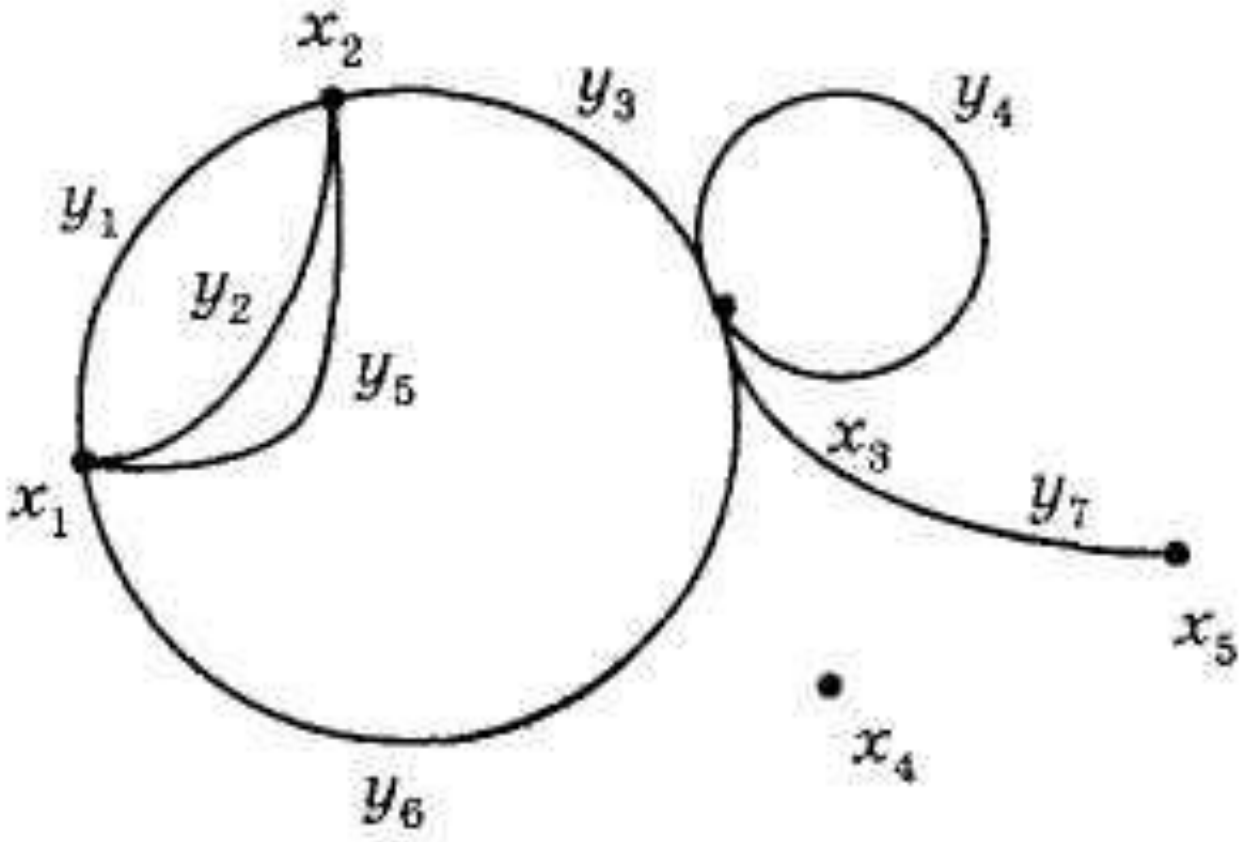
Розділ 5. Теорія графів

5.1. Історія розвитку теорії графів

- *Ейлер 1736 р. Головоломка про кенігсберські мости, у якій знайдено умову існування у зв'язному графі циклу, що містить всі ребра графа без повторень.*
- *Кірхгоф 1847 р. Вивчення електричних ланцюгів, абстрагуючись від фізичної природи пристроїв, алгоритм знаходження максимального підграфу без циклів.*
- *Келі 1857 р. Задача в органічної хімії про перелічення всіх дерев зі степенями вершин 1 і 4, що пов'язана з описом ізомерів насичених вуглеводнів C_nH_{2n+2} з даним числом (n) атомів вуглецю.*

- *Гамільтон 1859 р. Задача комівояжера, який виходить і повертається до вихідного міста так, щоб відвідати решту пунктів і тільки один раз.*
- *Проблема чотирьох фарб — кожну конкретну географічну карту можна розфарбувати чотирма фарбами так, щоб будь-які дві сусідні (що мають загальну лінійну (а не точкову) ділянку границі) країни були пофарбовані у різні кольори.*
- *з 30-х років XIX століття, популярність графів і кількість праць з чистої теорії графів та її застосувань неухильно зростає. За допомогою графа моделюються будь-які схеми, в яких виділяються більш прості частини (вершини) і зв'язки між ними (ребра).*

5.2. Основні терміни



- Нехай X - довільна множина точок, Y - сукупність ліній, з'єднуючих задані точки у трьохвимірному просторі

  (визначення ***геометричного графа*** $G = (X, Y)$).

- Точки з X називаються ***вершинами***, криві з Y — ***ребрами*** графа. На малюнку зображено граф у просторі R^2 (або, якщо бажано, — у R^3), де

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$

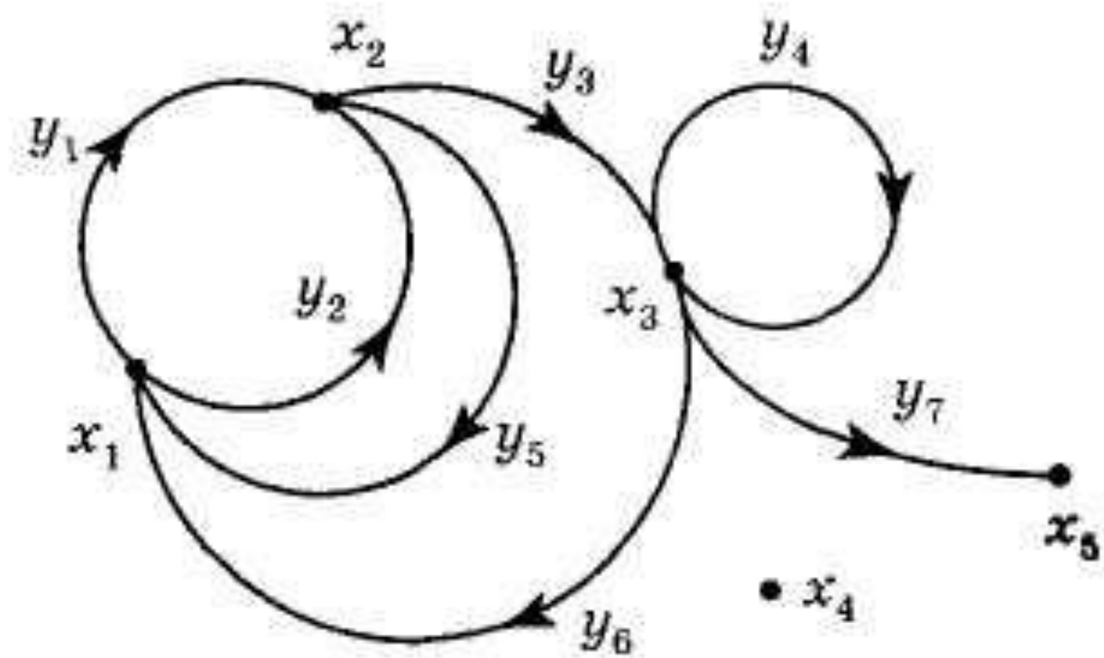
Позначення для графа: $G = (X, Y)$, $n = n_G$ — число вершин (яку ще називають ***порядком графа***), $m = m_G$ — число ребер графа.

