Задача

Имеются две невзаимодействущие частицы, каждая из которых находится в состоянии с определённым моментом орбитального импульса *l=1*. В то же время система из этих частиц обладает определёнными значениями квадрата полного момента импульса и проекции полного момента импульса на ось *Oz*

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{l}}_1 + \hat{\vec{l}}_2, \quad L_z = M = l_{1z} + l_{2z}$$

Измеряются проекции момента импульса каждой частицы на ось *Oz*. Найти вероятности измерения возможных значений указанных величин. Рассмотреть все возможные значения полного момента *L*.

«Взбадривающий» вопрос

Таблица соответствия

j_{1z}, j_{2z}	$j_z = j_{1z} + j_{2z}$	j
$j_{1z} = 1, j_{2z} = 1$	$j_z = 2$	$j = 2$
$j_{1z} = 1, j_{2z} = 0$ $j_{1z} = 0, j_{2z} = 1$	$j_z = 1$	$j = 2$ $j = 1$
$j_{1z} = 1, j_{2z} = -1$ $j_{1z} = 0, j_{2z} = 0$ $j_{1z} = -1, j_{2z} = 1$	$j_z = 0$	$j = 2$ $j = 1$ $j = 0$
$j_{1z} = -1, j_{2z} = 0$ $j_{1z} = 0, j_{2z} = -1$	$j_z = -1$	$j = 2$ $j = 1$
$j_{1z} = -1, j_{2z} = -1$	$j_z = -2$	$j = 2$

Почему одному возможному значению j_z соответствует несколько возможных значений j?
Иначе говоря, почему возникает «вырождение» j_z по j ?

Обозначения, используемые в дальнейшем

$$L_z \equiv M, \quad l_{1z} \equiv m_1, \quad l_{2z} \equiv m_2$$

Два набора квантовых чисел, описывающих возможные состояния системы

$$l_1, l_2, m_1, m_2 \qquad\qquad l_1, l_2, L, M$$

$$\boxed{\left| l_1 = 1, l_2 = 1, m_1, m_2 \right\rangle \equiv \left| m_1, m_2 \right\rangle = \left| m_1 \right\rangle_1 \left| m_2 \right\rangle_2} \qquad \boxed{\left| l_1 = 1, l_2 = 1, L, M \right\rangle \equiv \left| L, M \right\rangle}$$

$$\left|0,0\right\rangle, \left|1,-1\right\rangle, \left|-1,1\right\rangle \xrightarrow{M=0} \left|0,0\right\rangle, \left|1,0\right\rangle, \left|2,0\right\rangle$$

$$\left|1,0\right\rangle, \left|0,1\right\rangle \xrightarrow{M=1} \left|1,1\right\rangle, \left|2,1\right\rangle$$

$$\left|-1,0\right\rangle, \left|0,-1\right\rangle \xrightarrow{M=-1} \left|1,-1\right\rangle, \left|2,-1\right\rangle$$

$$\left|1,1\right\rangle \xrightarrow{M=2} \left|2,2\right\rangle$$

$$\left|-1,-1\right\rangle \xrightarrow{M=-2} \left|2,-2\right\rangle$$

Формальное решение

Принцип суперпозиции

$$\left|LM\right\rangle = \sum_{m_1'm_2'} C_{m_1'm_2'} \left|m_1'm_2'\right\rangle$$

Домножим справа и слева на бра-вектор

$$\left\langle m_1 m_2\right|$$

Результат?

Результат

$$\left\langle m_1 m_2 \middle| LM \right\rangle = \sum_{m_1' m_2'} C_{m_1' m_2'} \left\langle m_1 m_2 \middle| m_1' m_2' \right\rangle = \sum_{m_1' m_2'} C_{m_1' m_2'} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

Или

$$C_{m_1 m_2} = \left\langle m_1 m_2 \middle| LM \right\rangle$$

Искомая вероятность

$$w\left(m_1, m_2\right) = \left|\left\langle m_1 m_2 \middle| LM \right\rangle\right|^2$$

Как и в предыдущей задаче, надо придать явный смысл знакам Дирака. Работать будем в матричном ll_z-представлении.

Кет-векторы в матричном представлении

$$\left|0,0\right\rangle = \left|0\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2, \left|1,-1\right\rangle = \left|1\right\rangle_1 \left|-1\right\rangle_2, \left|-1,1\right\rangle = \left|-1\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2$$

$$\left|1,0\right\rangle = \left|1\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2, \left|0,1\right\rangle = \left|0\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2$$

$$\left|-1,0\right\rangle = \left|-1\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2, \left|0,-1\right\rangle = \left|0\right\rangle_1 \left|-1\right\rangle_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2$$

$$\left|1,1\right\rangle = \left|1\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2, \left|-1,-1\right\rangle = \left|-1\right\rangle_1 \left|-1\right\rangle_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2$$

Обозначения

В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение

$$\left|-1,-1\right\rangle \Leftrightarrow \left\langle ll_z \middle| -1,-1\right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2$$

Матрицы понижающих операторов в представлении $l_1 l_{1z} l_2 l_{2z}$

$$\hat{l}_{i-} = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_i$$

$$\hat{L}_- = \hat{l}_{1-} + \hat{l}_{2-} = \sqrt{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_2 \right]$$

