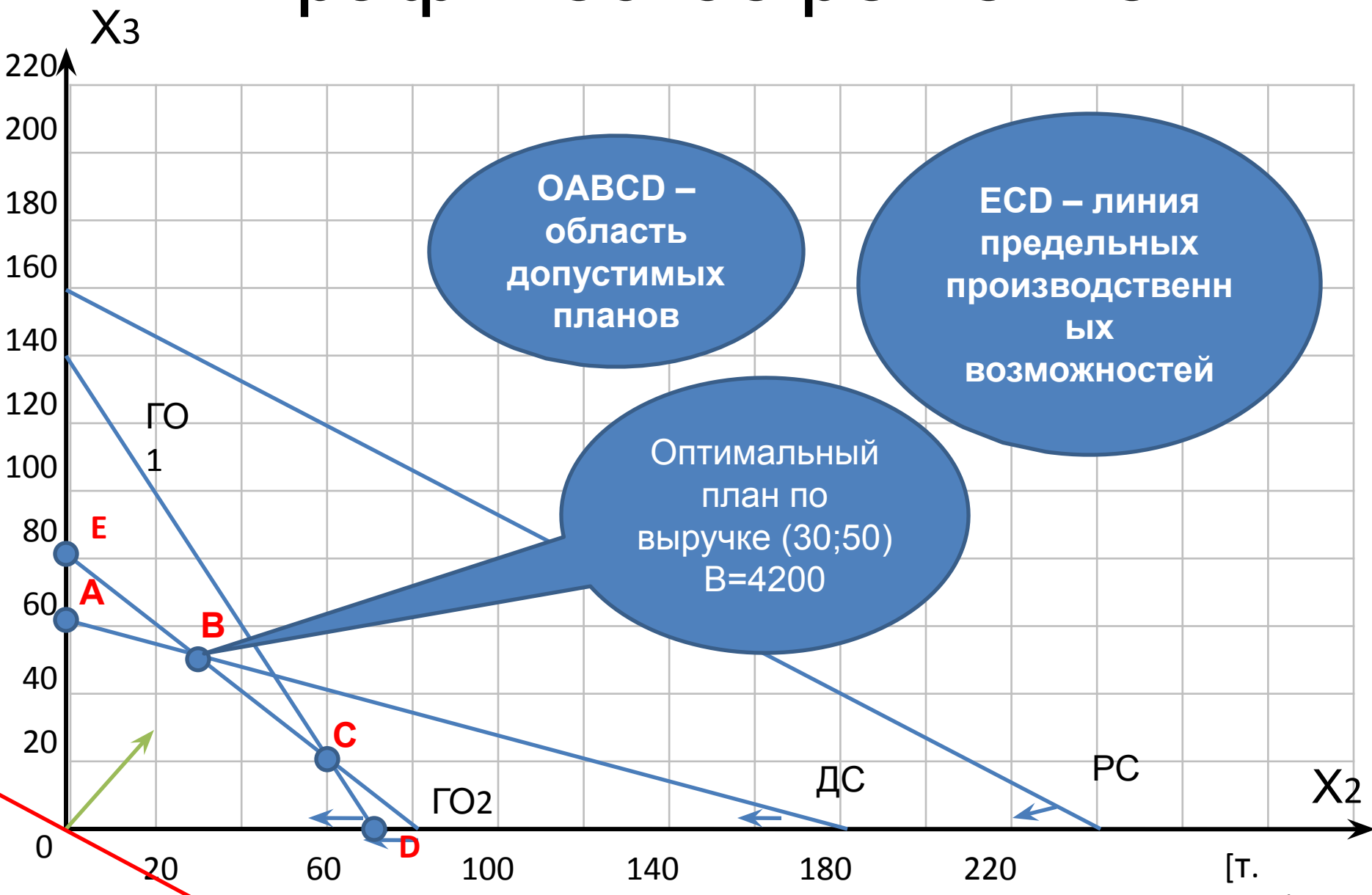
$$4x_2 + 6x_3 \leq 920$$

$$2x_2 + x_3 \leq 140$$

$$4x_2 + 4x_3 \leq 320$$

$$40x_2 + 60x_3 \rightarrow \max$$

Графическое решение



Исследование эффективности вовлеченного дефицитного ресурса

ГО-1 $2x_2 + 1x_3 \leq 140$

ГО-2 $4x_2 + 4x_3 \leq 320$

РС $4x_2 + 6x_3 \leq 920$

ДС $10x_2 + 30x_3 \leq y$

$$x_2, x_3 \geq 0 \text{ [т.шт./мес.]}$$

В $40x_2 + 60x_3 \rightarrow \max$

необходимых
финансовых
ресурсов

$$F(y) = \max f(x) / y=0 \dots Y$$

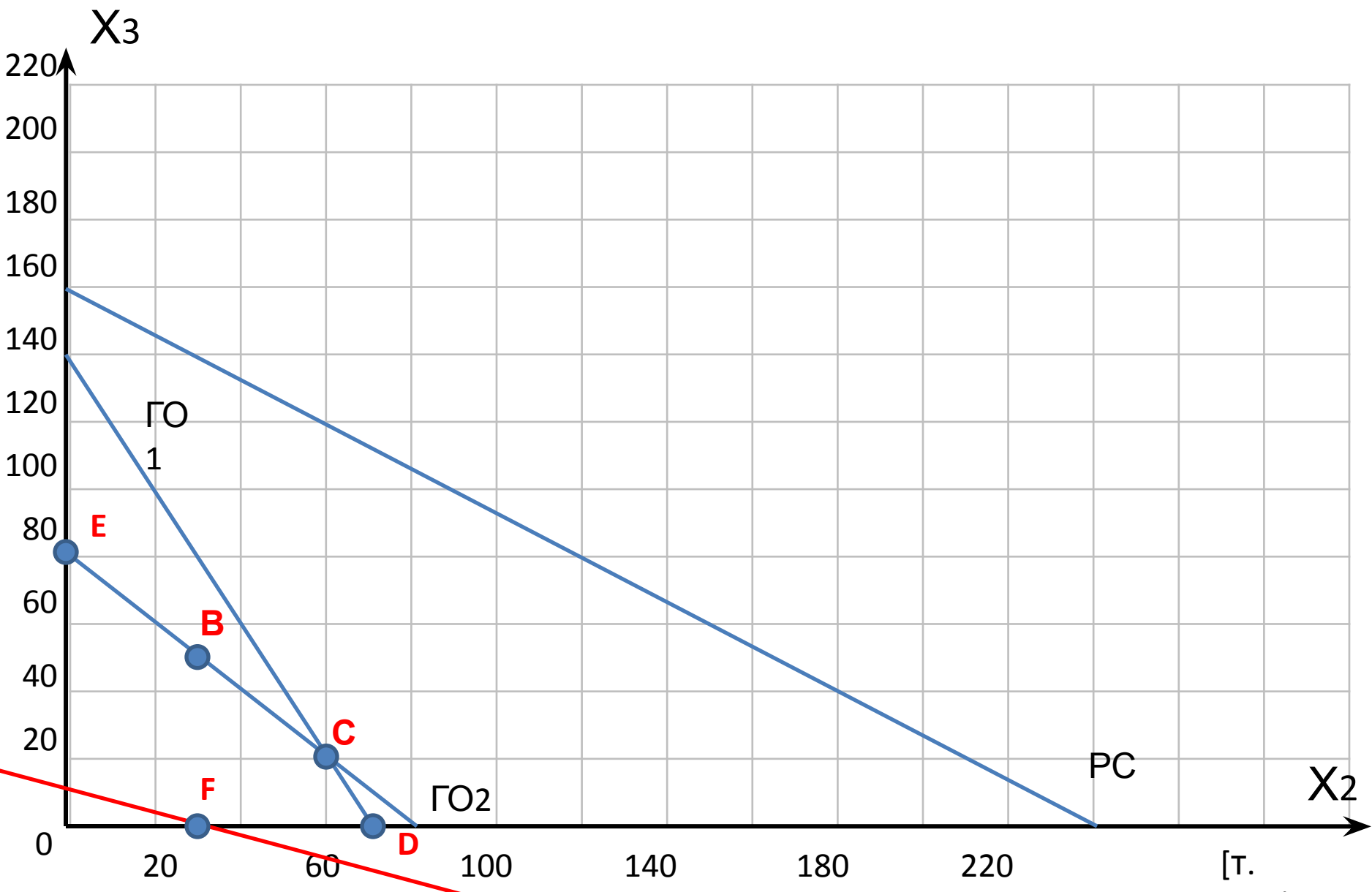
$$F(y) = \max (40x_2 + 60x_3) / y=0 \dots Y$$