- ***Суміжні вершини*** (x_2, x_3) — це вершини, з'єднані ребром, ***суміжні ребра*** (y_2, y_3) — це ребра, що мають спільну вершину.
- Вершина x_2 і ребро y_3 ***інциденті одне одному***, якщо точка x_2 є кінець (або початок) кривої y_3.
- ***Петля*** (y_4) — замкнене ребро.
- ***Паралельні*** (***кратні***) ***ребра*** (y_1, y_2, y_5) — це ребра, що інциденті одній парі вершин (x_2, x_1).
- ***Ізольована вершина*** (x_4) неінцидентна жодному ребру.
- ***Степінь*** $\deg x_i = \delta(x_i)$ ***вершини*** x_i — число інцидентних їй ребер ($\delta(x_1) = 4$, $\delta(x_5) = 1$, $\delta(x_4) = 0$), причому петля враховується як два ребра ($\delta(x_3)$=5).

Граф $G = (X, Y)$ називається:

- ***порожнім***, якщо множина його ребер порожня;
- ***простим***, якщо він не містить петель і паралельних ребер;
- ***повним*** G_0, якщо він простий і кожна пара вершин суміжна;
- ***мультиграфом***, якщо він містить паралельні ребра;
- ***псевдографом***, якщо він містить петлі та кратні ребра;
- ***регулярним*** або ***однорідним*** (степені r), якщо степені всіх його вершин однакові (дорівнюють $r = \deg x_i$, $\forall x_i \in X$).

- Якщо на кожному ребрі обрати певний напрямок, то такий граф називається ***орієнтованим***, а його ребра з напрямками — ***дугами***. Для орієнтованого графа зберігаються всі поняття та характеристики, що відносяться до відповідного неорієнтованого.



- В орграфі, крім степеня вершини $\delta(x)$, вводиться ***додатний степінь*** $\delta^{+}(x)$ — число дуг, що починаються у вершині x, і ***від'ємний степінь*** $\delta^{-}(x)$ — число дуг, що закінчуються у вершині x.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома дугами, що мають зворотні напрямки і інцидентні тим самим вершинам. Таку відповідність називають канонічною.

Визначення абстрактного графа

- ***Графом*** G називається трійка $G=(X,Y,f)$, де X, Y — довільні множини, $f:Y\to X\times X$ — відображення множини Y у декартовий добуток множини X на себе. Елементи множини X називаються вершинами, множини Y — дугами, відображення f — інцидентором.

  Часто графи позначаються у вигляді перших двох множин трійки: $G=(X,Y)$, інцидентор f мається на увазі неявно.

5.3. Способи задання графа

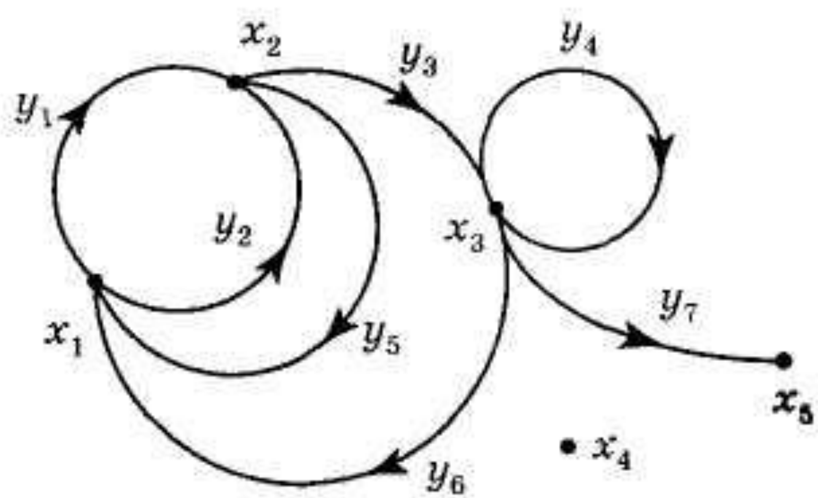
- *список ребер*
- *матриця інциденцій*
- *матриця суміжності*
- *список суміжності*

Список ребер

$G=(X,Y)$,

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$.



Інший варіант:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;

$G = \{(x_1, x_2),(x_1, x_2),(x_2, x_3),$
$(x_3, x_3),(x_2, x_1),(x_3, x_1),(x_3, x_5)\}$

Матриця інциденцій

Оскільки вершини і дуги орграфа $G=(X,Y,f)$ без петель занумеровані: $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $Y=\{y_1,\ldots,y_m\}$, дію інцидентора f можна охарактеризувати $(n\times m)$ — матрицею інциденцій $B=\{b_{ij}\}$, де за визначенням:

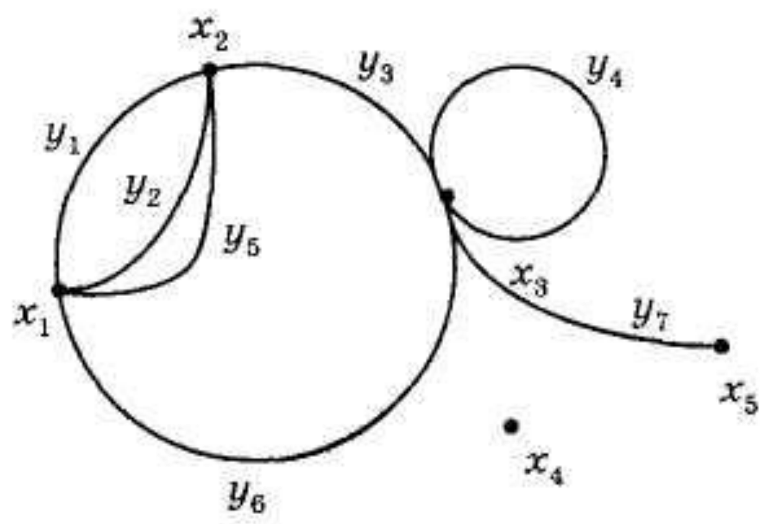
$$b_{ij}=\begin{cases} +1, \text{ якщо дуга } y_j \text{ виходить з вершини } x_i; \\ -1, \text{ якщо дуга } y_j \text{ заходить у вершину } x_i; \\ 0, \text{ якщо дуга } y_j \text{ не інцидентна вершині } x_i. \end{cases}$$

Для неорграфа G без петель матриця інциденцій $R=\{r_{ij}\}$ визначається так: $r_{ij}=1$, якщо ребро y_j інцидентне вершині x_i, і $r_{ij}=0$ — у протилежному випадку.

Матриця інциденцій, приклад

$B=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	1	1	0	0	-1	-1	0
x_2	-1	-1	1	0	1	0	0
x_3	0	0	-1	2	0	1	1
x_4	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	-1



Матриця суміжності

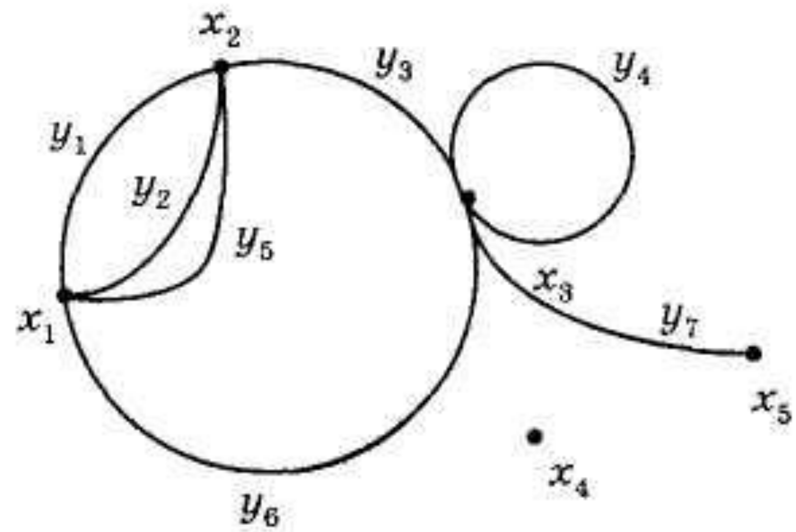
- Квадратна матриця A розміру $n = |X|$, елемент якої $a_{i,j}$ дорівнює числу дуг, що йдуть від вершини x_i до вершини x_j називається ***матрицею суміжності орграфа*** $G=(X,Y)$.

