

ГЛАВА

3

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 11. Основные понятия

§ 12. Метод подстановки

§ 13. Метод алгебраического сложения

§ 14. Системы двух линейных уравнений
с двумя переменными как математические
модели реальных ситуаций

§ 12. МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Метод подстановки

Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя переменными методом подстановки

1. Выразить y через x из первого уравнения системы.
2. Подставить полученное на первом шаге выражение вместо y во второе уравнение системы.
3. Решить полученное на втором шаге уравнение относительно x .
4. Подставить найденное на третьем шаге значение x в выражение y через x , полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пары значений $(x; y)$, которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шагах.

Замечание. У вас не возник вопрос, почему y выражают именно из первого уравнения и подставляют во второе, почему не выразить y из второго уравнения и не подставить в первое? И вообще, почему выражали y через x , а не x через y , почему такое неравноправие? Ответ: никакой причины нет. Выражайте, что хотите, но ищите наиболее простые варианты.

Пример № 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Метод подстановки основывается на следующем:

1. Выразить одну переменную через другую в первом уравнении;
2. Подставить выраженную переменную во второе уравнение системы;
3. Решить получившееся уравнение с одной переменной;
4. Подставить полученную переменную в первое уравнение системы;
5. Записать ответ.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Из первого уравнения системы получаем

$$y = 3x - 5.$$

2) Подставим найденное выражение вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + (3x - 5) - 7 = 0.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$2x + 3x - 5 - 7 = 0;$$

$$5x - 12 = 0;$$

$$5x = 12;$$

$$x = \frac{12}{5}.$$

4) Подставим найденное значение x в формулу $y = 3x - 5$:

$$y = 3 \cdot \frac{12}{5} - 5 = \frac{36}{5} - 5 = \frac{36 - 25}{5} = \frac{11}{5}.$$

5) Пара $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{11}{5}$, т. е. $x = 2,4$, $y = 2,2$, — единственное решение заданной системы.

Ответ: (2,4; 2,2).

Задание: Решите систему уравнений методом подстановки:

№12.2, 12.5, 12.26.

№12.8, №12.10, №12.15.

№ 12.2

a)
$$\begin{cases} y = 1 - 7x, \\ 4x - y = 32; \end{cases}$$

$$4x - y = 32$$

$$4x - (1 - 7x) = 32$$

$$4x - 1 + 7x = 32$$

$$4x + 7x = 32 + 1$$

$$11x = 33$$

$$x = 3$$

$$y = 1 - 7x$$

$$y = 1 - 7 \cdot 3$$

$$y = -20$$

Заметим, что в первом уравнении уже выражена переменная y , подставим её во второе уравнение системы.

Решим второе уравнение с одной переменной

Подставим найденное x , в первое уравнение и найдём соответствующее значение y .

Ответ: (3;-20)

№ 12.2

$$б) \begin{cases} x = y + 2, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$$

$$3x - 2y = 9$$

$$3(y + 2) - 2y = 9$$

$$3y + 6 - 2y = 9$$

$$3y - 2y = 9 - 6$$

$$y = 3$$

$$x = y + 2$$

$$x = 3 + 2$$

$$x = 5$$

Заметим, что в первом уравнении уже выражена переменная x , подставим её во второе уравнение системы.

Решим второе уравнение с одной переменной

Подставим найденное y , в первое уравнение и найдём соответствующее значение x .

Ответ: (5 ; 3)

№ 12.2

$$\text{в) } \begin{cases} y = x + 1, \\ 5x + 2y = 16; \end{cases}$$

Заметим, что в первом уравнении уже выражена переменная y , подставим её во второе уравнение системы.

$$5x + 2y = 16$$

$$5x + 2(x + 1) = 16$$

$$5x + 2x + 2 = 16$$

Решим второе уравнение с одной переменной

$$5x + 2x = 16 - 2$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

$$y = x + 1$$

$$y = 2 + 1$$

$$y = 3$$

Подставим найденное x , в первое уравнение и найдём соответствующее значение y .