$$F(y) = \max (40x_2 + 60x_3)/y=0\dots Y$$

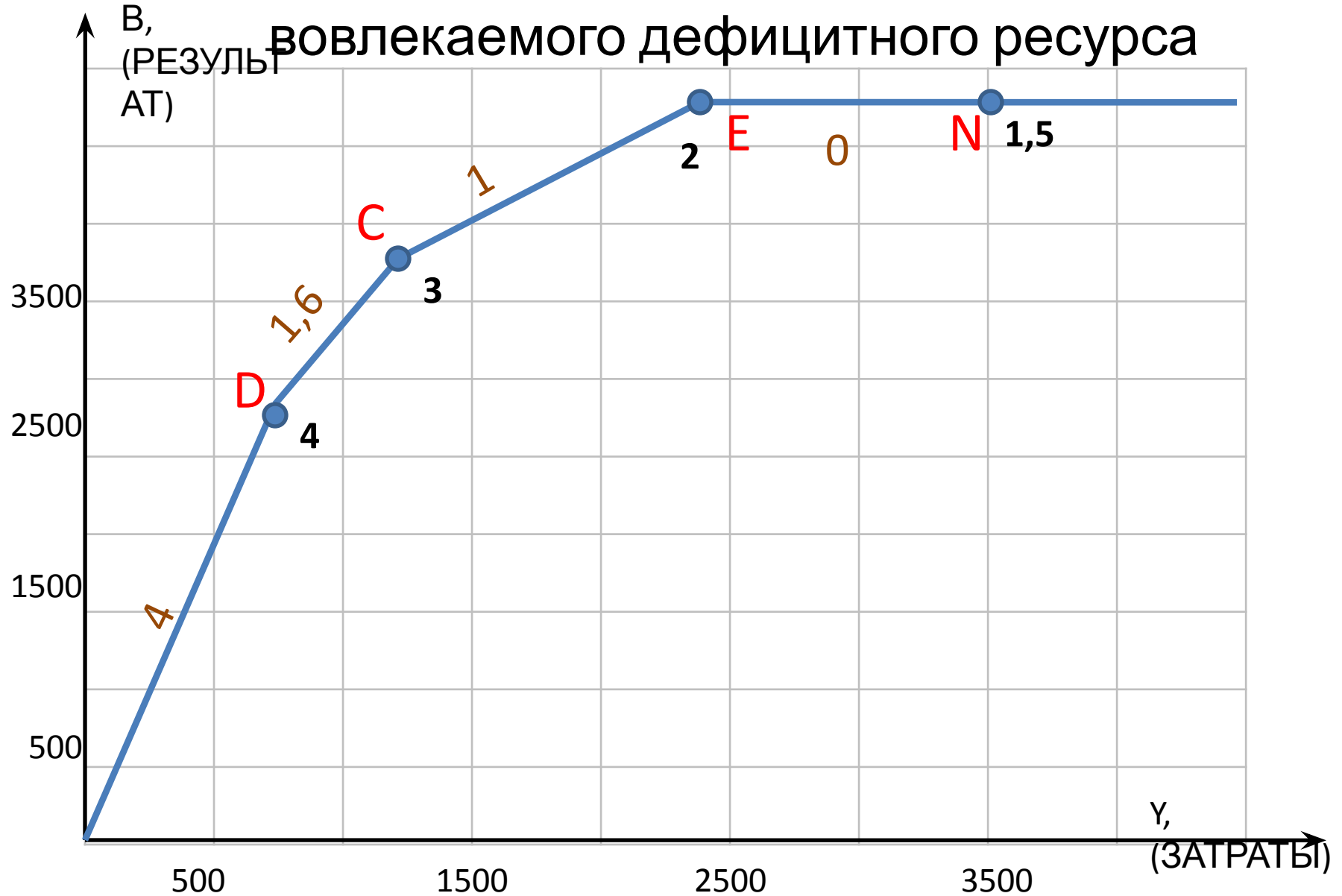
набор оптимальных планов

	Y	X₂	X₃	B	Абс.	Относи т.
	0	0	0	0		
F	300	30	0	1200	4	4
D	700	70	0	2800	4	4
C	1200	60	20	3600	3	1,6
B	2400	30	60	4800	2	1
E	3600	0	80	4800	1,5	0

Движение оптимума



Зависимость выручки и прибыль от объема вовлекаемого дефицитного ресурса



Взаимные задачи

- Исходная – максимизация некоторого результата при ограничении по дефицитному ресурсу и множестве прочих ограничений.
- Взаимная – минимизация затрат дефицитного ресурса на заданный результат. При определенных условиях эти задачи имеют один и тот же оптимальный план.

ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА	ВЗАИМНАЯ ЗАДАЧА
Результат $f(X) \rightarrow \max$	ДР $h(X) \rightarrow \min$
ДР $h(X) \leq a$	Результат $f(X) \geq C$
$AX \leq B$	$AX \leq B$

Необходимое и достаточное условие совпадения планов: Планы совпадают, если в качестве целевого значения результата во взаимной задаче задать его оптимальные значения из исходной задачи.

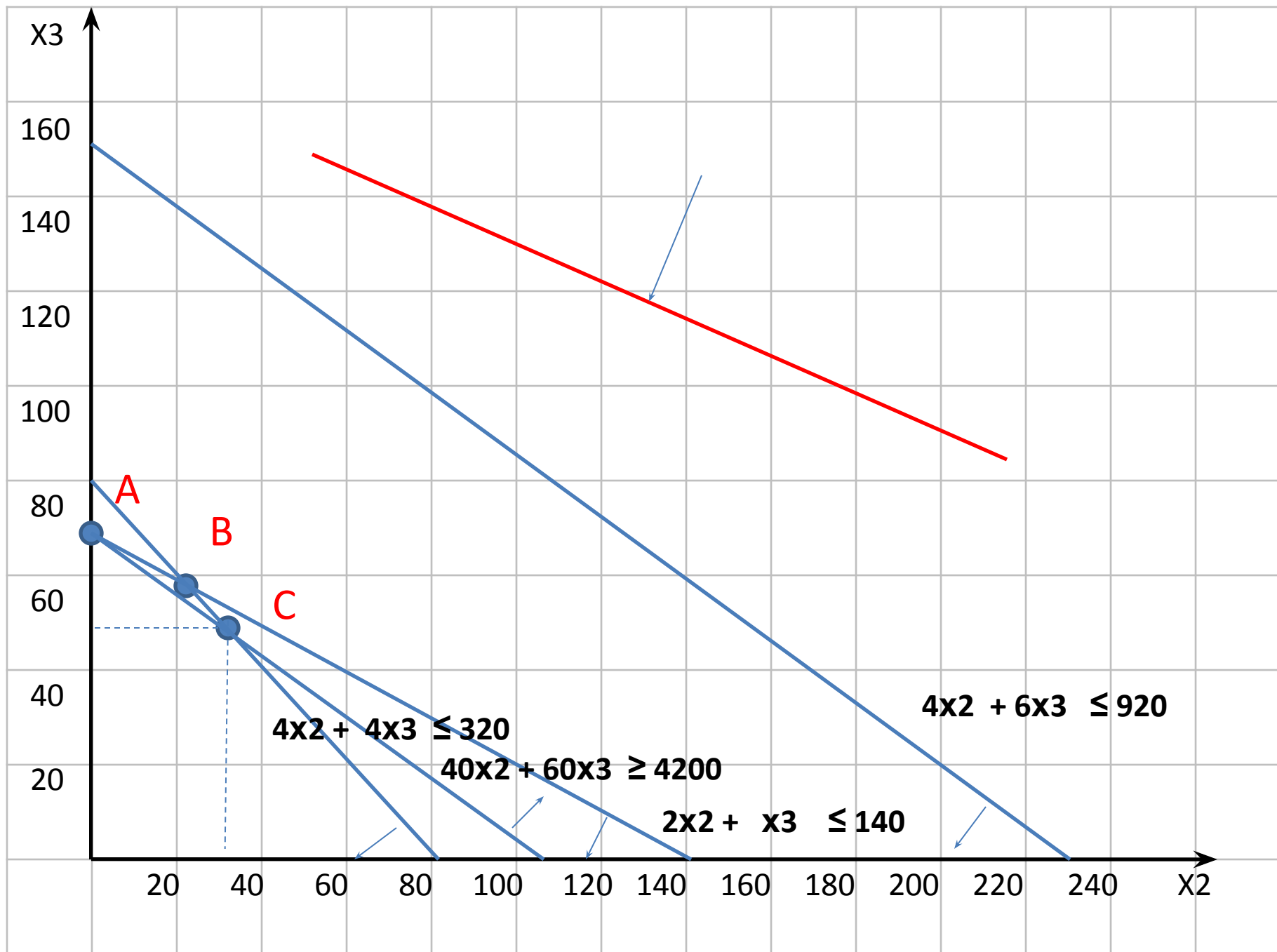
«Замечательное правило» – Второе условие
Если планы совпадают, то $\min$ затрат ДР во взаимной задаче в точности соответствует его наличию в исходной системе.

