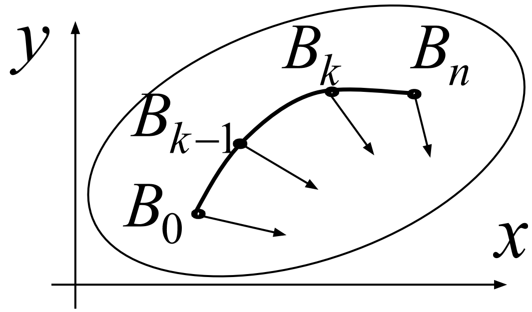
Лекция 2-5
11.2. Криволинейный интеграл по координатам (2 – го рода).

- **Задача о работе силового поля.**

Предположим, что в области D **задано плоское силовое поле. Т. е. на материальную точку в** D **действует сила** $\vec{F}$**, определенная для всякой точки** $(x,y)\in D,\ \vec{F}=\vec{F}(x,y).$ **Считаем, что поле стационарное (не зависит от времени** t **)**

$$\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}.$$

- **Пусть материальная точка движется по линии** $L.$



Разобьем линию на n **частей точками** $B_0,\ B_1, ...,\ B_n.$

Работа на отрезке $\overrightarrow{B_{k-1}B_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$ **равна**

$\Delta A_k = \left|\vec{F_k}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_{k-1}B_k}\right| \cos\alpha_k$ **или** $\Delta A_k = \vec{F_k} \cdot \overrightarrow{B_{k-1}B_k}.$

Тогда $\Delta A_k = P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$

Просуммируем по всем отрезкам

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$$

Выражение в правой части называется интегральной суммой по линии $L.$ **Пусть** Δs_k **длина частичного участка разбиения кривой** $L.$

Переходя к пределу $\max \Delta s_k \to 0 \ (n \to \infty)$, получим истинную величину работы

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k .$$

Определение. Криволинейным интегралом 2-го рода по линии L называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k = \int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

В частности, если $Q(x,y)\equiv 0,$ то интеграл примет вид

$$\int_L P(x,y)\,dx$$

и называется криволинейным интегралом по координате $x.$

Если $P(x,y)\equiv 0,$ то интеграл примет вид

$$\int_L Q(x,y)\,dy$$

и называется криволинейным интегралом по координате $y.$

Работа силового поля $\vec{F}$ по кривой L есть

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy,$$

где $P(x,y),\ Q(x,y)$ - проекции силового поля на оси координат.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
Оно сводится к вычислению определенных интегралов.

Например, вычислим криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L P(x,y)\,dx$ **от точки** B **до точки** C **по линии** L,

заданной параметрически $x = x(t),\ y = y(t),$ **где функции** $x(t),\ y(t)$ **непрерывны со своими производными. Рассмотрим интегральную сумму**

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k, \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}).$$

Из формулы Лагранжа $\Delta x_k = x'(\theta_k)\Delta t_k,$

$$\theta_k \in [t_{k-1}, t_k], \qquad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

В качестве промежуточной точки (ξ_k, η_k) **выберем**

$$\xi_k = x(\theta_k),\ \eta_k = y(\theta_k).$$

- **Преобразованная сумма** $\sum\limits_{k=1}^{n} P\big(x(\theta_k), y(\theta_k)\big) x'(\theta_k) \Delta t_k$

будет обыкновенной интегральной суммой для функции одной переменной $P\big(x(t), y(t)\big) x'(t)$,
а ее предел – определенным интегралом

$$\int\limits_{t_B}^{t_C} P\big(x(t), y(t)\big) x'(t)\, dt.$$

Т. е.

$$\int\limits_{L} P(x, y)\, dx = \int\limits_{t_B}^{t_C} P\big(x(t), y(t)\big) x'(t)\, dt.$$

Аналогично $$\int\limits_{L} Q(x, y)\, dy = \int\limits_{t_B}^{t_C} Q\big(x(t), y(t)\big) y'(t)\, dt.$$

Правило. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода от точки B до точки C по линии $L: x = x(t),\ y = y(t)$ производится по формуле

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

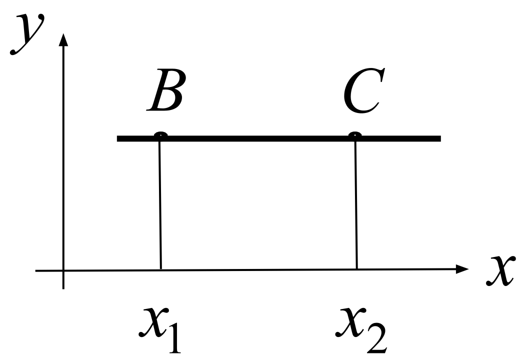
Следовательно, криволинейный интеграл 2-го рода всегда существует, если непрерывны $P(x,y),\ Q(x,y)$, **а** $x(t),\ y(t)$ **непрерывны со своими производными.**

Если уравнение линии задано в явном виде $y = y(x)$, **то, полагая** $x = t$, **имеем**

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_B}^{x_C} \Big(P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big)dx.$$

- **Если линия задана уравнениями разных видов, то линию нужно разбить на отдельные участки интегрирования.**

Примеры. 1)