Для неорієнтованого графа елемент $a_{i,j}$ матриці суміжності A_0 визначається як число ребер, з'єднуючих вершини x_i і x_j (очевидно, A_0 завжди симетрична відносно головної діагоналі: $A_0 = A_0^{\mathrm{T}}$). Ненульове значення елемента $a_{i,j}$ характеризує суміжність вершин x_i і x_j у графі, звідси і назва — матриця суміжності.

Матриця суміжності, приклад

A / A_0 =

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3 / 2	0 / 1	0	0
x_2	3 / 1	0	1	0	0
x_3	1	0 / 1	1	0	1
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0 / 1	0	0



Список суміжності

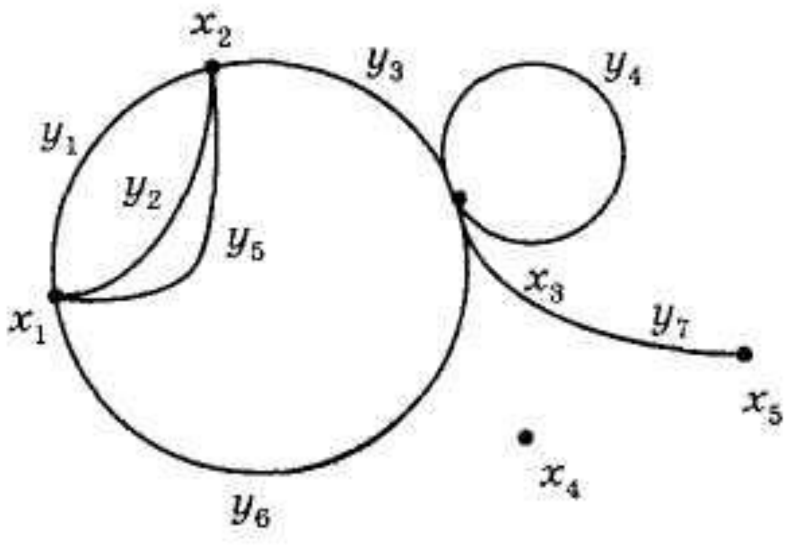
- Орієнтований граф G (без кратних дуг, але, можливо, з петлями) можна подати у вигляді багатозначного відображення множини X у X, яке зручно записувати у вигляді ***списку суміжності.***

  Цей спосіб подання можна використовувати і для неорієнтованих простих графів, якщо кожне ребро умовно замінити двома протилежно спрямованими дугами.

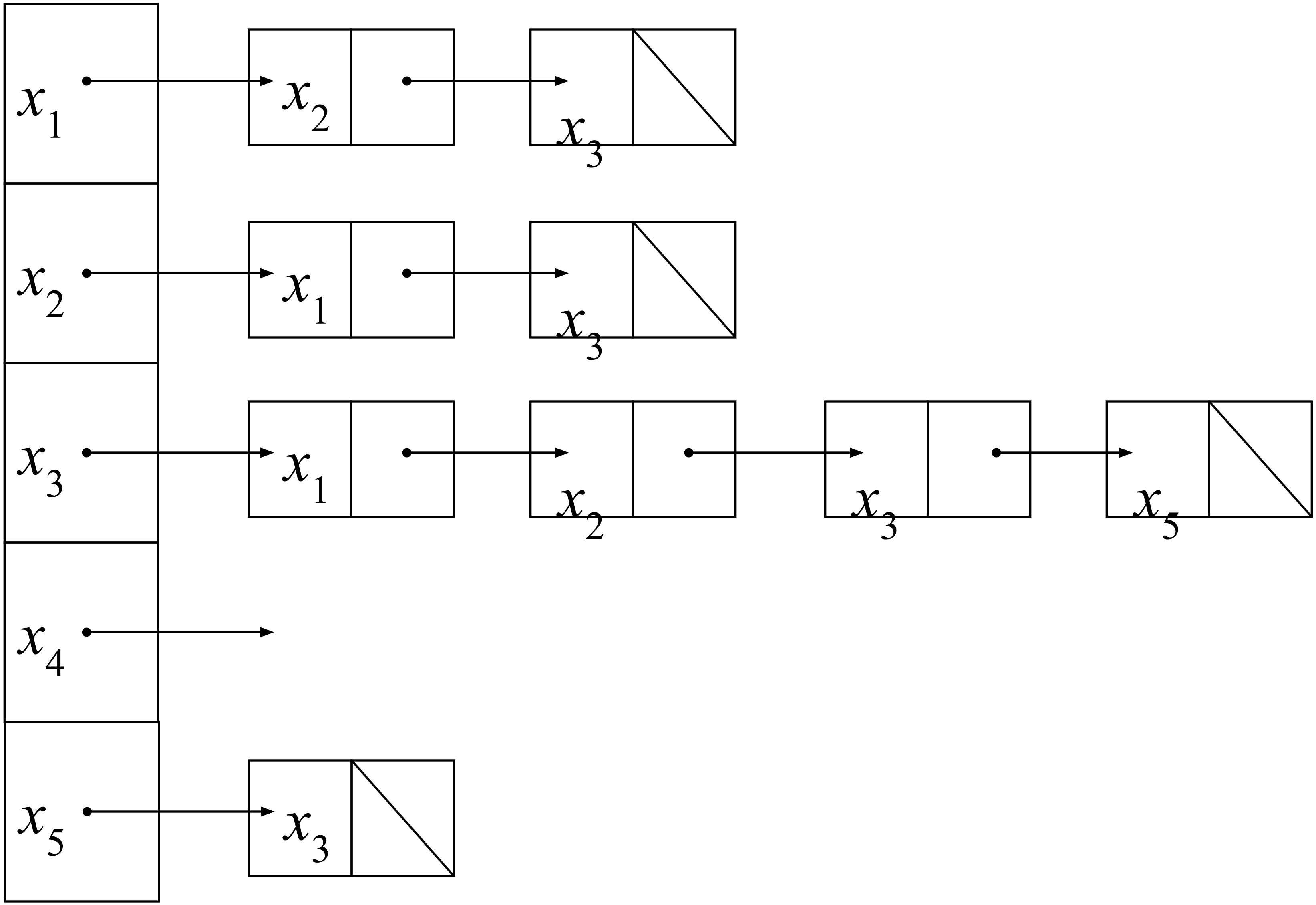
Список суміжності, приклад

$V =$

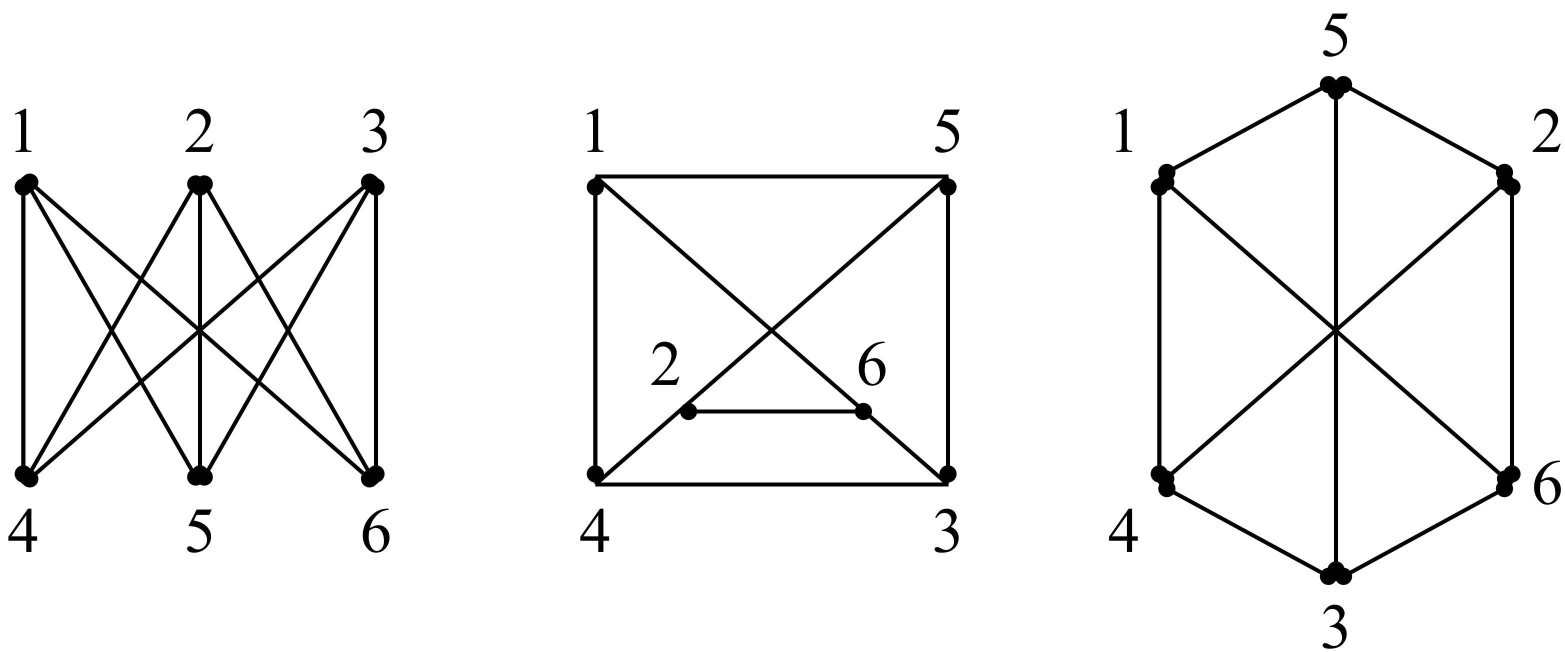
	Суміжні вершини
x_1	x_2, x_3
x_2	x_1, x_3
x_3	x_1, x_2, x_3, x_5
x_4	
x_5	x_3