Задача

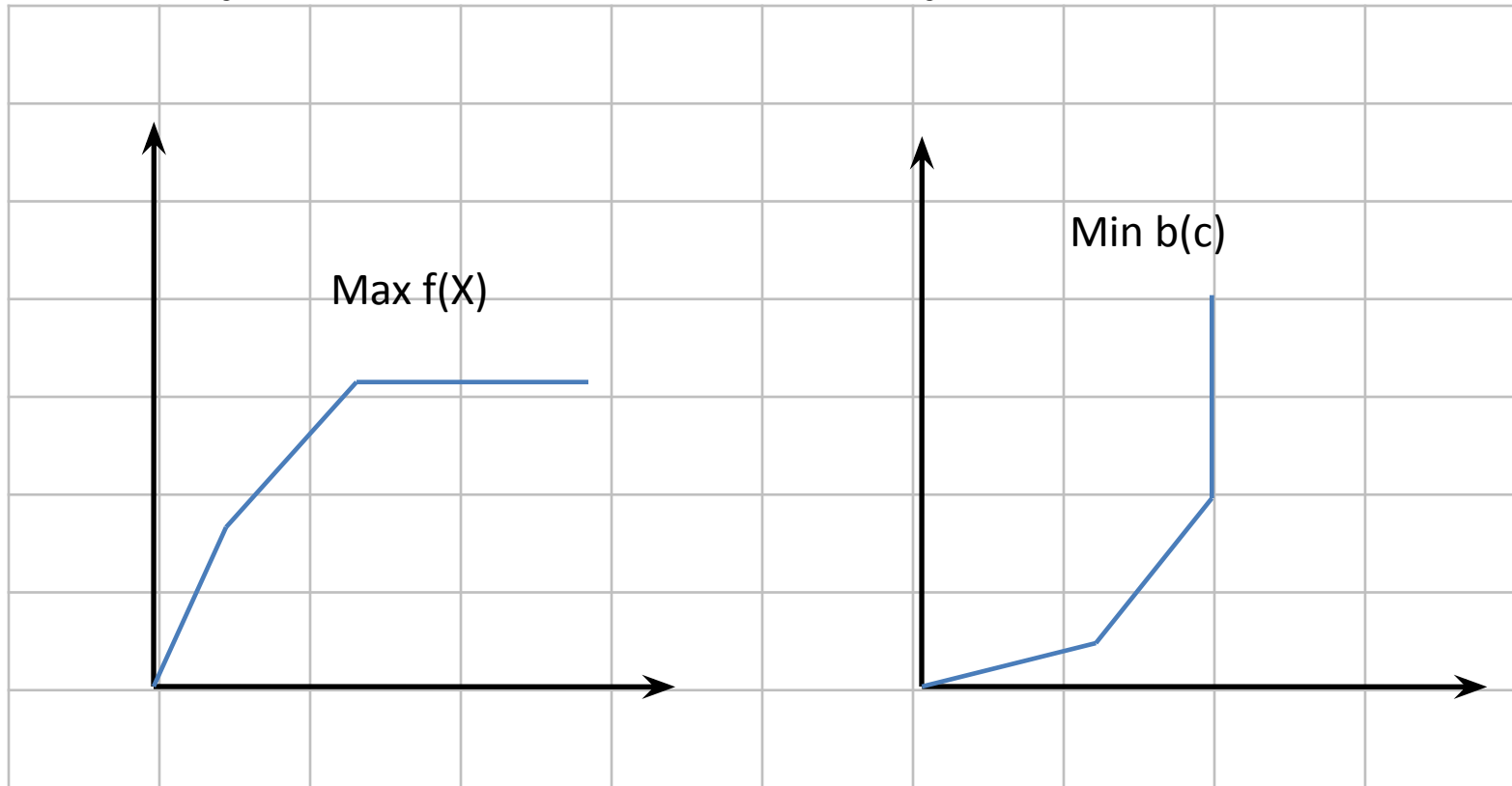
Максимизация прибыли при ограничении по Дефицитному ресурсу и прочих ограничениях

$$\begin{array}{ll} \text{В} & 40x_2 + 60x_3 \rightarrow \max \\ \text{ГО-1} & 2x_2 + x_3 \leq 140 \\ \text{ГО-2} & 4x_2 + 4x_3 \leq 320 \\ \text{РС} & 4x_2 + 6x_3 \leq 920 \\ \text{ДС} & 10x_2 + 30x_3 \leq 1800 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ДС} & 10x_2 + 30x_3 \rightarrow \\ & \min \\ \text{ГО-1} & 2x_2 + x_3 \leq 140 \\ \text{ГО-2} & 4x_2 + 4x_3 \leq 320 \\ \text{РС} & 4x_2 + 6x_3 \leq 920 \\ \text{В} & 40x_2 + 60x_3 \geq 4200 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$



Если решить обе задачи как параметрические,
то получим взаимнообратные функции



Модель фирмы, максимизирующей прибыль на совершенном рынке

Рассмотрим фирму совершенного рынка, которая собирается организовать производство продукции, **цены** на которую на рынке **серьезно скажут**. Идентичную продукцию фирма может производить по **двум технологиям**. Необходимо **построить модель** фирмы, максимизирующей прибыль.

Технология	Затраты [тыс. руб/ед]	Затраты, вр		
		ГО-1	ГО-2	ГО-3
1	200	-	1	2
2	100	1	3	3
Располагаемы фонды рабочего времени		50	180	240

$FC = 6000$ тыс.руб/мес

Исходная задача

$$\Pi(x_1 + x_2) \rightarrow \max$$

$$x_2 \leq 50$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 180$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 240$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$TC = VC + FC \leq y, y = \overline{0, Y}$$

$$TC = 200x_1 + 100x_2 + 6000 \leq y, y = \overline{0, Y}$$

Взаимная задача

$$TC = 200x_1 + 100x_2 \rightarrow \min$$

$$x_2 \leq 50$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 180$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 240$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq q, q = \overline{0, Q}$$

