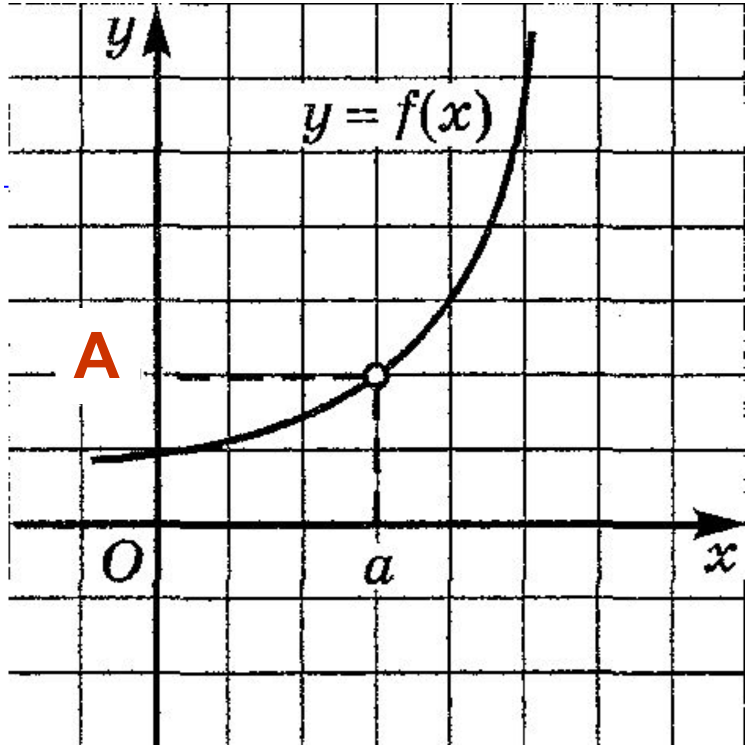
20.09.