Список суміжності, приклад



5.4. Операції над графами



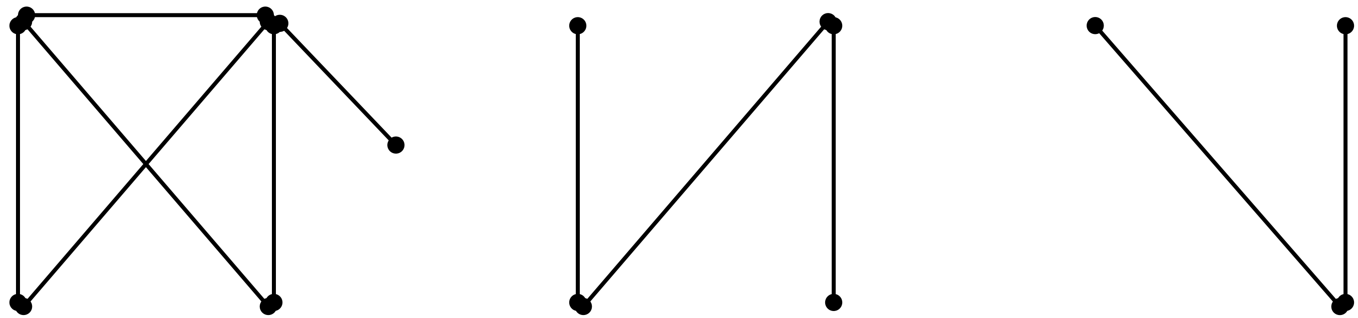
- Два графа G і G' називаються ***ізоморфними*** ($G \sim G'$), якщо існують взаємно однозначні відображення вершин і ребер $\phi: X \to X'$, $\Psi: Y \to Y'$ відповідно, що зберігають відношення інциденції: $f'\psi = (\phi \times \phi)f$. Інакше кажучи, ребро (дуга) y інцидентне (заходить, виходить) вершині x графа G тоді і тільки тоді, коли в графі G' відповідне ребро (дуга) $y' = \Psi(y)$ інцидентне (заходить, виходить) вершині $x' = \phi(x)$.

Матриці суміжності дозволяють сформулювати простий алгебраїчний критерій ізоморфізму, який спирається на те, що вигляд матриць та списку ребер залежить від нумерації вершин і ребер графа.

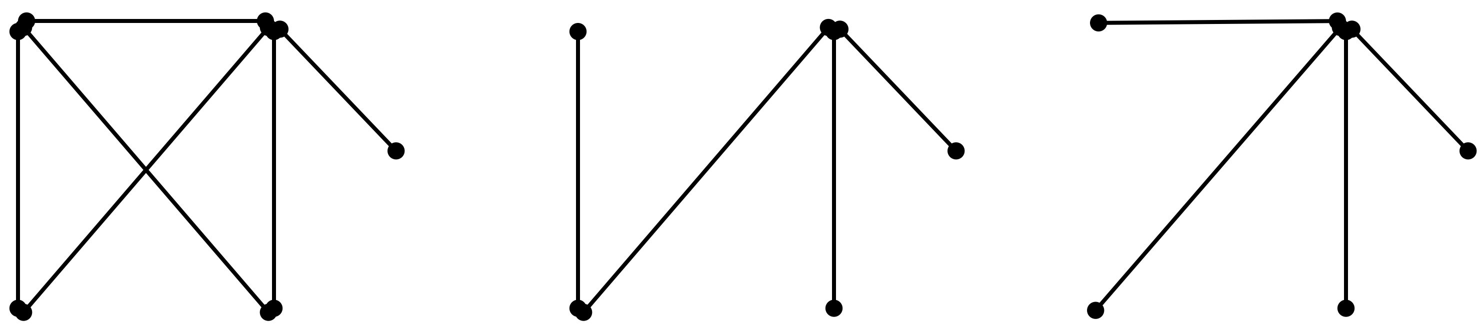
Теорема

Графи $G = (X, Y)$, $G' = (X', Y)$ *ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакове число вершин, і матриця суміжності* $A(G')$ *одержується з матриці* $A(G)$ *послідовними переставленнями рядків з одночасним переставлянням однойменних стовпців.*

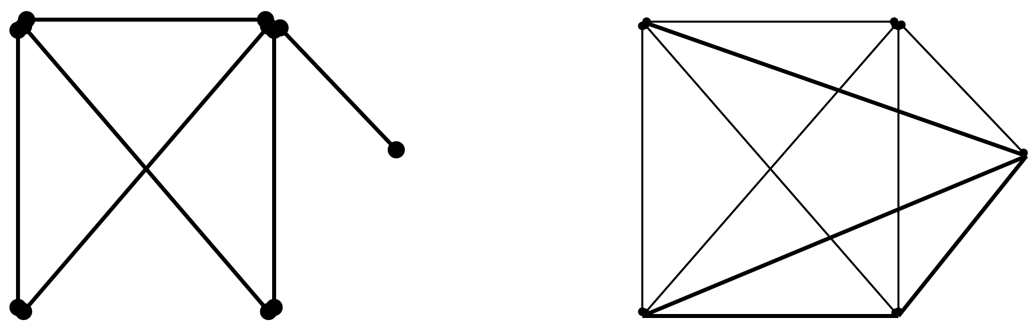
- ***Підграф*** — будь-яка частина графа, що сама є графом.



- ***Остовний підграф*** – множини вершин співпадають, множина ребер менше.

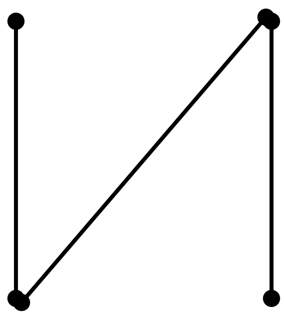


- ***Додатковим (доповненням)*** до графа $G=(X,Y)$ називається граф $\tilde{G}=(X,\tilde{Y})$ з тією ж множиною вершин, що доповнює G до повного графа і $Y\cap\tilde{Y}=\varnothing$: $G_0=G+\tilde{G}=(X,Y\cup\tilde{Y})$. Інакше кажучи, у доповнювальному графі $\tilde{G}$ вершини (x_i,x_j) суміжні (з'єднані ребром $\tilde{y}_k\in\tilde{Y}$), якщо вони несуміжні у вихідному графі G.