Рис.1 Равновесие на рынке

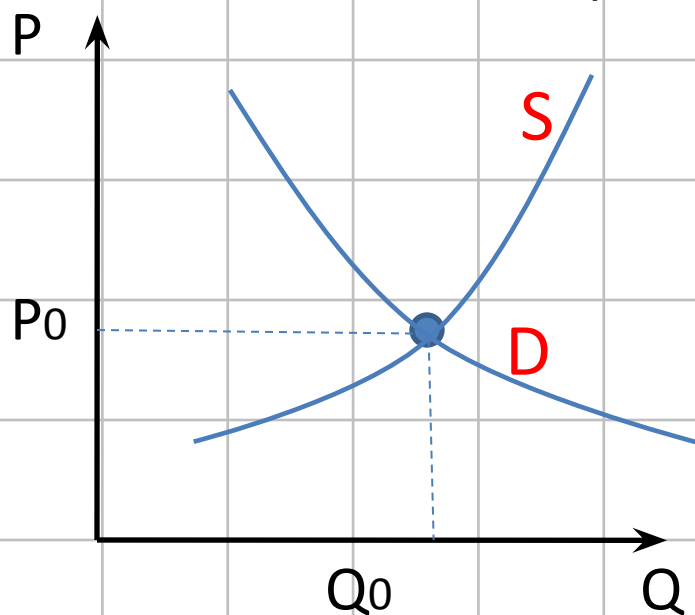


Рис.2

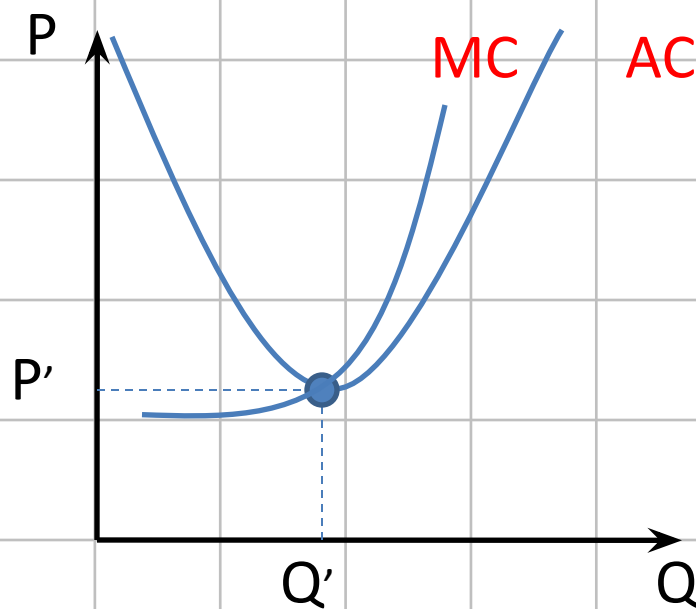
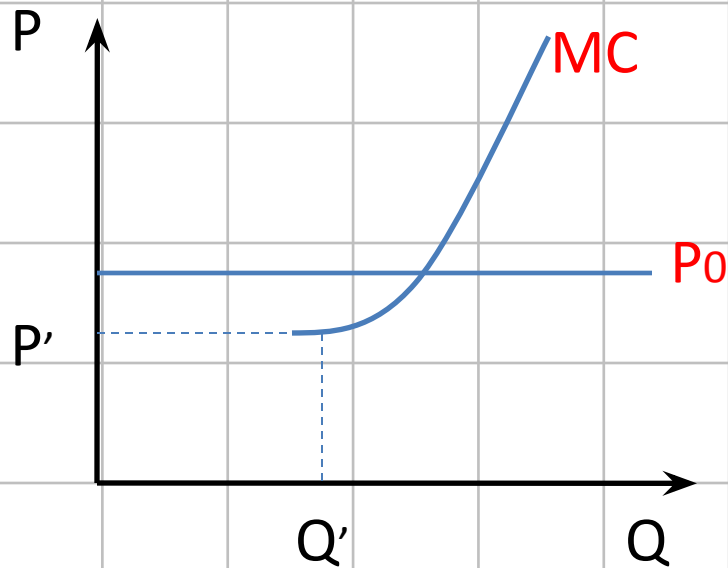
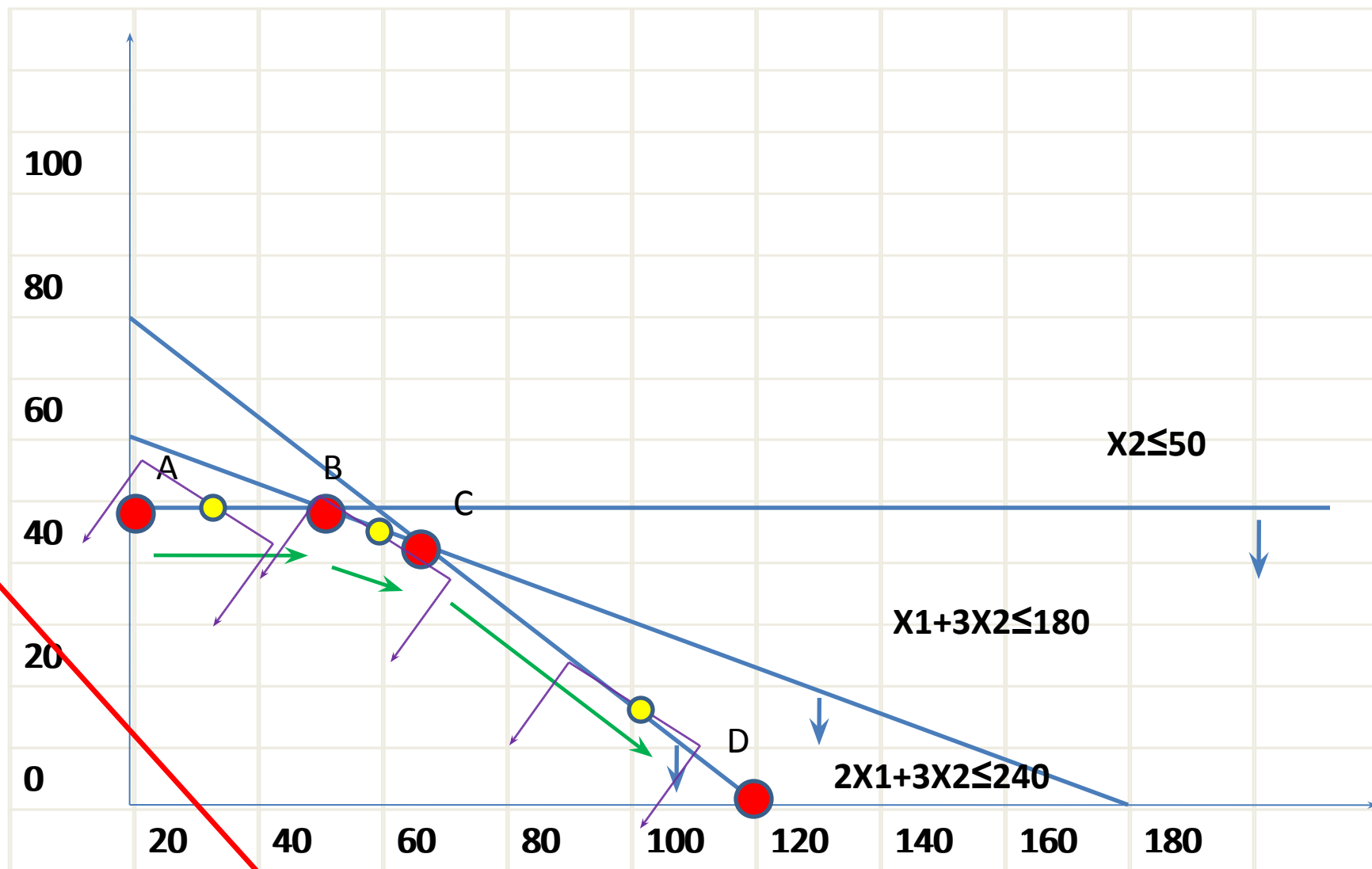


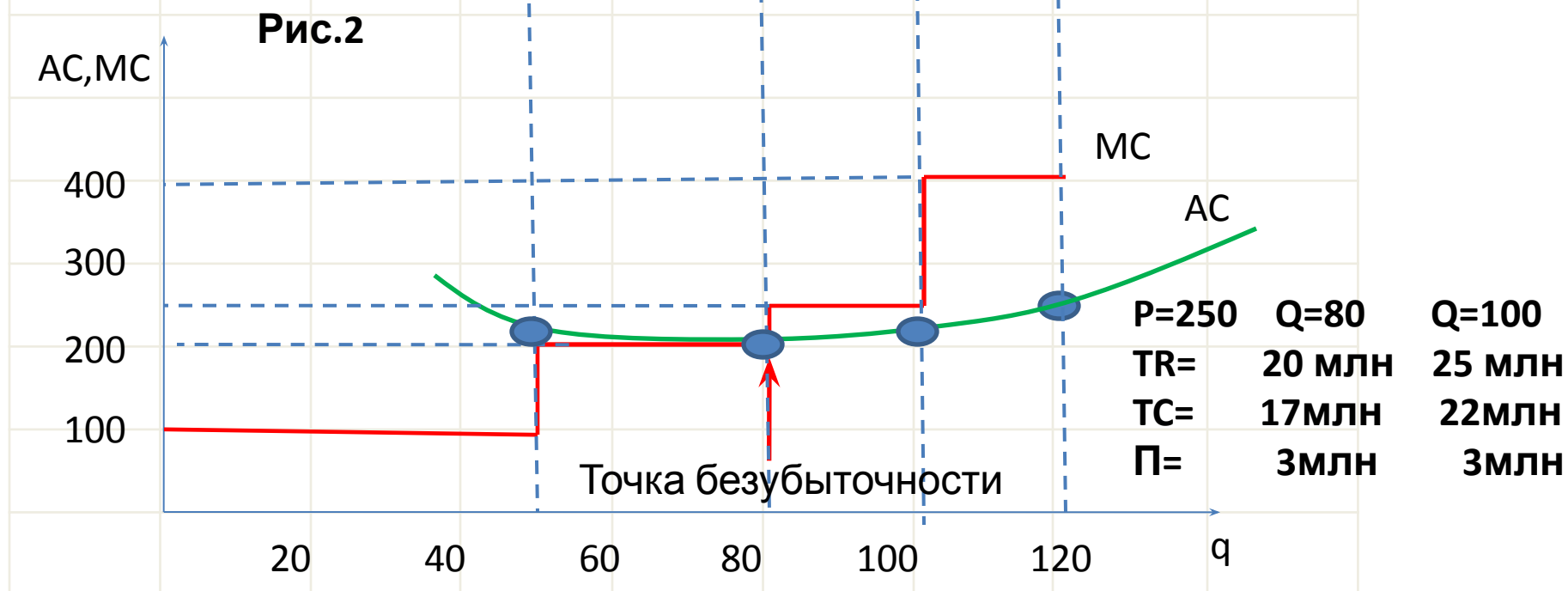
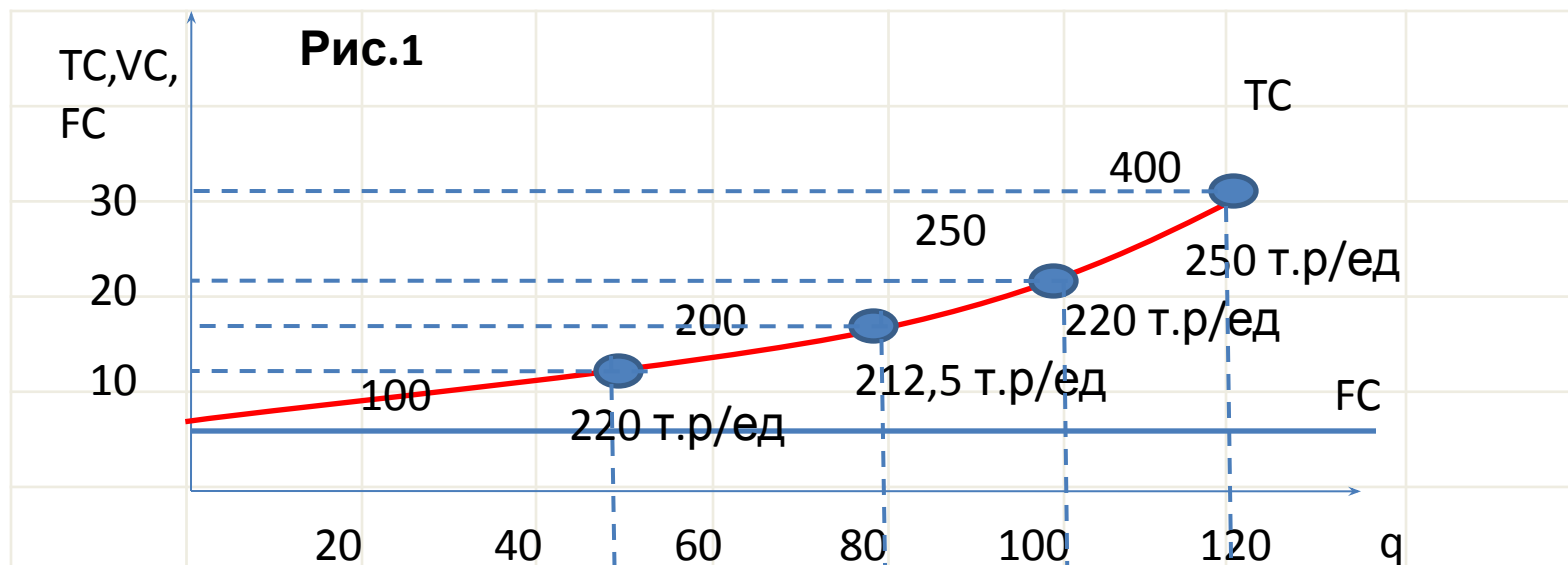
Рис.3