Ответ: (2 ; 3)

№ 12.2

$$\Gamma) \begin{cases} x = 2y - 3, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

$$3x + 2y = 7$$

$$3(2y - 3) + 2y = 7$$

$$6y - 9 + 2y = 7$$

$$6y + 2y = 7 + 9$$

$$8y = 16$$

$$y = 2;$$

$$x = 2y - 3$$

$$x = 2 \cdot 2 - 3$$

$$x = 4 - 3$$

$$x = 1$$

Ответ: (1,2)

Заметим, что в первом уравнении уже выражена переменная x , подставим её во второе уравнение системы.

Решим второе уравнение с одной переменной

Подставим найденное y , в первое уравнение и найдём соответствующее значение x .

12.5

В заданном уравнении выразите одну переменную через другую:

a) $2x + y = 4;$

$$y = 4 - 2x; \quad y = -2x + 4$$

a) $2x + y = 4;$

$$2x = 4 - y$$

$$x = \frac{4 - y}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} - \frac{y}{2}$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}y$$

$$x = 2 - 0,5y; \quad x = -0,5y + 2$$

12.5

В заданном уравнении выразите одну переменную через другую:

$$\text{б) } x + 6y = 9;$$

$$x = 9 - 6y; \quad x = -6y + 9$$

$$\text{б) } x + 6y = 9;$$

$$6y = 9 - x$$

$$y = \frac{9 - x}{6}$$

$$y = \frac{9}{6} - \frac{x}{6}$$

$$y = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x$$

$$y = 1,5 - \frac{1}{6}x; \quad y = -\frac{1}{6}x + 1,5$$

12.5

В заданном уравнении выразите одну переменную через другую:

$$\text{в) } 3a + b = 12;$$

$$b = 12 - 3a; \quad b = -3a + 12$$

$$\text{в) } 3a + b = 12;$$

$$3a = 12 - b$$

$$a = \frac{12 - b}{3}$$

$$a = \frac{12}{3} - \frac{b}{3}$$

$$a = 4 - \frac{1}{3}b; \quad a = -\frac{1}{3}b + 4$$

12.5

В заданном уравнении выразите одну переменную через другую:

$$\text{г) } c + 8d = 15.$$

$$c = 15 - 8d; \quad c = -8d + 15$$

$$\text{г) } c + 8d = 15.$$

$$8d = 15 - c$$

$$d = \frac{15 - c}{8}$$

$$y = \frac{15}{8} - \frac{c}{8}$$

$$y = 1\frac{7}{8} - \frac{1}{8}c; \quad y = -\frac{1}{8}c + 1\frac{7}{8}$$

12.26

Найдите абсциссу точки пересечения графиков двух линейных уравнений с двумя переменными:

а) $4x - 3y = 12$ и $3x + 4y = -24$;

Найти **точку пересечения** мы можем новым для нас способом: **методом подстановки**. Выразим из **любого** уравнения **любую** из переменных, подставим ее во второе уравнение и найдём значение переменной. Затем, подставим полученное значение в другое уравнение и найдем соответствующее значение второй переменной.

Т.к. нам необходимо **найти абсциссу**, то логично будет **выразить y** из одного уравнения и подставить это значение во второе уравнение и найти x .

Удобнее будет выразить y из второго уравнения. (Т.к. чтобы выразить y , необходимо будет делить на 4, можно перевести в десятичную дробь, что удобнее)

12.26

Найдите абсциссу точки пересечения графиков двух линейных уравнений с двумя переменными:

а) $4x - 3y = 12$ и $3x + 4y = -24$;

$$3x + 4y = -24$$

Выразим из второго уравнения y

$$4y = -3x - 24$$

$$y = \frac{-3x}{4} - \frac{24}{4}$$

$$y = -0,75x - 6$$

$$4x - 3y = 12$$

$$4x - 3 \cdot (-0,75x - 6) = 12$$

$$4x + 2,25x + 18 = 12$$

$$6,25x = 12 - 18$$

$$6,25x = -6$$

$$x = -6 : 6,25; \quad x = -0,96$$

Подставим выраженное y в первое уравнение и найдём абсциссу точки пересечения

12.26

Найдите абсциссу точки пересечения графиков двух линейных уравнений с двумя переменными:

б) $5x + 2y = 20$ и $2x - 5y = 10$;

$$5x + 2y = 20$$

$$2y = -5x + 20$$

$$y = -\frac{5x}{2} + \frac{20}{2}$$

$$y = -2,5x + 10$$

$$2x - 5y = 10$$

$$2x - 5 \cdot (-2,5x + 10) = 10$$

$$2x + 12,5x - 50 = 10$$

$$14,5x = 10 + 50$$

$$14,5x = 60$$

$$x = 60 : 14,5; \quad x = \frac{600}{145}; \quad x = \frac{120}{29}; \quad x = 4 \frac{4}{29}$$

Выразим из первого уравнения y

Подставим выраженное y во второе уравнение и найдём абсциссу точки пересечения

12.26

Найдите абсциссу точки пересечения графиков двух линейных уравнений с двумя переменными:

в) $2x - 3y = 12$ и $3x + 2y = 6$;

$$3x + 2y = 6$$

Выразим из второго уравнения y

$$2y = -3x + 6$$

$$y = \frac{-3x}{2} + \frac{6}{2}$$

$$y = -1,5x + 3$$

$$2x - 3y = 12$$

$$2x - 3 \cdot (-1,5x + 3) = 12$$

$$2x + 4,5x - 9 = 12$$

$$6,5x = 12 + 9$$

$$6,5x = 21$$

$$x = 21 : 6,5; \quad x = \frac{210}{65}; \quad x = \frac{42}{13};$$

$$x = 3 \frac{3}{13}$$

Подставим выраженное y в первое уравнение и найдём абсциссу точки пересечения

12.26

Найдите абсциссу точки пересечения графиков двух линейных уравнений с двумя переменными:

г) $5x - 3y = 5$ и $2x + 7y = 4$.

Выразим из первого уравнения y

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 5 \\ 5x - 5 &= 3y \\ y &= \frac{5x}{3} - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Подставим выраженное y во второе уравнение и найдём абсциссу точки пересечения

$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 4 \\ 2x + 7 \cdot \left(\frac{5x}{3} - \frac{5}{3} \right) &= 4 \\ 2x + 7 \cdot \frac{5x}{3} - 7 \cdot \frac{5}{3} &= 4 \\ 2x + \frac{35x}{3} - \frac{35}{3} &= 4 \\ 2x + 11\frac{2}{3}x - 11\frac{2}{3} &= 4 \\ 13\frac{2}{3}x &= 4 + 11\frac{2}{3} \\ x &= 15\frac{2}{3} : 13\frac{2}{3} \\ x &= \frac{47}{3} : \frac{41}{3} \end{aligned}$$

$$x = \frac{47}{41}$$

$$x = 1\frac{6}{41}$$

№12.8

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 3y = 14, \\ 2x + y = 10; \end{cases}$$

$$2x + y = 10$$

$$y = 10 - 2x$$

$$5x - 3y = 14$$

$$5x - 3(10 - 2x) = 14$$

$$5x - 30 + 6x = 14$$

$$5x + 6x = 14 + 30$$

$$11x = 44$$

$$x = 4$$

$$y = 10 - 2x$$

$$y = 10 - 2 \cdot 4$$

$$y = 2$$

► Выразим y из второго уравнения системы, удобно и проще.

Решим первое уравнение с одной переменной

Подставим найденное x , в первое уравнение и найдём соответствующее значение y .

Ответ: (4,2)

№12.8

$$б) \begin{cases} x + 5y = 35, \\ 3x + 2y = 27; \end{cases}$$

$$x + 5y = 35$$

$$x = 35 - 5y$$

$$3x + 2y = 27$$

$$3(35 - 5y) + 2y = 27$$

$$105 - 15y + 2y = 27$$

$$-15y + 2y = 27 - 105$$

$$-13y = -78$$

$$y = 6$$

$$x = 35 - 5y$$

$$x = 35 - 5 \cdot (6)$$

$$x = 35 - 30$$

$$x = 5$$

► Выразим x из первого уравнения системы, удобно и проще.

Решим второе уравнение с одной переменной

Подставим найденное y , в первое уравнение и найдём соответствующее значение x .