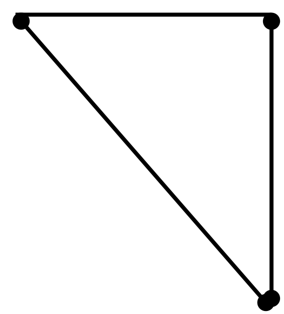


Операції з двома графами

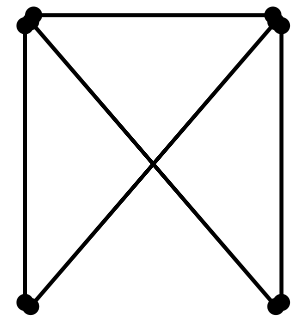
- ***Сума*** $G+G_1=(X;Y\cup Y_1)$



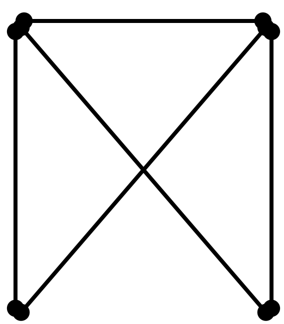
$\cup$



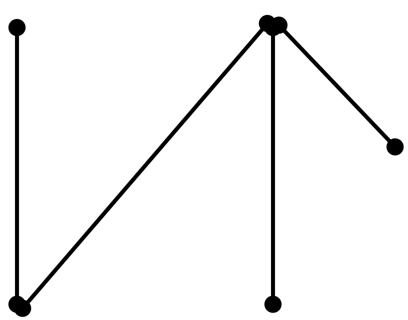
$=$



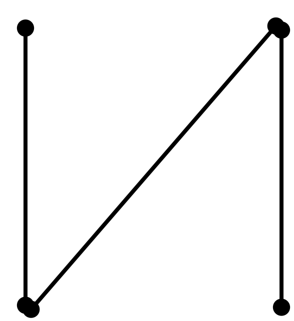
- ***Перетин*** $G\cap G_1=(X;Y\cap Y_1)$



$\cap$



$=$



При ***множенні*** $GG_1=(X;Y_0)$ з вершини x_i до вершини x_j йде стільки дуг, скільки існує шляхів довжини 2 у графі $G + G_1$ з вершини x_i до вершини x_j таких, що перша дуга належить Y, друга — Y_1.

Теорема. *Для суми та добутку орграфів (з однаковими множинами вершин) матриці суміжності відповідно додаються і перемножуються, та навпаки*:

$A(G + G_1) = A(G) + A(G_1);$

$A(GG_1) = A(G) \cdot A(G_1).$

Наслідок. *Якщо A — матриця суміжності орграфа G, то елемент матриці A^n (натурального степеня n) дорівнює числу різних орієнтованих маршрутів довжини n, що йдуть з вершини x_i до x_j у графі G.*

5.5. Маршрути та зв'язність

- ***Маршрут*** (з'єднуючий вершини x_a, x_b) — скінченна послідовність ребер та інцидентних їм вершин, що складають неперервну криву з кінцями x_a, x_b. Число ребер у маршруті називається його ***довжиною*** (включаючи внесок повторюваних ребер).
- Вершини, інцидентні ребрам маршруту, крім початкової та кінцевої, називаються ***внутрішніми*** або ***проміжними***.
- ***Маршрут замкнений***, якщо кінці його співпадають (x_a=x_b).

- Маршрут називається ***ланцюгом*** (***шляхом*** – в орграфі), якщо всі його ребра (дуги) різні, і ***простим ланцюгом*** (***простим шляхом***), якщо всі його вершини (крім кінців) різні.
- ***Цикл*** (***контур*** – в орграфі) — це замкнений ланцюг (шлях).
- ***Простий цикл*** (***простий контур***), якщо ланцюг (шлях) простий.

Будь-який орієнтований маршрут є маршрутом (неорієнтованим), шлях є ланцюгом, контур — циклом, зворотне може не виконуватися.

- ***Граф*** називається ***зв'язним***, якщо будь-яка пара його вершин з'єднується ланцюгом.
- ***Орграф*** називається ***сильно зв'язним***, якщо для будь-якої пари різних вершин *v*, *w* існує шлях з *v* до *w* і шлях із *w* до *v*.
- ***Компонента*** (***зв'язності***) — максимальний зв'язний підграф у графі.
- Граф називається ***n-зв'язним***, якщо між будь-якими його двома вершинами знайдеться *n* ланцюгів, що попарно не мають спільних некінцевих вершин.

- ***Точка зчленування графа*** — вершина, видалення якої разом з інцидентними їй ребрами призводить до збільшення числа компонент графа.
- ***Мостом*** називають ребро (дугу) графа, видалення якого призводить до збільшення числа компонент графа.
- ***Відстань*** $d(x_a, x_b)$ між вершинами x_a, x_b графа G— довжина найкоротшого ланцюга між x_a, x_b. Якщо від вершини x_a до вершини x_b не веде жодний ланцюг, то $d(x_a, x_b) = \infty$.
- ***Діаметром*** $d(G)$ графа G називається максимальна відстань $d(x_a, x_b) \neq \infty$ у графі G.

- ***Ексцентриситет*** $e(x)$ вершини $x \in X$ у зв'язному графі G є відстань від x до найбільш віддаленої від неї вершини, а ***радіус*** $r(G)$ графа G — найменший з ексцентриситетів вершин:

$$e(x) = \max_{\forall v \in X} d(x, v) \qquad r(x) = \min_{\forall x \in X} e(x)$$

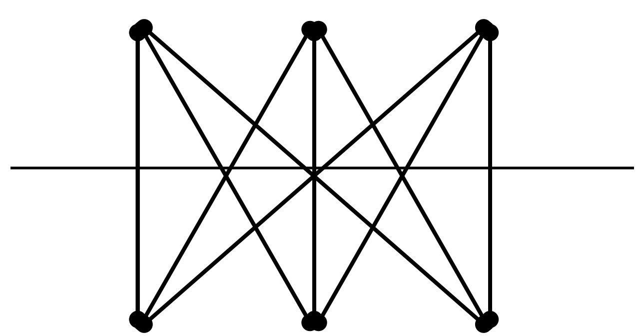
Найбільший ексцентриситет дорівнює діаметру:

$$d(G) = \max_{\forall x \in X} e(x) = \max_{x} \max_{v} d(x, v)$$

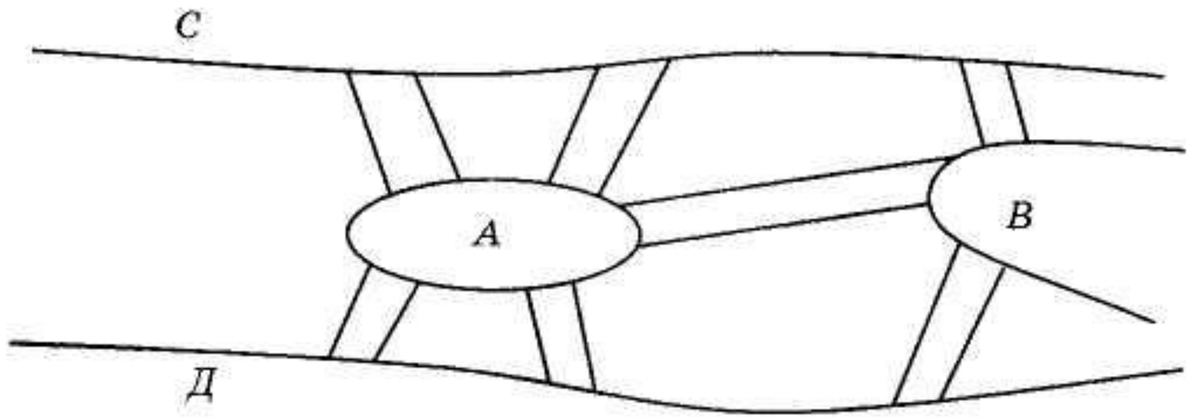
- Вершина v називається ***центральною вершиною графа*** G, якщо на ній досягається мінімум ексцентриситетів, тобто $e(v) = r(G)$.

- ***Центром графа*** *G* називається множина всіх його центральних вершин; центр може складатися з єдиної вершини, а може — з двох і більше вершин.
- ***Дводольний граф*** – це граф, множину вершин якого можна розбити на дві підмножини таким чином, що кожне ребро графа з'єднує вершини з різних підмножин (позначають такі графи $K_{3,3}$).