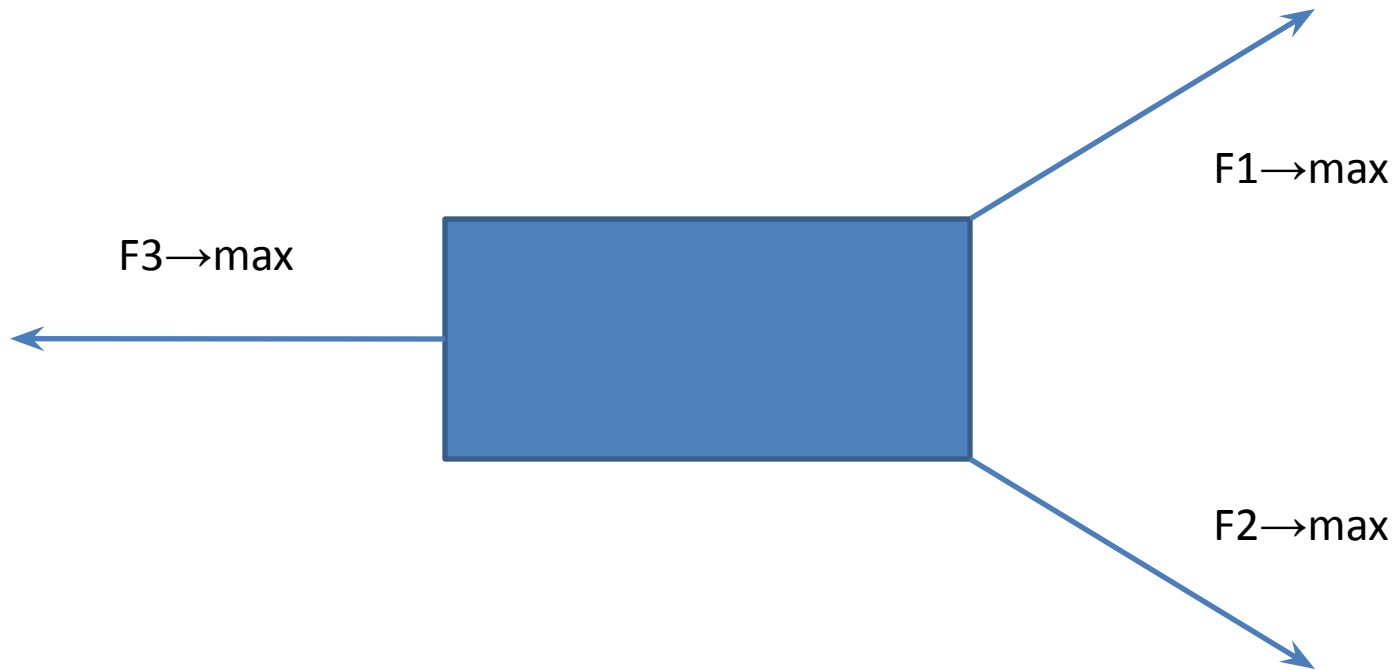
Функция предложения определяется
затратами фирмы (MC)
Функция спроса фирмы – прямая
цены



	q	$X_{1опт}, X_{2опт}$	V _{сопт}	T _{сопт}		q	$X_{1опт}, X_{2опт}$	V _{сопт}	T _{сопт}
0	0	0,0	0	6000		60	10,50	7000	13000
	10	0,10	1000	7000		70	20,50	9000	15000
	20	0,20	2000	8000	B	80	30,50	11000	17000
	30	0,30	3000	9000		90	45,45	13500	19500
	40	0,40	4000	10000	C	100	60,40	16000	22000
A	50	0,50	5000	11000		110	90,20	20000	26000
					D	120	120,0	24000	30000



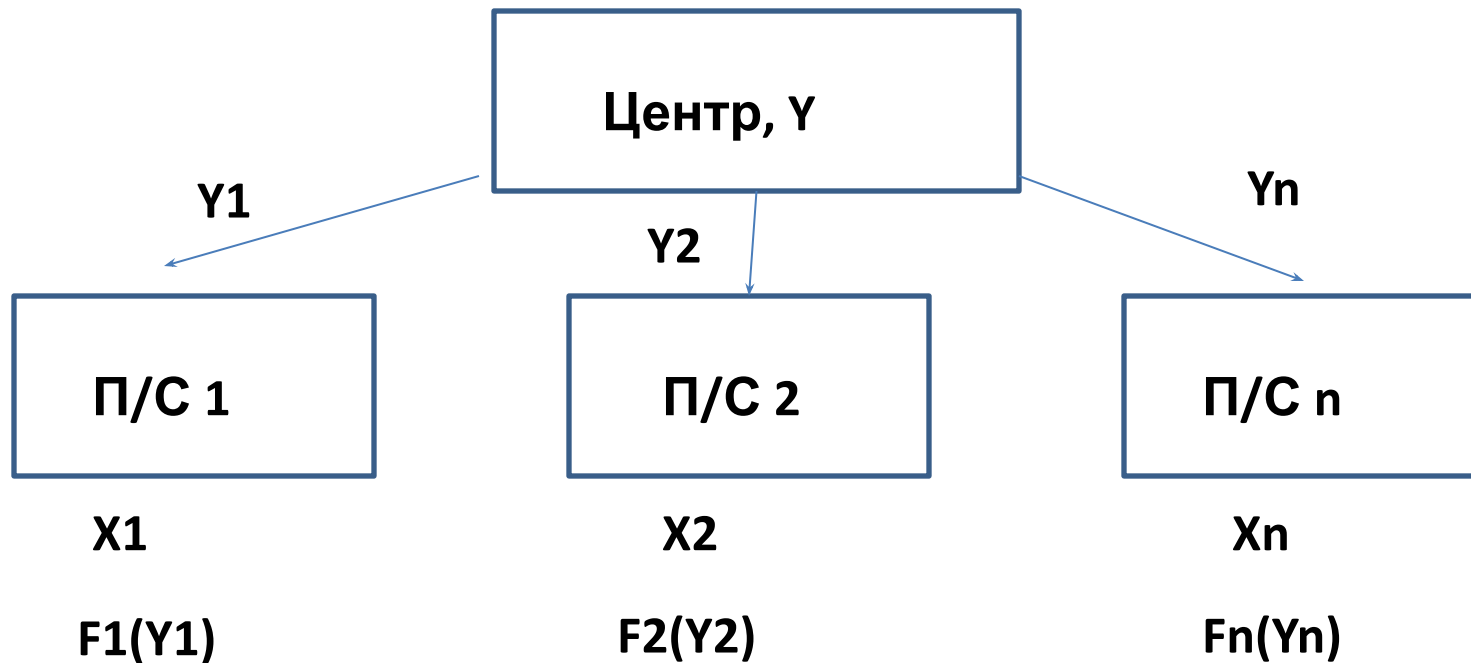
Оптимальные декомпозиции экономических систем



В ряде случаев не удастся (не имеет смысла) построить единую модель большой системы.

Тогда прибегают к декомпозиции:

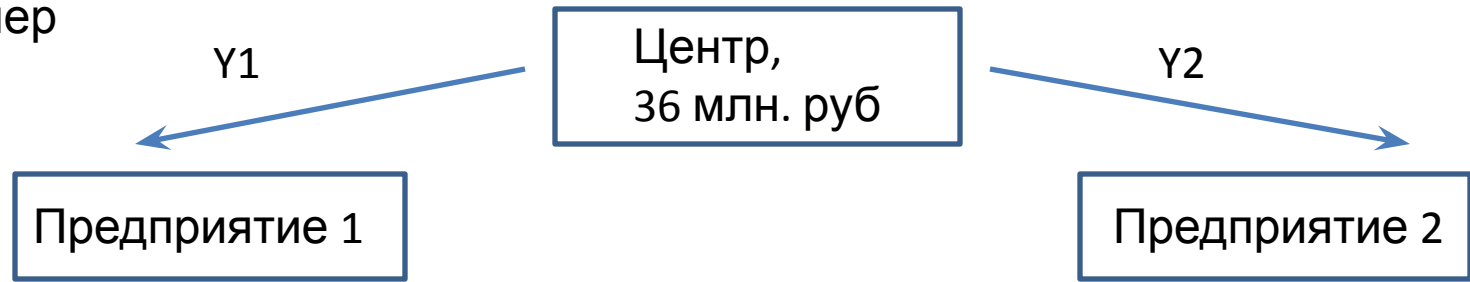
- 1). Описывается оптимальное поведение каждой системы
- 2). Строится модель согласования с целью получения глобального оптимума



$$F_1(Y_1) + F_2(Y_2) + \dots + F_n(Y_n)$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq Y$$

Центр осуществляет управление подсистемами
путем распределения дефицитного ресурса

Пример



x_1, x_2

x_3, x_4

		Цена Тыс. руб/ед	Затраты тыс.руб/ед	Выпуск	Собств-й ресурс	Прибыль
I	x1	5	2	≤ 3	2	3
	x2	5	3	-	1	2
II	x3	4	2	-	1	2
	x4	4	1	≥ 2	2	3

$$\begin{aligned}
 \text{П} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max & b_1 &= 12 \\
 \text{ФР} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leq 36 & b_2 &= 12 \\
 \text{CP1} \quad & 2x_1 + 1x_2 & & \leq 12 \\
 \text{CP2} \quad & & 1x_3 + 2x_4 & \leq 12 \\
 & x_1 & & \leq 3 \\
 & & x_4 & \geq 2
 \end{aligned}$$