Состояние с максимальными значения квантовых чисел

$$\left|L=2, M=2\right\rangle = \sum_{m_1' m_2'} C_{m_1' m_2'} \left|m_1' m_2'\right\rangle = \left|m_1 = 1, m_2 = 1\right\rangle$$

Действуем на левую часть понижающим оператором

$$\hat{L}_- \left|L=2, M=2\right\rangle = ?$$

Найти результат действия, используя общую формулу

$$\hat{j}_- \left|j j_z\right\rangle = \sqrt{(j + j_z)(j - j_z + 1)} \left|j j_z - 1\right\rangle$$

Результат

$$\hat{j}_{-}\left|jj_z\right\rangle = \sqrt{(j+j_z)(j-j_z+1)}\left|jj_z-1\right\rangle$$

$$\hat{j}_{-} = \hat{L}_{-}, \quad j = L = 2, \quad j_z = M = 2$$

$$\hat{L}_{-}\left|L=2, M=2\right\rangle = 2\left|L=2, M=1\right\rangle$$

Теперь действуем суммой понижающих операторов на правую часть

$$\hat{L}_{-}\left|L=2, M=2\right\rangle = \left(\hat{l}_{1-}+\hat{l}_{2-}\right)\sum_{m_1'm_2'} C_{m_1'm_2'}\left|m_1'm_2'\right\rangle = \left(\hat{l}_{1-}+\hat{l}_{2-}\right)\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2$$

Результат действия?

Результат действия?

$$\left(\hat{l}_{1-}+\hat{l}_{2-}\right)|1\rangle_1|1\rangle_2=\sqrt{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}_1+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}_2\right]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2$$

Результат действия

$$\hat{L}_{-}\left|L=2, M=2\right\rangle = 2\left|L=2, M=1\right\rangle = \left(\hat{l}_{1-}+\hat{l}_{2-}\right)\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 =$$

$$\sqrt{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}_1+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}_2\right]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2 = \sqrt{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2\right]$$

Или

$$\left|L=2, M=1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2+\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\right]$$

Рассмотрим состояние

$$\left|L=2, M=0\right\rangle$$

Схема вычисления такая же, как и прежде

$$\hat{L}_{-}\left|L=2, M=1\right\rangle = \left(\hat{l}_{1-}+\hat{l}_{2-}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2\right]$$

Результат?

Результат

$$\left|L=2,M=0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2\right]+\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2$$

Теперь рассмотрим состояние

$$\left|L=1,M=1\right\rangle$$

Понижающий оператор не поможет – он уменьшает проекцию, но не квадрат полного момента!

Что делать?

Кет-векторы с разными квантовыми числами ортогональны друг другу (вырождения нет)

$$\langle L = 2, M = 1 | L = 1, M = 1 \rangle = 0$$

Найти результат?

Принцип суперпозиции

$$\left|L=1, M=1\right\rangle = A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2 + B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2$$

$$\left|L=2, M=1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2\right]$$

Подставить в

$$\left\langle L=2, M=1 \middle| L=1, M=1\right\rangle = 0$$

$$A=?,\quad B=?$$

Перемножаем

$$\left\langle L=2, M=1 \middle| L=1, M=1 \right\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_2 \right] \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] = 0$$

Результат?

$$A = ?, \quad B = ?$$

Результат

$$A = -B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|L=1, M=1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right]$$

Найти кет-векторы всех остальных состояний

на произвольную ось также равна $(2l+1)^{-1}$.

3.47. Найдем вид нормированных функций Ψ_{LM} в $l_{1z}l_{2z}$-представлении. Очевидно,

$$\Psi_{2,2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2,\quad \Psi_{2,-2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2 \tag{1}$$

(здесь и ниже столбцы $\Psi_{1(2)}=\begin{pmatrix}c_1\\c_0\\c_{-1}\end{pmatrix}_{1(2)}$ представляют в. ф. 1 (2) частицы (или подсистемы) с моментом $l=1$ в ее l_z-представлении).

Вид в. ф. Ψ_{LM}, отвечающих состояниям с $L=1,\ 2$ и $M=\pm 1$, а также $L=1$, $M=0$, непосредственно следует из характера симметрии в. ф. по отношению к перестановке переменных m_1 и m_2, установленного в 3.39:

$$\Psi_{2(1),1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2\pm\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2\right\}, \tag{2}$$

$$\Psi_{2(1),-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2\pm\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2\right\}, \tag{3}$$

$$\Psi_{1,0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2\right\}. \tag{4}$$

Знак «+» в выражениях (2) и (3) отвечает $L=2$, знак «−» относится к $L=1$.

Вид в. ф. $\Psi_{0,0}$ следует из результата предыдущей задачи:

$$\Psi_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2\right\}. \tag{5}$$

В. ф. $\Psi_{2,0}$ при учете ее свойства симметрии по отношению к перестановке переменных m_1 и m_2 можно записать в виде

$$\Psi_{2,0}=C_1\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_2+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2\right\}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2. \tag{6}$$

Из условия ортогональности в. ф. $\Psi_{2,0}$ и $\Psi_{0,0}$ находим, что $C_2=2C_1$, и, выбрав в (6) $C_1=1/\sqrt{6}$, $C_2=2/\sqrt{6}$, получаем нормированную в. ф. $\Psi_{2,0}$.