  Теорема Кеніга: *граф є дводольним тоді і тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину*.



5.6. Ейлерові графи



Головоломка про кенігсберські мости.

Чи можна здійснити прогулянку по місту, пройшовши по кожному мосту точно один раз, і повернутися до вихідної точки?

- ***Ейлеровим шляхом*** у графі називають шлях, який містить кожне ребро графу рівно один раз.
- Замкнений ейлерів шлях називають ***ейлеровим циклом***.
- Зв'язний граф, що допускає побудову ейлерового циклу (шляху), називають ***ейлеровим (напівейлеровим) графом***.

Теорема Ейлера (1736 р.) *Граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин — парні. Граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин, крім початку і кінця шляху, — парні.*

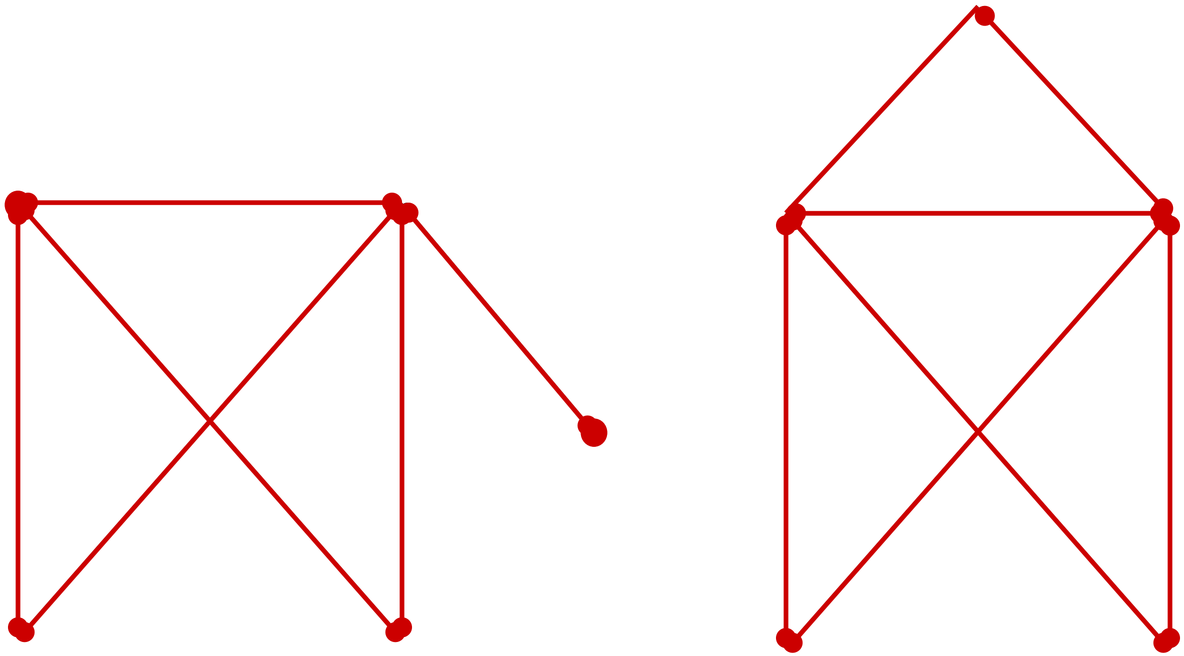
Побудова ейлерового циклу (шляху).
Алгоритм Флері

1. Ейлерів цикл можна починати з будь-якої вершини (ейлерів шлях треба починати з однієї з непарних вершин).

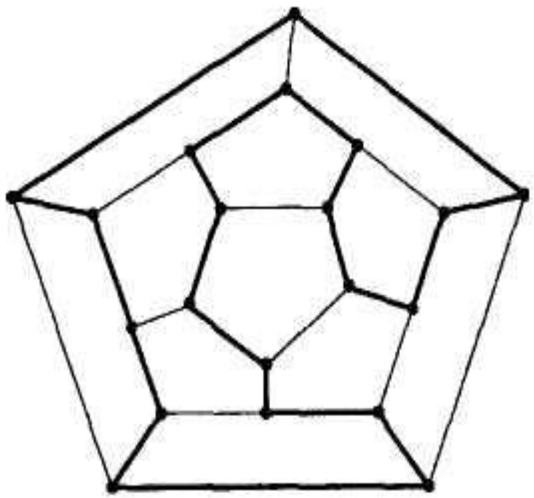
2. Під час побудови ейлерового циклу (шляху) з графу видаляють (або мітять) ребра, що входять до циклу.

3. На кожному кроці можна вибирати довільне ребро, яке за можливості не є мостом (з урахуванням видалених ребер на попередніх кроках); міст можна обирати лише тоді, коли всі ребра, інцидентні даній вершині, є мостами.

Приклад.



5.7. Гамільтонові графи



Головоломка “кругосвітня подорож”, запропонована у 1859р. ірландським математиком Уільямом Гамільтоном.

Чи можна обіхати найцікавіші міста, побувавши у кожному тільки один раз?

- ***Гамільтоновим шляхом*** у графі називають шлях, який містить кожну вершину графу рівно один раз.
- Замкнений гамільтонів шлях називають ***гамільтоновим циклом***.
- Зв'язний граф, що допускає побудову ***гамільтонового*** циклу (шляху), називають ***гамільтоновим (напівгамільтоновим) графом***.

До розпізнавання гамільтоновості графів зводиться також ***задача комівояжера***: використовуючи задану систему транспортних сполучень (доріг і т.п.) між пунктами (містами, фірмами і т.п.) у конкретній зоні обслуговування, відвідати всі пункти у такій послідовності, щоб пройдений маршрут був найкоротшим із всіх можливих.

Задача про гамільтонів цикл не має на сьогодні ані повного теоретичного розв'язку, ані задовільного алгоритму відшукання циклу для $n \geq 3$.

Граф не є гамільтоновим, якщо:

− містить точку зчленування або міст;

− містить дві вершини третього степеня, які сполучені трьома шляхами довжиною не менше 2, що не мають спільних вершин окрім початку і кінця.

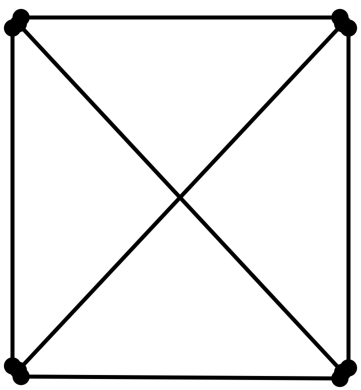
Граф є гамільтоновим, якщо:

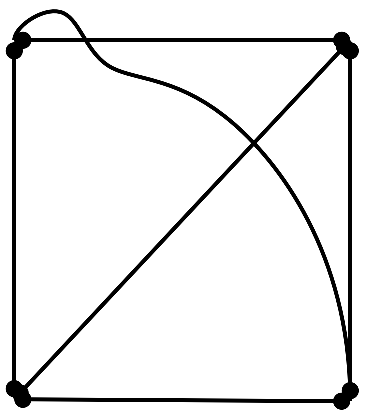
− степінь будь-якої вершини $\deg v \geq n/2$ (**Дірак**)

− для будь-якої пари несуміжних вершин $\forall v,u \in X$ виконується $\deg v + \deg u \geq n$ (**Оре**)

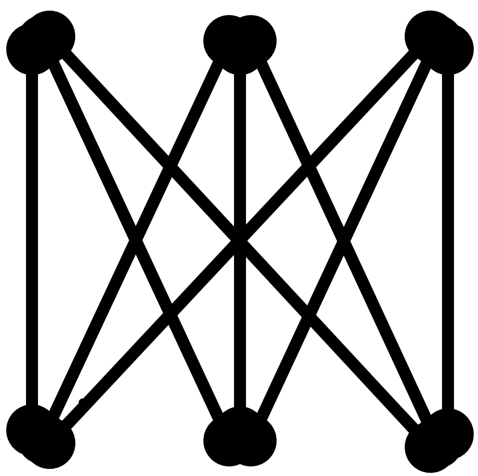
5.8. Планарність графів

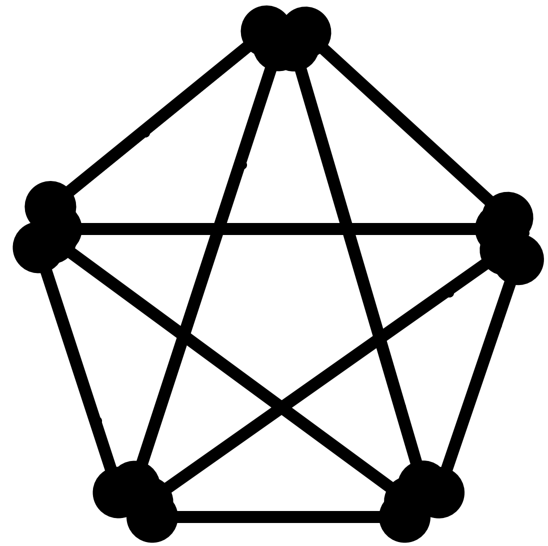
- Граф, що має плоску реалізацію, називається ***планарним***.