1). Подсистемы описывают собственные оптимальные поведения

$$3X_1 + 2X_2 \rightarrow \max$$

$$\text{ФР1} \quad 2X_1 + 3X_2 \leq Y_1$$

$$\text{СР1} \quad 2X_1 + 1X_2 \leq 12$$

$$X_1 \leq 3$$

$$2X_3 + 3X_4 \rightarrow \max$$

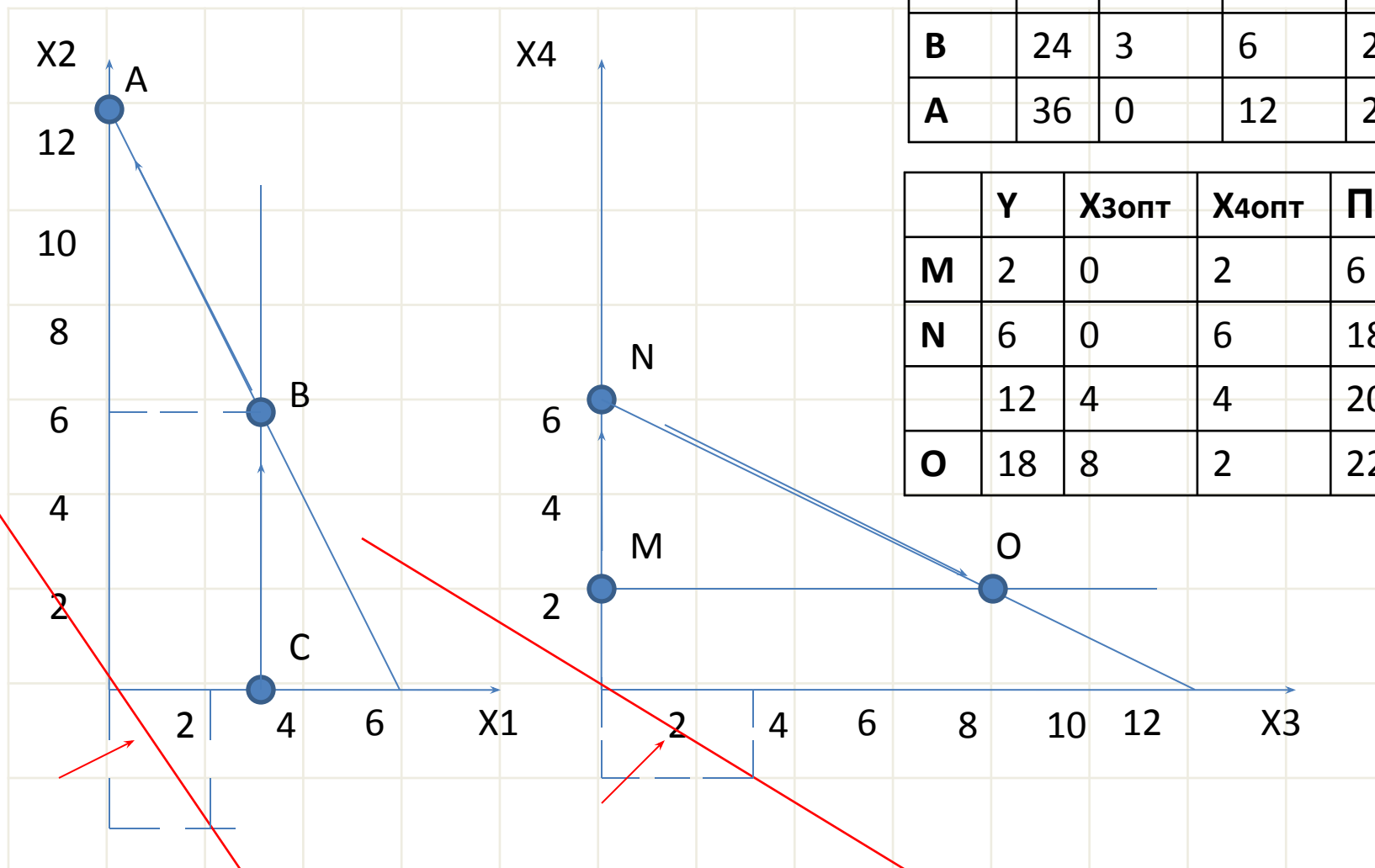
$$\text{ФР2} \quad 2X_3 + 1X_4$$

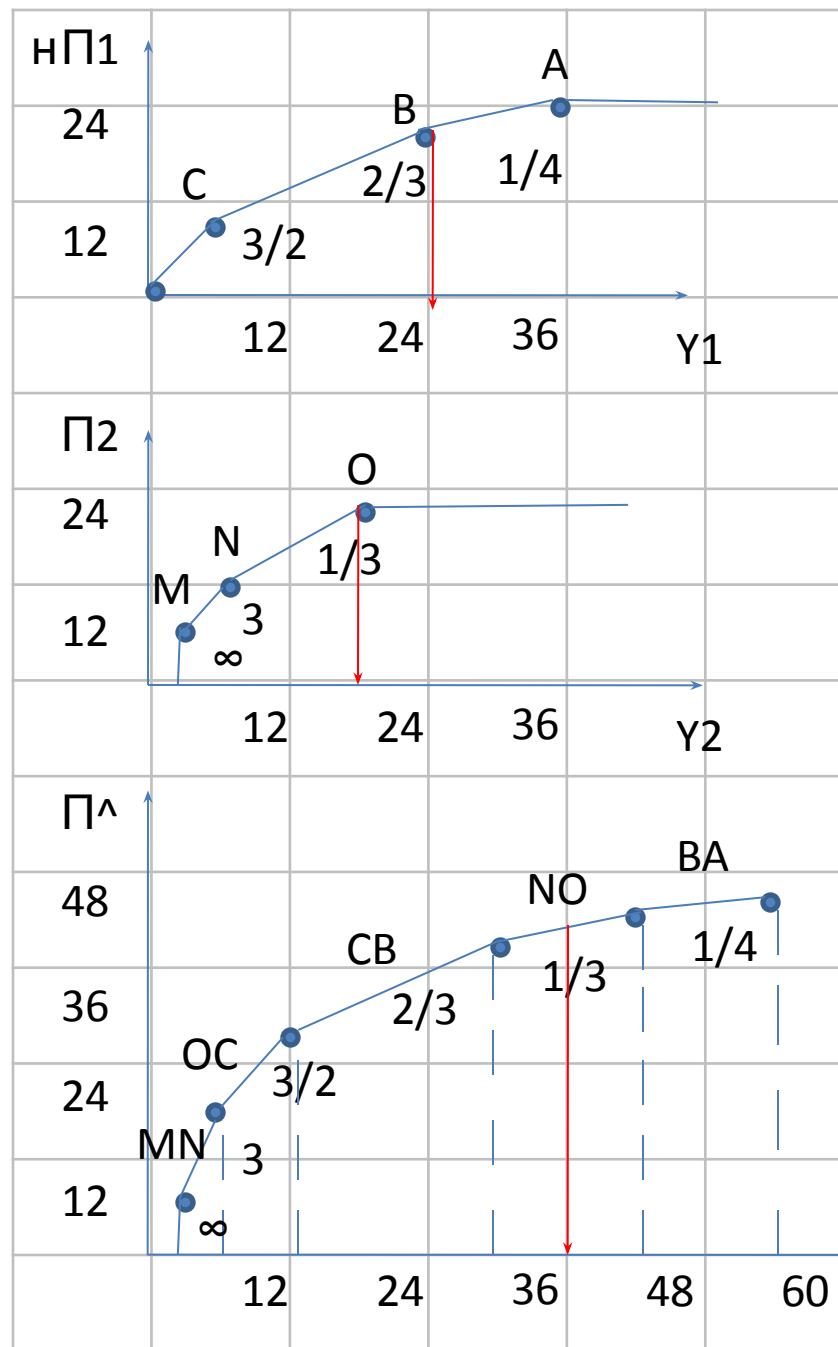
$$\text{СР2} \quad 1X_3 + 2X_4 \leq 12$$

$$X_4 \geq 2$$

	Y	X _{1опт}	X _{2опт}	П ₁
	0	0	0	0
С	6	3	0	9
В	24	3	6	21
А	36	0	12	24

	Y	X _{3опт}	X _{4опт}	П ₂
М	2	0	2	6
Н	6	0	6	18
	12	4	4	20
О	18	8	2	22





	Y	X1^	X2^	Π1
	0	0	0	0
C	6	3	0	9
B	24	3	6	21
A	36	0	12	24

	Y	X3^	X4^	Π2
M	2	0	2	6
N	6	0	6	18
	12	4	4	20
O	18	8	2	22

Полученные зависимости
передаются в центр.
 $E_{NO} = 1/3 = E_H$

2). Центр должен решить задачу распределения ресурса и согласования поведения

Центр строит интегральную функцию эффективности.