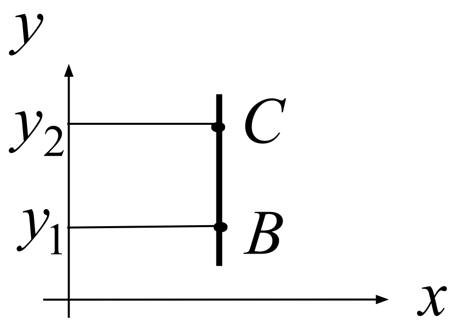


$$y = y_0$$

$$dy = 0$$

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{X_1}^{X_2} P(x, y_0)\,dx.$$

2)

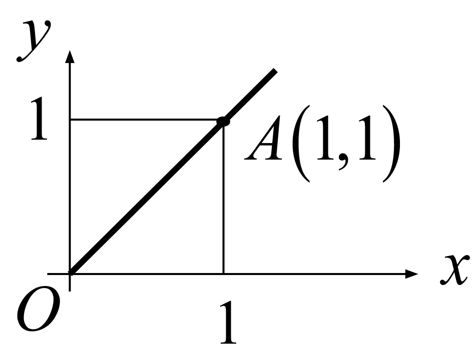


$$x = x_0$$

$$dx = 0$$

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)\,dy.$$

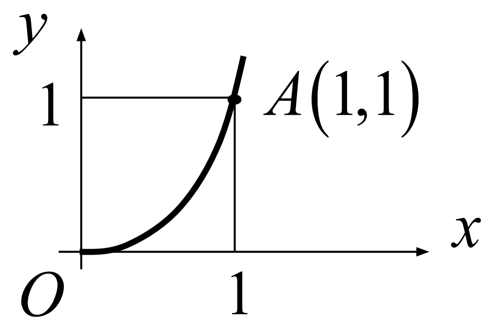
3) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I=\int\limits_L xy\,dx+(x+y)\,dy$ **от точки** $A(1,1)$ **до точки** $O(0,0)$ **по линии** $L:\quad y=x.$



$$dy=dx$$

$$I=\int\limits_0^1\left(x^2+2x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}.$$

4) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_L xydx + (x+y)dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по линии $L:\ y = x^2.$



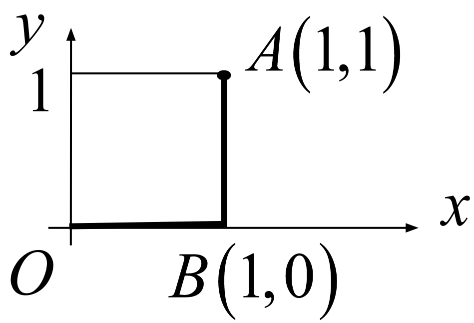
$$dy = 2xdx$$

$$I = \int\limits_0^1 \left(x^3 + 2x\left(x + x^2\right)\right)dx = \frac{17}{12}.$$

5) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_{OBA} xydx + (x+y)dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$,

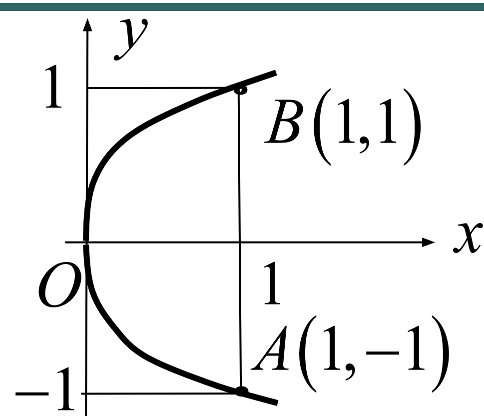
где линия OB задана уравнением $y = 0 \ (dy = 0)$,

а линия BA задана уравнением $x = 1 \ (dx = 0)$.



$$I = \int_0^1 (1+y)dy = \left.\frac{(1+y)^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

6) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_L xydx$ от точки $A(1,-1)$ до точки $B(1,1)$ по линии $L: \quad x = y^2.$

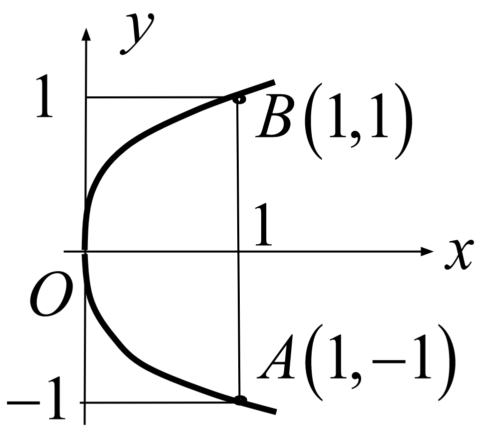


Рассмотрим два случая:

А) Проинтегрируем по $dy.$ **Дифференциал** $dx = 2ydy.$

$$I = \int\limits_{-1}^{1} y^2 y \cdot 2ydy = \left.\frac{2y^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

Б)



Проинтегрируем по dx.

На участке AO **уравнение линии будет** $y=-\sqrt{x}$.

На участке OB **уравнение линии будет** $y=\sqrt{x}$.

Интеграл I **можно представить в виде суммы интегралов**

$$I=\int\limits_{AO} xydx+\int\limits_{OB} xydx=-\int\limits_1^0 x\sqrt{x}dx+\int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx=2\int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{4}{5}.$$

7) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I=\int\limits_L ydx-xdy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(4\pi,0)$,

где одна L арка циклоиды $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$

- **Параметр t изменяется от 0 до 2π.**

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left[4(1-\cos t)^2-4(t-\sin t)\sin t\right]dt=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)dt=4\left[2t\Big|_0^{2\pi}-2\sin t\Big|_0^{2\pi}-(-t\cos t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}\right]=24\pi.$$