- Два графи називаються ***гомеоморфними***, якщо після вилучення з них вершин другого степеня з подальшим об'єднанням інцидентних цим вершинам ребер вони стають ізоморфними.





Теорема Понтрягіна — Куратовського

Граф G є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам G_1, G_2

5.9. Розфарбування графів

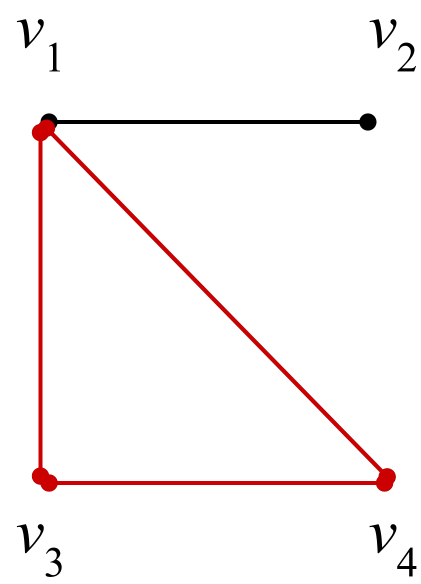
Під час розв'язання багатьох проблем доцільно розглядати графи з фарбованими вершинами – мічені графи, для яких кожній вершині v зіставляється деякий колір c_v, причому суміжні вершини фарбуються у різні кольори.

- Мінімальна кількість кольорів, достатня для фарбування вершин графу, називається ***хроматичним числом*** $\gamma(G)$. Граф з хроматичним числом називають ***k–колірним***.

Повний граф з n вершинами є n-колірним.

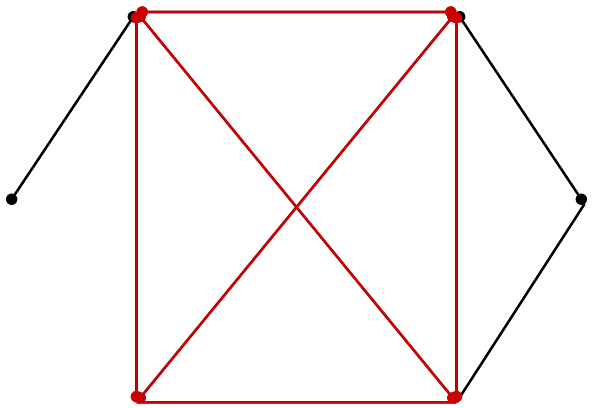
Порожній граф, незалежно від кількості вершин, – одноколірним.

Приклад. Оцінити хроматичне число графа.



Цей граф містить підграф, що є повним графом з трьома вершинами, отже $\gamma(G)\geq 3$; з другого боку кольорів не може бути більше кількості вершин, отже $\gamma(G)\leq 4$.

Приклад. Оцінити хроматичне число графа.



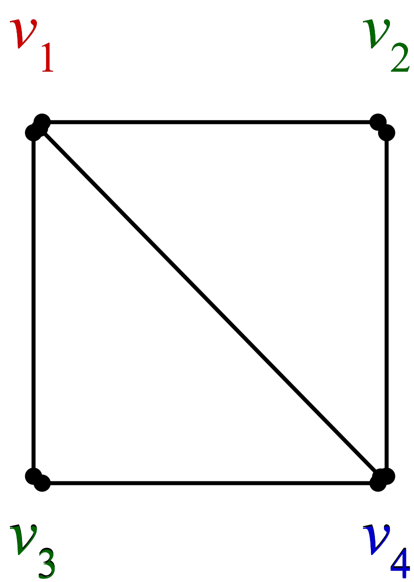
Цей граф містить підграф, що є повним графом з чотирма вершинами, отже $\gamma(G) \geq 4$; з другого боку кольорів не може бути більше кількості вершин, отже $\gamma(G) \leq 6$.

Фарбування вершин графа

Алгоритм Уелша-Пауелла

1) Вершини графу впорядковуються за спаданням степенів. $i=1$.
2) Вершина, що перша у списку, фарбується у колір c_i.
3) У той же колір c_i фарбуються в порядку за списком усі вершини, несуміжні з вершинами, вже пофарбованими на цьому кроці.
4) Пофарбовані вершини викреслюють із списку. $i=i+1$.
5) Повторюємо пункти 2-4, поки у списку є непофарбовані вершини.

Приклад. Розфарбувати вершини графа.



$v_1, \ v_4, \ v_2, \ v_3$

1.Розташуємо вершини за спаданням степенів: v_1, v_4, v_2, v_3.

2.Зіставимо вершині v_1 колір c_1; вершин, несуміжних v_1, у списку більше немає, тому змінюємо колір і викреслимо вершину v_1 зі списку.

3.Вершину v_4 (першу, що залишилась у списку) фарбуємо у колір c_2; вершин, несуміжних v_4, у списку більше немає, тому змінюємо колір і викреслимо вершину v_4 зі списку.

4.Вершину v_2 фарбуємо у колір колір c_3; у цей же колір пофарбуємо вершину v_3, несуміжну з v_2.

5.Непофарбованих вершин більше немає.

Однією з перших задач, пов’язаних із фарбуванням графів, є фарбування географічної карти так, щоб сусідні країни були пофарбовані різними кольорами.

У зв’язку з пошуком мінімальної кількості кольорів, потрібних для фарбування карти, в середині XIX століття була сформульована так звана “проблема чотирьох кольорів”, доведена 1976р. К.Аппелем і В. Хейкенем за допомогою комп’ютера.

Теорема чотирьох фарб

Для фарбування вершин (граней) планарного графу достатньо чотирьох кольорів.

- ***Гранню*** (***коміркою***) плоского графа називається така непорожня замкнена підобласть площини, що будь-які дві точки області можна з'єднати простою кривою, що лежить всередині області, не перетинаючись з ребрами графа.
- ***Границею грані*** вважається множина ребер і вершин графа, що належать грані.
- Будь-який скінченний плоский граф має в точності одну ***необмежену*** грань, яка називається ***зовнішньою*** гранню. Решта граней (***обмежених***) називаються ***внутрішніми***.
- ***Цикломатичне число*** $v=m-n+1$ — число комірок зв'язного плоского графа (замість одиниці можна ставити кількість компонент зв'язності).

