ВЫБОР МОДЕЛИ

Лекция 9

Построение и выбор аналитических моделей

ЧАСТЬ 1

Поиск аналитических зависимостей методом наименьших квадратов

Назначение и идея метода

Назначение метода:

Поиск аналитической зависимости $z = f(x)$ по данным эксперимента.

Идея метода

Полагаем известными:

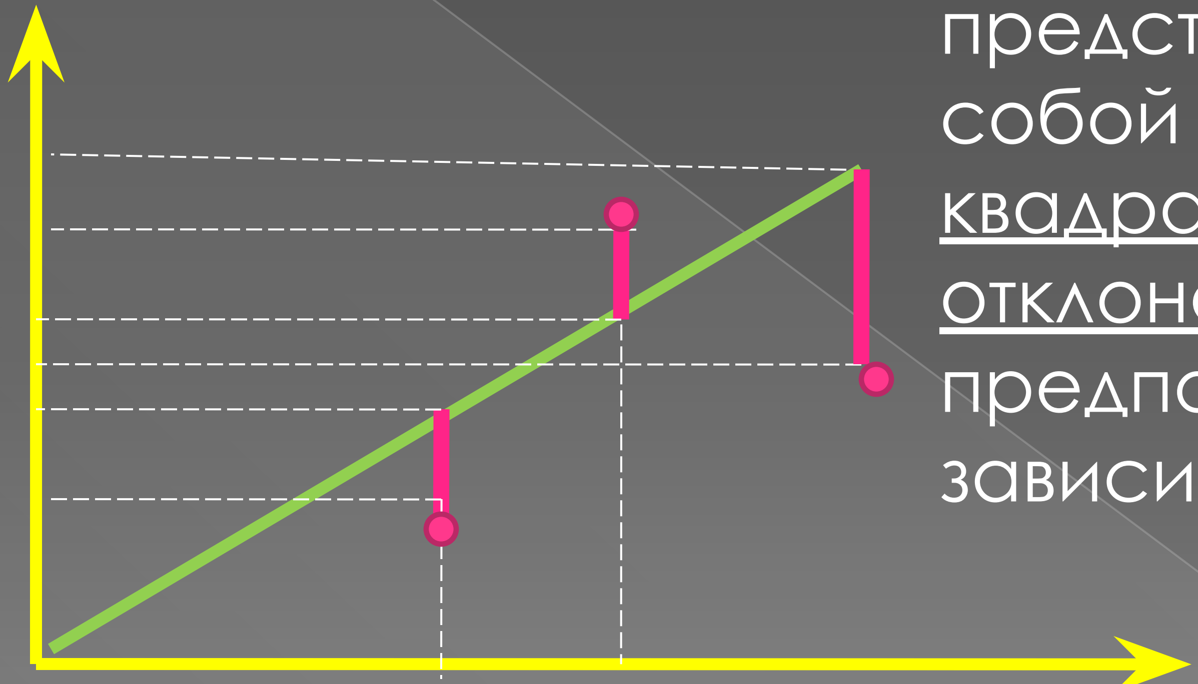
а) предполагаемый вид исходной зависимости $z = f(x)$;

б) таблицу, определяющую экспериментально полученную зависимость $y_i\,(x_i)$, где i - номер эксперимента

Идея состоит в поиске коэффициентов функции $z=f(x)$ которые бы минимизировали функцию S вида:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - z(x_i)^2) \qquad (1.1)$$

Иллюстрация к формуле (1.1)



Формула (1.1) представляет собой <u>сумму квадратов отклонений </u>от предполагаемой зависимости.

ПРИМЕР 1

Поиск коэффициентов полинома.

Пусть $z(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$. Тогда точке минимума функции *S* соответствуют условия:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 0; \ \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0; \frac{\partial S}{\partial c_3} = 0. \quad (1.2$$

Полученная на основании (1.2) система уравнений

$$
\begin{cases}
nC_1 + C_2 \sum_{i=1}^{n} x_i + C_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
C_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + C_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + C_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum x_i y \qquad (1.3) \\
C_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + C_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + C_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i
\end{cases}
$$

ПОСЛЕДНИЙ ШАГ

- Система (1.3) решается относительно C_1, C_2, C_3, что позволяет определить вид функции:

$$\boxed{Z(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i\, x^{i-1}}$$

ЧАСТЬ 2

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Форма представления исходных данных

Метод основан на последовательном исключении неизвестных. Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & f_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & f_n \end{cases} \qquad (1.4)$$

Исключение x_1 из (n-1) уравнений

- Для этого i-ое уравнение делится на a_{i1}, а затем 1-ое уравнение вычитается из всех остальных. При этом система (1.4) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^1 x_2 + \dots + b_{1n}^1 x_n = F_1^1 \\ \qquad b_{22}^1 x_2 + \dots + b_{2n}^1 x_n = F_2^1 \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad b_{n2}^1 x_2 + \dots + b_{nn}^1 x_n = F_n^1 \end{cases} \qquad (1.5)$$

- См. следующий слайд.