Определяется E_n – норматив эффективности. Норматив доводится до сведения предприятия

$$\begin{aligned} F_1(Y_1) + F_2(Y_2) \\ \rightarrow \max \\ y_1 + y_2 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= 24 \\ Y_2 &= 18 \end{aligned}$$

3). Предприятия составляют заявки на ресурс

$$\begin{aligned} Y_{1\text{опт}} &= 24 \\ Y_{2\text{опт}} &= 12 \end{aligned}$$

4). Центр определяет оптимальные распределения ресурсов

$$\begin{aligned} X_{1\text{опт}} &= 3 \\ X_{3\text{опт}} &= 4 \\ X_{2\text{опт}} &= 6 \\ X_{4\text{опт}} &= 4 \\ \Pi_1 &= 21 \\ \Pi_2 &= 20 \end{aligned}$$

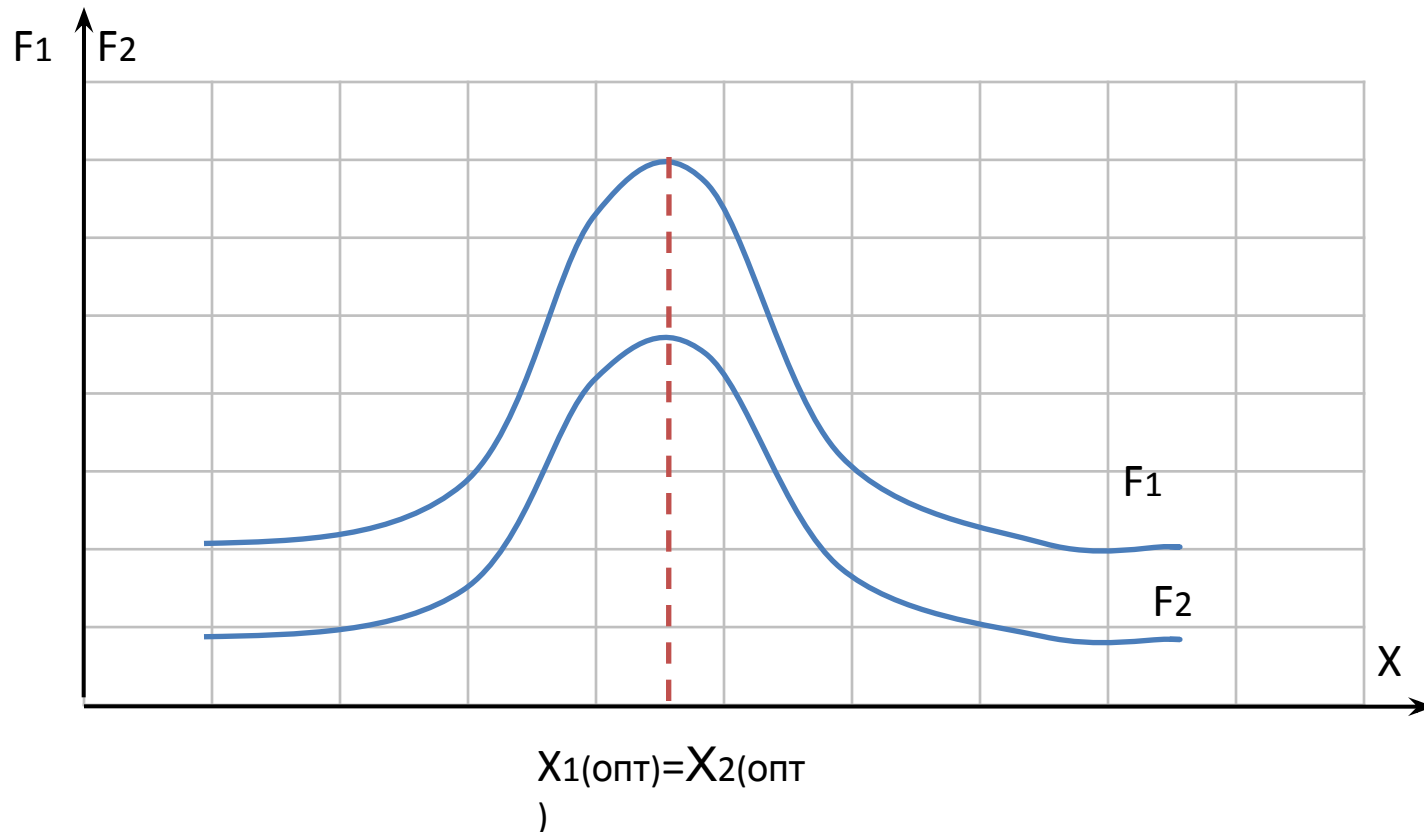
5). Предприятия находят оптимальные планы

Многокритериальный выбор

- Уйти от многокритериальности
- Решить задачу по каждому из критериев, найти субоптимальное решение
- Найти критерий более высокого уровня
- Метод последовательных уступок
- Поиск компромисса на множестве Парето
- Метод свертывания критериев

Многокритериальный выбор

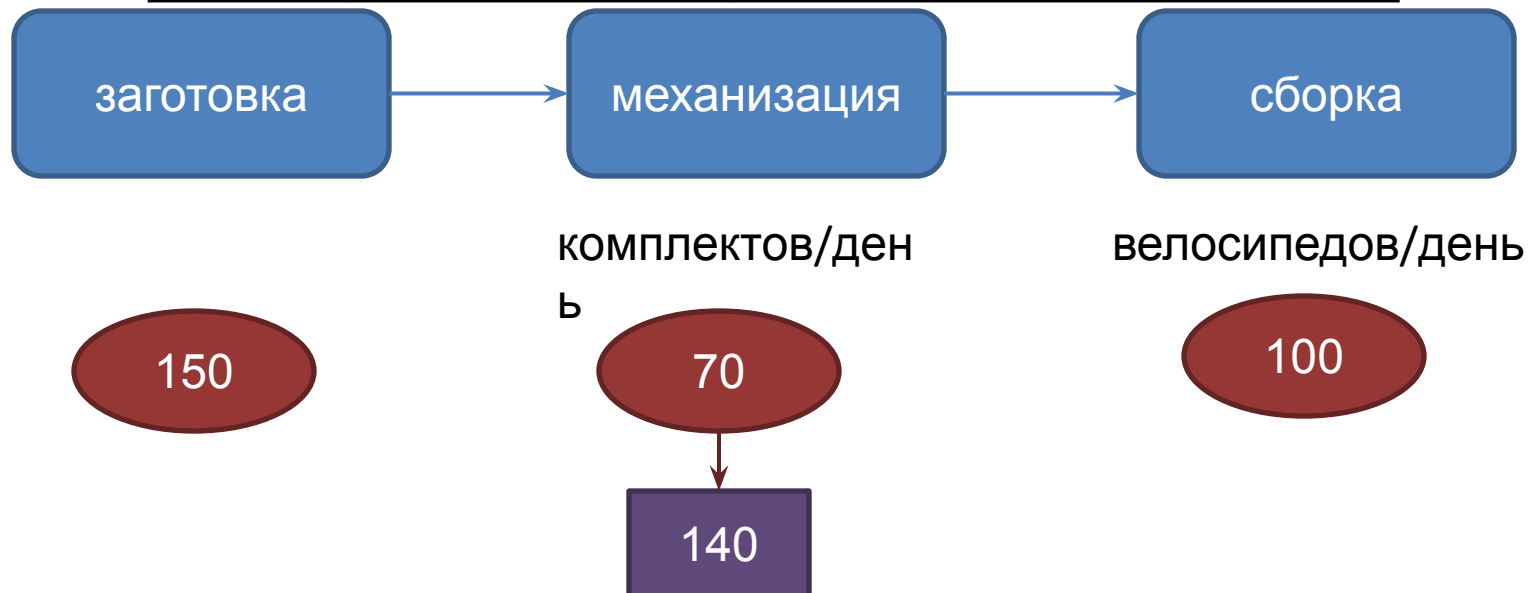
Поиск субоптимального решения



Многокритериальный выбор

Поиск критерия более высокого уровня

Станок	Цена [млн. руб.]	Производительность [шт./час]
1	1	10
2	0,5	5



Многокритериальный выбор

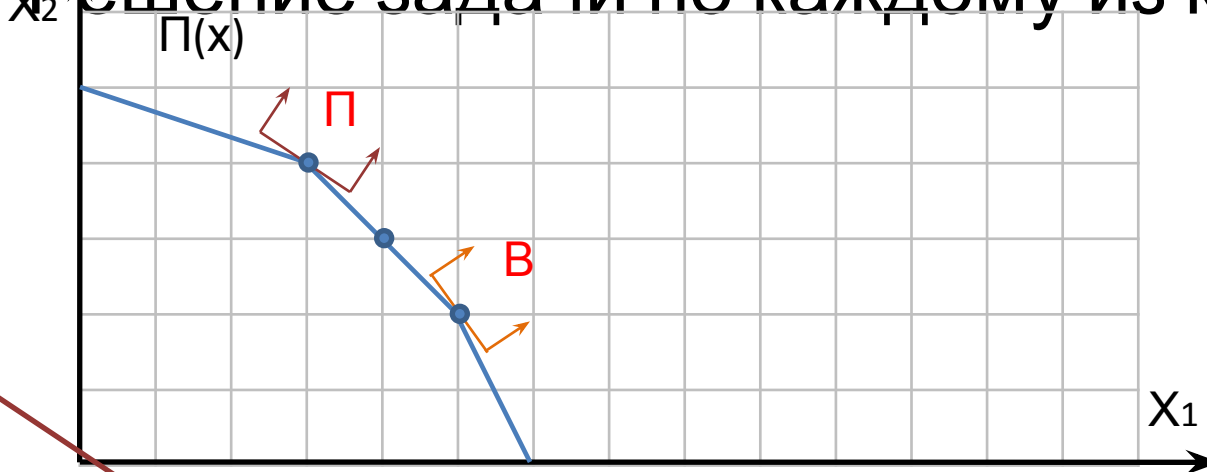
Метод последовательных уступок предполагает