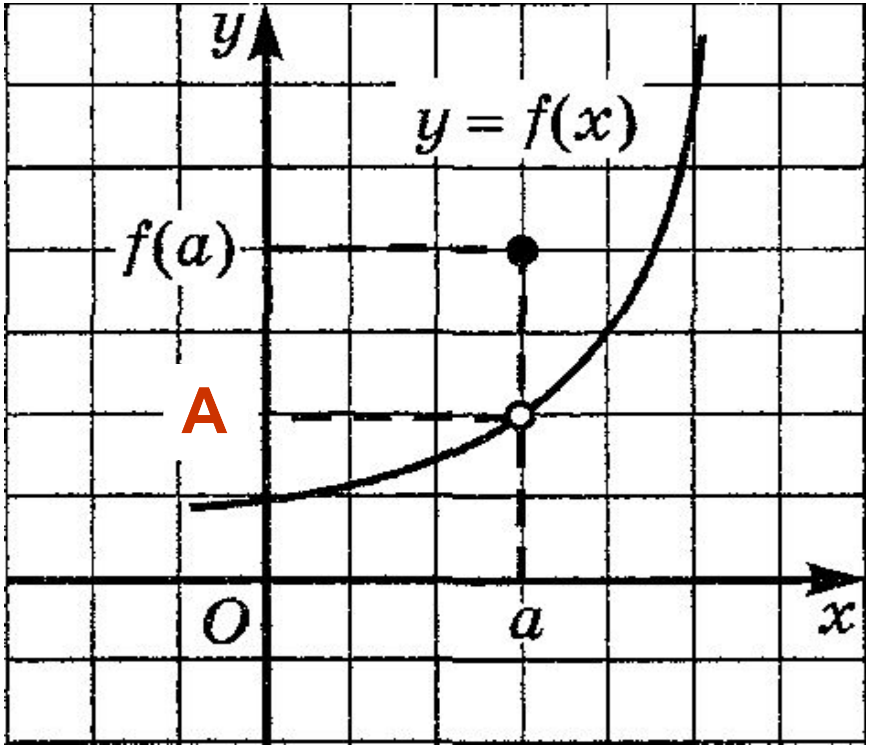
# Понятие предела функции




## Случай 1.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

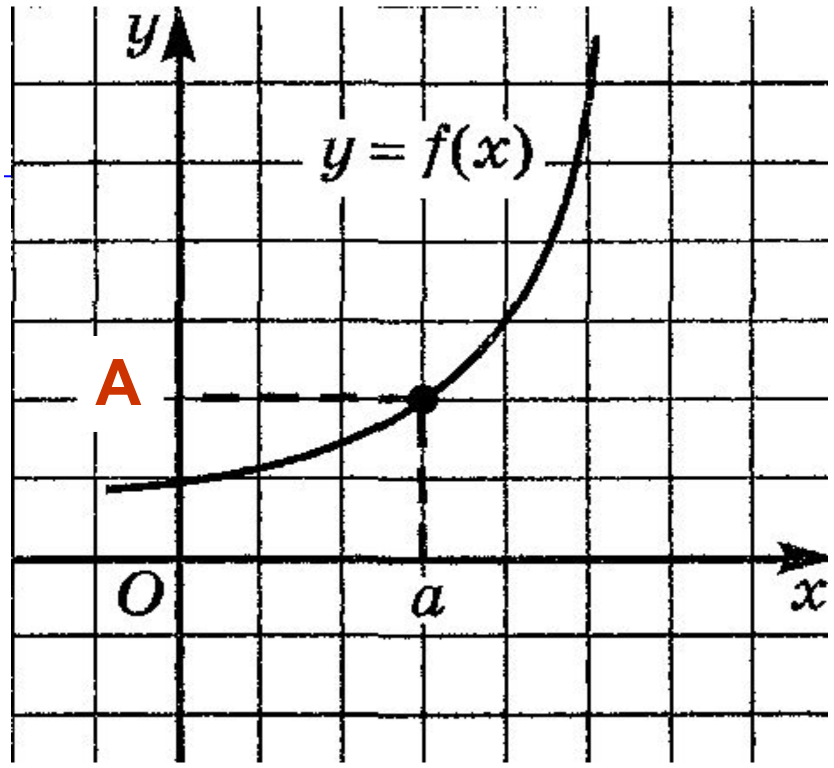
$f(a)$ – не существует




## Случай 2.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

$$f(a) \neq \mathrm{A}$$




## Случай 3.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$f(a) = A$$

***В этом случае говорят, что функция непрерывна в точке a***

# Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, кроме, быть может самой точки $x_0$.

Число $A$ называют пределом функции в точке $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого положительного $\varepsilon$ найдется такое положительное число $\delta$, что для всех $x$ из $\delta$ – окрестности точки $x_0$ справедливо неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

# Предел функции при x стремящемся к бесконечности

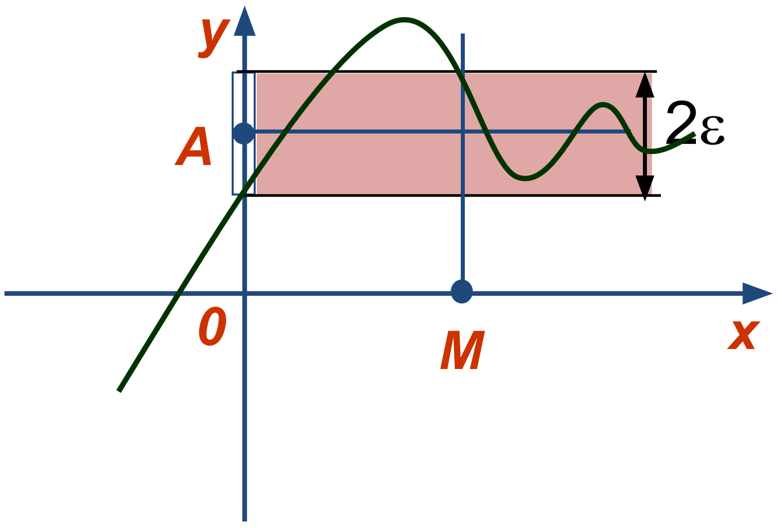
Пусть функция ***y = f(x)*** определена в промежутке $(-\infty;\infty)$

Число ***A*** называют пределом функции при $x\to\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0;\ \exists M>0;\ \forall x:|x|>M\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

Геометрический смысл этого определения таков:
существует такое число ***M***, что при ***x > M*** или при ***x < - M*** точки графика функции лежат внутри полосы шириной ***2ε***, ограниченной прямыми:
***y = A + ε*** , ***y = A - ε*** .



# Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения $x_0$ в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения $x_0$ в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

# Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения $x_0$ в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0\cdot\infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^{0}; \quad 0^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

# Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

# Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) - дробно - рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

# Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = \left[\infty-\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение

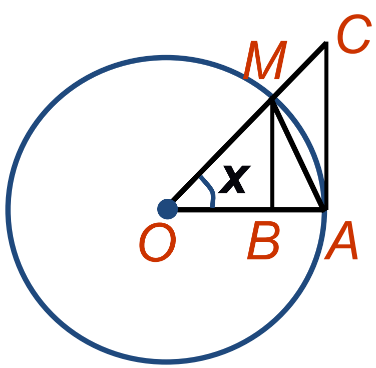
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\frac{2}{\infty}=0$$

# Первый замечательный предел

Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при ***x* = 0**.

Найдем предел этой функции при $x \to 0$




$$|OA| = 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Обозначим:

$S_1$ - площадь треугольника OMA,

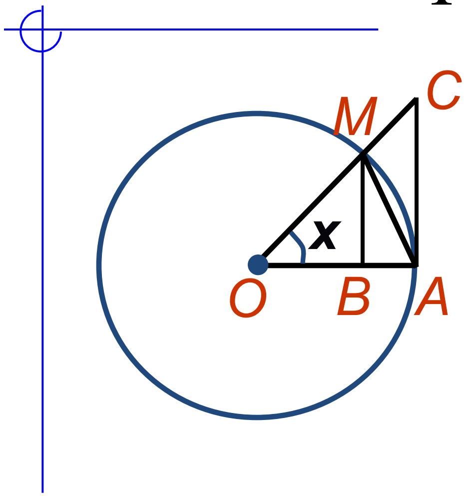
$S_2$ - площадь сектора OMA,

$S_3$ - площадь треугольника OCA,

Из рисунка видно, что $S_1 < S_2 < S_3$

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} OA \cdot 0M \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

# Первый замечательный предел




$$S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot OM = \frac{1}{2} x$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} 1 \cdot tgx$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tgx \quad \Rightarrow \quad \sin x < x < tgx \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < tgx \\ x > \sin x \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos x < \dfrac{\sin x}{x} \\ 1 > \dfrac{\sin x}{x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

# Первый замечательный предел

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1\\ \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1\end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Формула справедлива также при ***x < 0***

***Следствия:***

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = 1$$

# Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=$$

$$=2\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2(2\cdot 1)^2=8$$