Компоненты системы (1.5)

$$b_{ij}^{1} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

$$F_{ii}^{1} = \frac{f_i}{a_{i1}} - \frac{f_1}{a_{11}}$$

$$i = \overline{1, n}; \; j = \overline{1, n}$$

Исключение x_i в (n-i) уравнениях

- Для этого в (1.5) повторяется применительно к x_2 предыдущая процедура. Повторяя ее последовательно для x_3, x_4, …, x_n, получим:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^1 x_2 + \ldots + b_{1n}^1 x_n = F_1^1 \\ \qquad x_2 + \ldots + b_{2n}^2 x_n = F_2^2 \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad \qquad x_n = F_n^n \end{cases} \qquad (1.6)$$

Решение системы (1.6)

- Переменные системы (1.6) вычисляются последовательно, начиная с x_n. Т.о. размерность матрицы на каждой итерации уменьшается на 1.

Пример 2

- Поиск коэффициентов аналитической модели, описываемой экспонентой:

$$y(x) = C_1 e^{c_2 x}. \qquad (1.7)$$

Преобразование уравнения (1.7)

- Логарифмируя, получим полином:

$$T = \ln y(x) = \ln C_1 + C_2 x$$

Сведение задачи к известному виду

- Таким образом, задачу вновь удалось свести к поиску коэффициентов полинома. Функция *S* имеет вид:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i - T_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - \ln C_1 - C_2 x_i \right)^2 .$$

Приравнивая нулю производные, получим систему (1.8):

$$\begin{cases} n\ln C_1 + C_2\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\ln y_i \\ [\ln C_1]\sum_{i=1}^{n} x_i + C_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\ln y_i \end{cases} \qquad (1.8)$$

Исходные данные

№	x	y
1	0	2
2	1	5,4365
3	2	14,778

Вид системы (1.8)

$$\begin{cases} 3C_1^{'} + 3C_2 = 5{,}0793; \\ 3C_1^{'} + 5C_2 = 7{,}0793, \end{cases} \qquad (1.9)$$

где $C_1^{'} = \ln(C_1)$.

Решение системы (1.9)

$$\begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 = 1; \end{cases}$$

$$y = 2e^x.$$

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Поиск коэффициентов аналитической модели, описываемой уравнением вида:

$$y(x) = C_1 x^{c_2}. \quad (2.0)$$

- Исходные данные представлены в таблице на следующем слайде.

Таблица исходных данных

№	x	y
1	1,0	2,0
2	2,0	4,0
3	3,0	6,0

ЧАСТЬ 3

Выбор модели

Критерии качества аналитических моделей

- Максимальное по абсолютной величине отклонение от экспериментальных данных.
- Квадратичное отклонение - квадратный корень из суммы квадратов такого рода отклонений.
- Среднее квадратичное отклонение - квадратный корнем из суммы квадратов такого рода отклонений деленный на число экспериментальных данных.
- Сумма абсолютных величин отклонений от экспериментальных данных.
- Среднее абсолютное отклонение- сумма абсолютных величин отклонений от экспериментальных данных, деленная на число экспериментальных данных.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Привести критерии качества аналитических моделей, отсутствующие на предыдущем слайде.