✓ Упорядочение критериев по важности

1. $\Pi \rightarrow \max$

2. $B \rightarrow \max$

✓ Решение задачи по каждому из критериев



Многокритериальный выбор

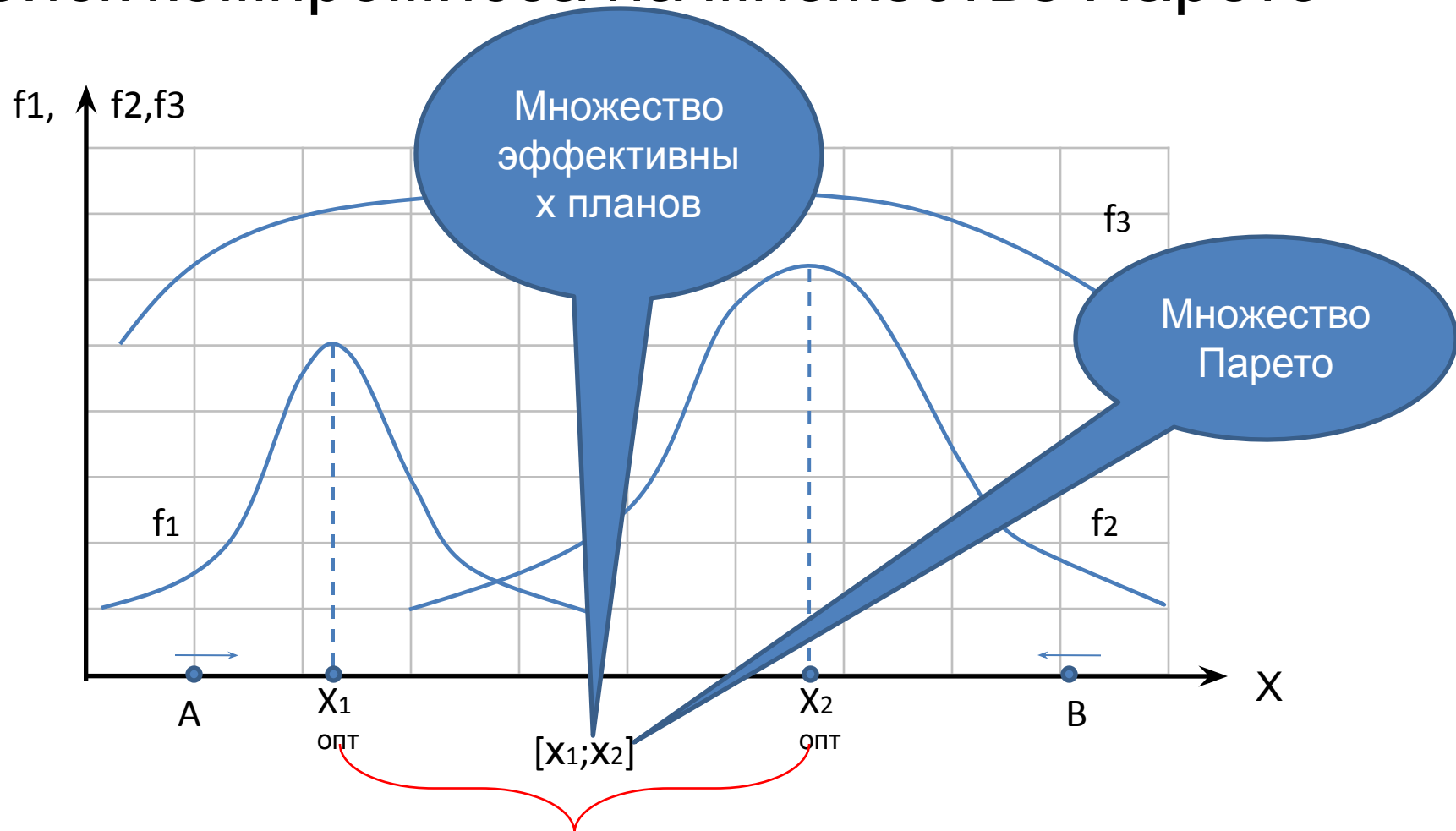
Метод последовательных уступок

- ✓ Если оптимальные решения не совпадают, вводится коэффициент уступки α , и новое ограничение $P(x) \geq (1-\alpha) \cdot P_{\text{опт}}$
- ✓ Решается задача по второму критерию с новым ограничением



Многокритериальный выбор

Поиск компромисса на множестве Парето



Многокритериальный выбор

Поиск компромисса на множестве Парето

✓ $f_i(x) \geq f_k$

✓ $\lambda_i = [f_i(x) - f_k] / [F_k - f_k], \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

✓ $f_i(x) \geq f_k + \lambda \Delta_i$

Задача.

Фирма хочет максимизировать три показателя: *прибыль, выручку и дивиденды.*

$$В \quad 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

$$П \quad 5x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

$$Д \quad 4x_1 + 1x_2 \rightarrow \max$$

$$ГО-1 \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 42$$

$$ГО-2 \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$ГО-3 \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$ГО-4 \quad 4x_1 \leq 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Решение

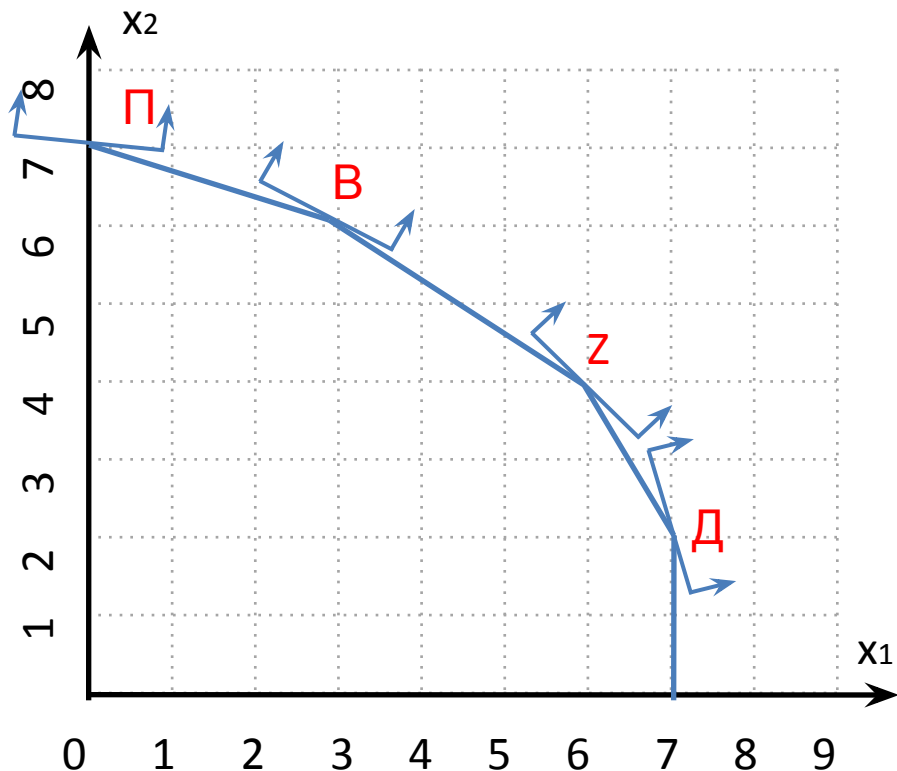
Решаем за
результат

риев и
чений

	ГО-1	$2x_1 + 6x_2$	≤ 42	план (x_1 ;
	ГО-2	$2x_1 + 3x_2$	≤ 24	
В →та х	ГО-3	$4x_1 + 2x_2$	≤ 16	3;6
	ГО-4	$4x_1$	≤ 28	
		x_1, x_2	≥ 0	
П →та х	280	140	7	0;7
Д →та х (•) Z	220 280	75 110	30 28	7;2 6;4

Из полученных
вариантов
осуществляется
выбор

	$\frac{B}{B_{оп}}$ т	$\frac{\Pi}{\Pi_{оп}}$ т	$\frac{Д}{Д_{оп}}$ т	max min	Σ
B →max	1	0,96	0,6	0,6	2,56
Π →max	0,93	1	0,23	0,23	2,16
Д →max	0,73	0,54	1	0,54	2,27
z	0,93	0,79	0,93	0,79	2,64



Критерии выбора:

1. $\max_s \min_i [f_i(x) / F_i]$
2. $\sum (\beta_i \cdot [f_i(x) / F_i]) \rightarrow \max$



Многокритериальный выбор

Свертывание критериев

$$В \quad 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

$$П \quad 5x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

$$Д \quad 4x_1 + 1x_2 \rightarrow \max$$

Свертка:

$$\frac{20x_1+40x_2}{300} + \frac{5x_1+20x_2}{140} + \frac{4x_1+x_2}{30} \rightarrow \max$$

$$0,24x_1 + 0,3x_2 \rightarrow \max$$