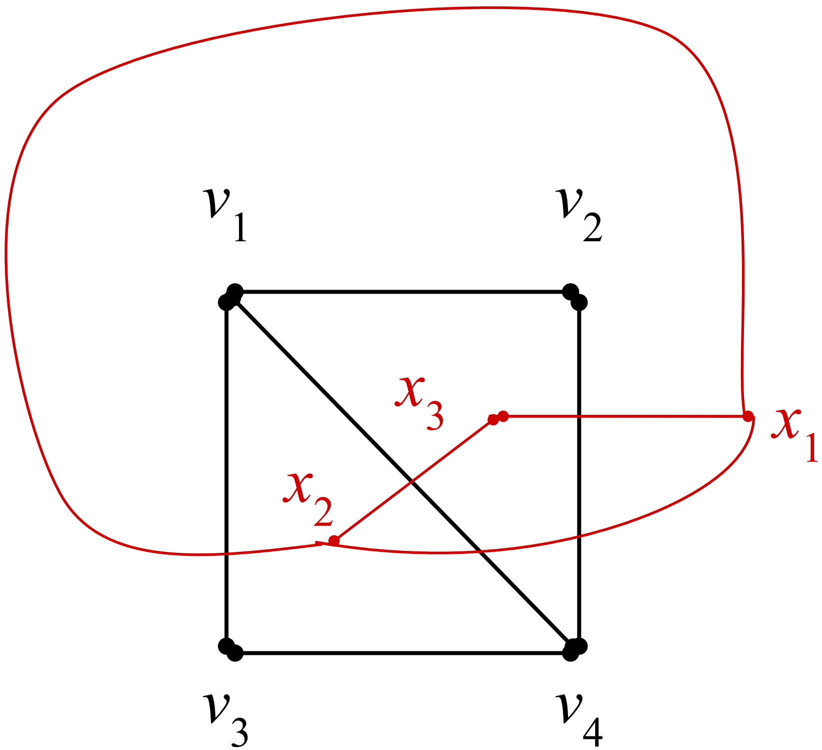
У цих термінах задача фарбування географічної карти – це задача фарбування граней плоского графа.

Задачу фарбування граней графу можна звести до задачі фарбування вершин, якщо перейти від заданого графа до двоїстого йому.

- Нехай G – плоский граф з кількістю вершин, ребер і граней n_X, n_Y, n_r відповідно. Плоский граф G^* з кількістю вершин, ребер і граней n^*_X, n^*_Y, n^*_r відповідно називають ***двоїстим*** (***дуальним***) до графу G, якщо:

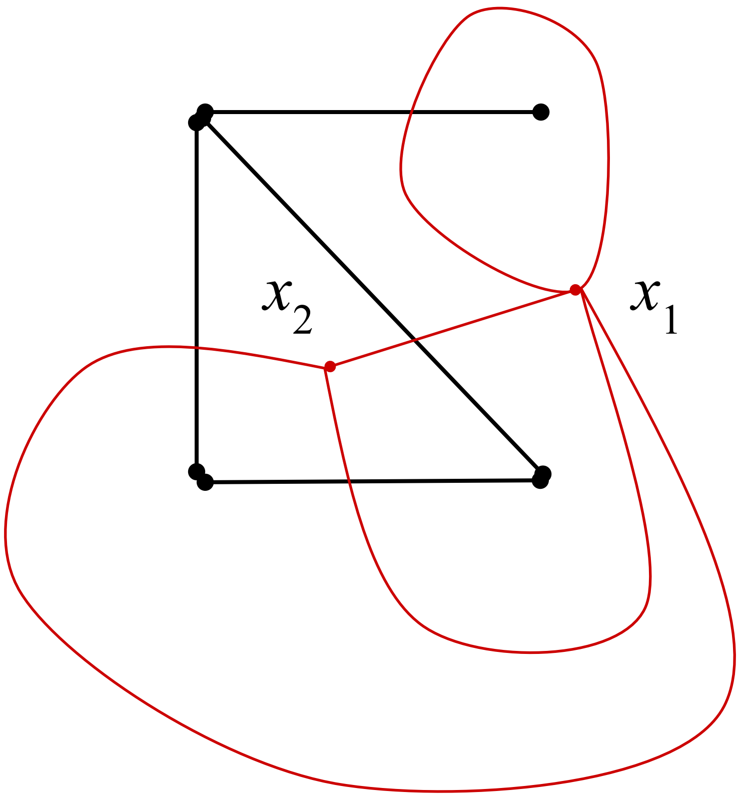
1. $n^*_Y = n_Y$, $n^*_X = n_r$
2. Кожна грань r графу G містить рівно одну вершину x^* графу G^* (вершина x^* графу G^* відповідає грані r графу G);
3. Кожне ребро y графу G перетинається рівно з одним ребром y^* графу G^* (ребро y графу G відповідає ребру y^* графу G^*).

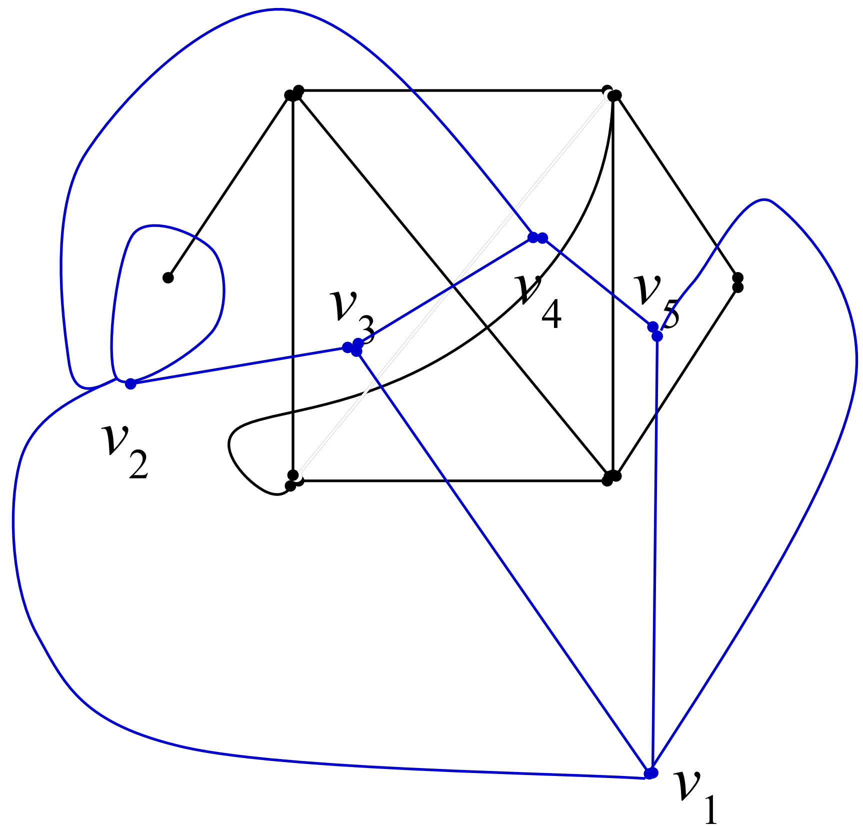
Приклад. Розфарбувати грані графа.



Цей граф містить підграф, що є повним графом з трьома вершинами, отже $\gamma(G) \geq 3$; з другого боку кольорів не може бути більше кількості вершин, отже $\gamma(G)=3$.

Приклад. Побудувати двоїстий граф.





Прикладні задачі, що зв'язані з розфарбуваннями:

1. *Задача завантаження (розміщення) n продуктів (предметів) по ящикам (сховищам)*. Модельний граф G має n вершин, що відповідають продуктам, а наявність ребра (x_i, x_j) означає, що продукт x_i несумісний з x_j. Якщо місткості Q_i ящиків великі ($Q_i \geq n$), то задача розміщення у найменше число ящиків еквівалентна задачі оптимального розфарбування вершин графа G. При обмеженні місткості Q_i до звичайних умов розфарбування додадуться обмеження на кількість вершин одного кольору.

2. В задачах *теорії розкладів* (інакше, *календарного планування*) операціям зіставляються часові інтервали. Віднесемо їм вершини x_i модельного графа G, в якому є ребро (x_i, x_j) тоді і тільки тоді, коли операції x_i, x_j несумісні у часі. При однаковій довжині та довільній черговості операцій оптимальний розклад (сумарний час, що мінімізує виконання всіх робіт) еквівалентний оптимальному розфарбуванню модельного графа G. Хроматичне число дорівнює оптимальному часу виконання всіх робіт: $\gamma(G) = T_{min}$. Крім того, різні кольори можуть відповідати, наприклад, різним ділянкам (приміщенням), і якщо на i-й ділянці не можна виконати більше Q_i операцій одночасно, то в модельному розфарбуванні з'являється додаткове обмеження на кількість вершин i-го кольору.