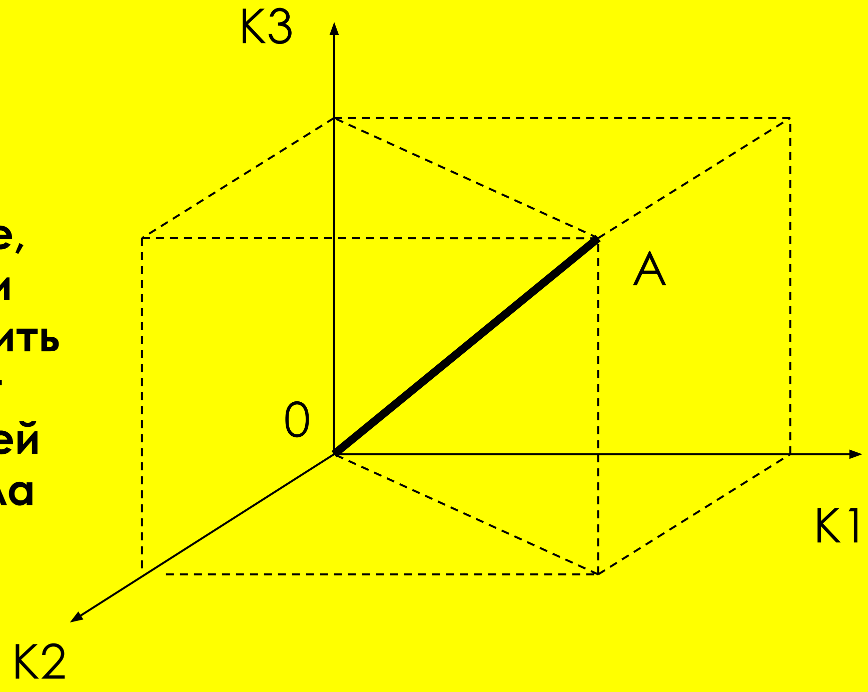
Графическая интерпретация

- Каждой аналитической модели y(x) можно поставить в соответствие некоторую точку в многомерном пространстве, оси которого соответствуют выбранным критериям качества K , а конкретные значения на этих осях отражают значения соответствующих критериев. (см. рис. на следующем слайде).

1
2
3

Сравнение интегрального критерия с эталоном

Поскольку наилучшим значением для перечисленных выше критериев является нулевое, качество модели z(x) можно оценить расстоянием от соответствующей точки А до начала координат О



Если имеется несколько моделей такого рода, то выбирается та из них, которой соответствует наиболее близкая к началу координат точка.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Выбрать наилучшую из двух моделей:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + \dfrac{C_2}{x}; \\ y_2 = C_1 \cdot \exp(-C_2 \cdot x), \end{cases}$$

- если критериями являются максимальное отклонение и среднеквадратичное отклонение, применительно к таблицам, приведенным на следующих слайдах.

Форма представления персональных исходных данных

X	$У_1$	$У_2$
1	1,0	3,0
2	2,0	1,1
3	3,0	0,4

Таблица персональных исходных данных

1			2			3		
1	2.1	0.36	1	3	0.14	1	3	0.7
2	1.6	0.15	2	2.1	0.02	2	2.5	0.27
3	1.25	0.5	3	1.8	0.002	3	2.33	0.1
4			**5**			**6**		
1	4	0.3	1	4	1.1	1	5	0.4
2	3	0.04	2	3.5	0.4	2	4	0.057
3	2.6	0.005	3	3.2	0.11	3	3.7	0.008

Таблица персональных исходных данных

7			8			9		
1	2.1	0.36	1	2.9	0.14	1	3.1	0.7
2	1.7	0.15	2	2.2	0.02	2	2.5	0.29
3	1.25	0.6	3	1.7	0.002	3	2.33	0.11
10			**11**			**12**		
1	4	0.31	1	4.1	1.1	1	4.8	0.41
2	3	0.039	2	3.4	0.45	2	3.9	0.055
3	2.8	0.005	3	3.23	0.115	3	3.6	0.009

Таблица персональных исходных данных

13			14			15		
1	2.0	0.36	1	3.04	0.14	1	3.02	0.697
2	1.7	0.17	2	2.05	0.019	2	2.48	0.268
3	1.23	0.48	3	1.81	0.002	3	2.31	0.097
16			**17**			**18**		
1	3.8	0.32	1	4.04	1.12	1	5.2	0.412
2	3.1	0.041	2	3.501	0.389	2	3.89	0.056
3	2.65	0.005	3	3.205	0.116	3	3.71	0.008

Таблица персональных исходных данных

19			20			21		
1	2.106	0.359	1	3.1	0.141	1	3.0	0.731
2	1.591	0.161	2	2.13	0.023	2	2.51	0.272
3	1.253	0.51	3	1.82	0.002	3	2.334	0.12
22			**23**			**24**		
1	3.98	0.32	1	4.02	1.098	1	5.05	0.42
2	3.99	0.041	2	3.48	0.398	2	3.95	0.056
3	2.62	0.005	3	3.189	0.112	3	3.702	0.008