Ответ: (5;6)

№12.8

$$в) \begin{cases} 7x - 2y = 15, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$$

$$2x + y = 9$$

$$y = 9 - 2x$$

$$7x - 2y = 15$$

$$7x - 2(9 - 2x) = 15$$

$$7x - 18 + 4x = 15$$

$$7x + 4x = 15 + 18$$

$$11x = 33$$

$$x = 3$$

$$y = 9 - 2x$$

$$y = 9 - 2 \cdot 3$$

$$y = 3$$

- ▶ Выразим y из второго уравнения системы, удобно и проще.

Решим первое уравнение с одной переменной

Подставим найденное x , в первое уравнение и найдём соответствующее значение y .

Ответ: (3,3)

№12.8

$$\Gamma) \begin{cases} x + 3y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

$$x + 3y = 2$$

$$x = 2 - 3y$$

$$2x + 3y = 7$$

$$2(2 - 3y) + 3y = 7$$

$$4 - 6y + 3y = 7$$

$$-6y + 3y = 7 - 4$$

$$-3y = 3$$

$$y = -1$$

$$x = 2 - 3y$$

$$x = 2 - 3 \cdot (-1)$$

$$x = 2 + 3$$

$$x = 5$$

► Выразим x из первого уравнения системы, удобно и проще.

Решим второе уравнение с одной переменной

Подставим найденное y , в первое уравнение и найдём соответствующее значение x .

Ответ: (5;-1)

№12.10

Найдите координаты точки пересечения прямых:

а) $y = 10x + 30$ и $y = -12x + 272$;

Разберем пример под буквой а, остальные по аналогии.

План: приравнять y , найти значение переменной x , подставить его в любое из двух уравнений и найти соответствующее значение y .

$$10x + 30 = -12x + 272$$

$$10x + 12x = 272 - 30$$

$$22x = 242$$

$$x = 11$$

$$y = 10x + 30$$

$$y = 10 \cdot 11 + 30$$

$$y = 140$$

Ответ: (11;140)

№12.15

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 5y = 1, \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$$

1. Выразим, к примеру, из второго уравнения переменную

y.

$$4x - 5y = 1$$

$$4x - 1 = 5y$$

$$y = \frac{4x - 1}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$$

$$y = 0,8x - 0,2$$

Решите систему уравнений:

2. Подставим выраженную переменную в первое уравнение системы и найдём значение переменной x.

$$2x - 3y = 2$$

$$2x - 3(0,8x - 0,2) = 2$$

$$2x - 2,4x + 0,6 = 2$$

$$2x - 2,4x = 2 - 0,6$$

$$-0,4x = 1,4$$

$$x = 1,4 : (-0,4)$$

$$x = -14 : 4$$

$$x = -3,5$$

3. Подставим найденное значение x, во второе уравнение системы, найдём соответствующее значение y.

$$y = 0,8x - 0,2$$

$$y = 0,8 \cdot (-3,5) - 0,2$$

$$y = -2,8 - 0,2$$

$$y = -3$$

Ответ: (-3,5;-3)

№12.15

$$б) \begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$$

1. Выразим, к примеру, из второго уравнения переменную x .

$$2x + 3y = 1$$

$$2x = 1 - 3y$$

$$x = \frac{1 - 3y}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$x = -1,5y + 0,5$$

Решите систему уравнений:

2. Подставим выраженную переменную в первое уравнение системы и найдём значение переменной x .

$$3x + 4y = 0$$

$$3 \cdot (-1,5y + 0,5) + 4y = 0$$

$$-4,5y + 1,5 + 4y = 0$$

$$-4,5y + 4y = -1,5$$

$$-0,5y = -1,5$$

$$y = 3$$

3. Подставим найденное значение x , во второе уравнение системы, найдём соответствующее значение y .

$$x = -1,5y + 0,5$$

$$x = -1,5 \cdot 3 + 0,5$$

$$x = -4,5 + 0,5$$

$$x = -4$$

Ответ: (-4;3)

Остальные задания выполняются по аналогии.

- ▶ Если остались вопросы – пишите!!!!