Динамика вращательного движения

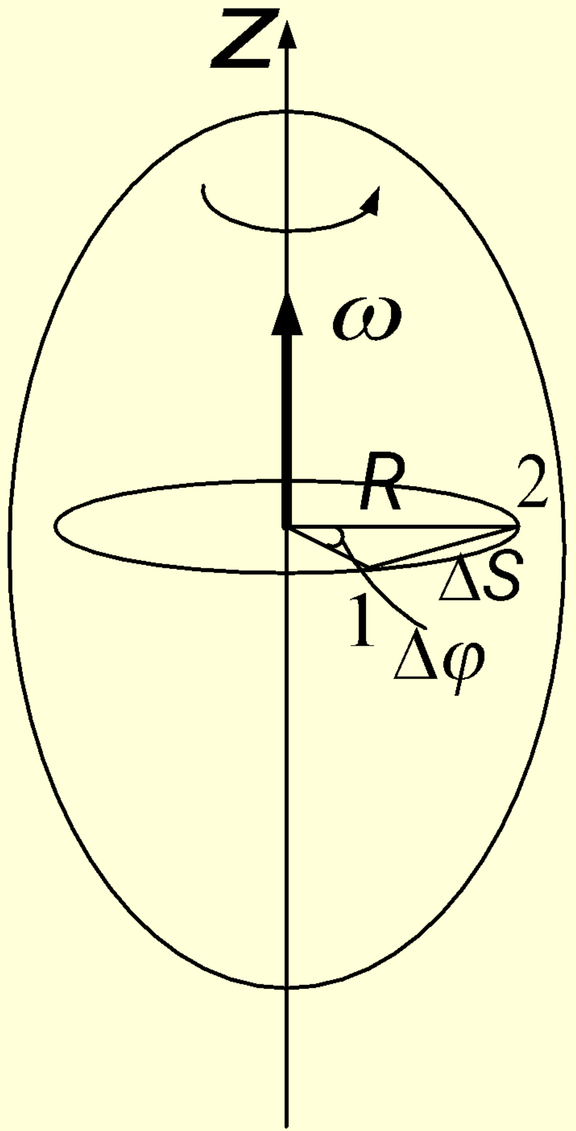
Лекцию читает
Кандидат физико-математических наук, доцент
Кузьмин Юрий Ильич

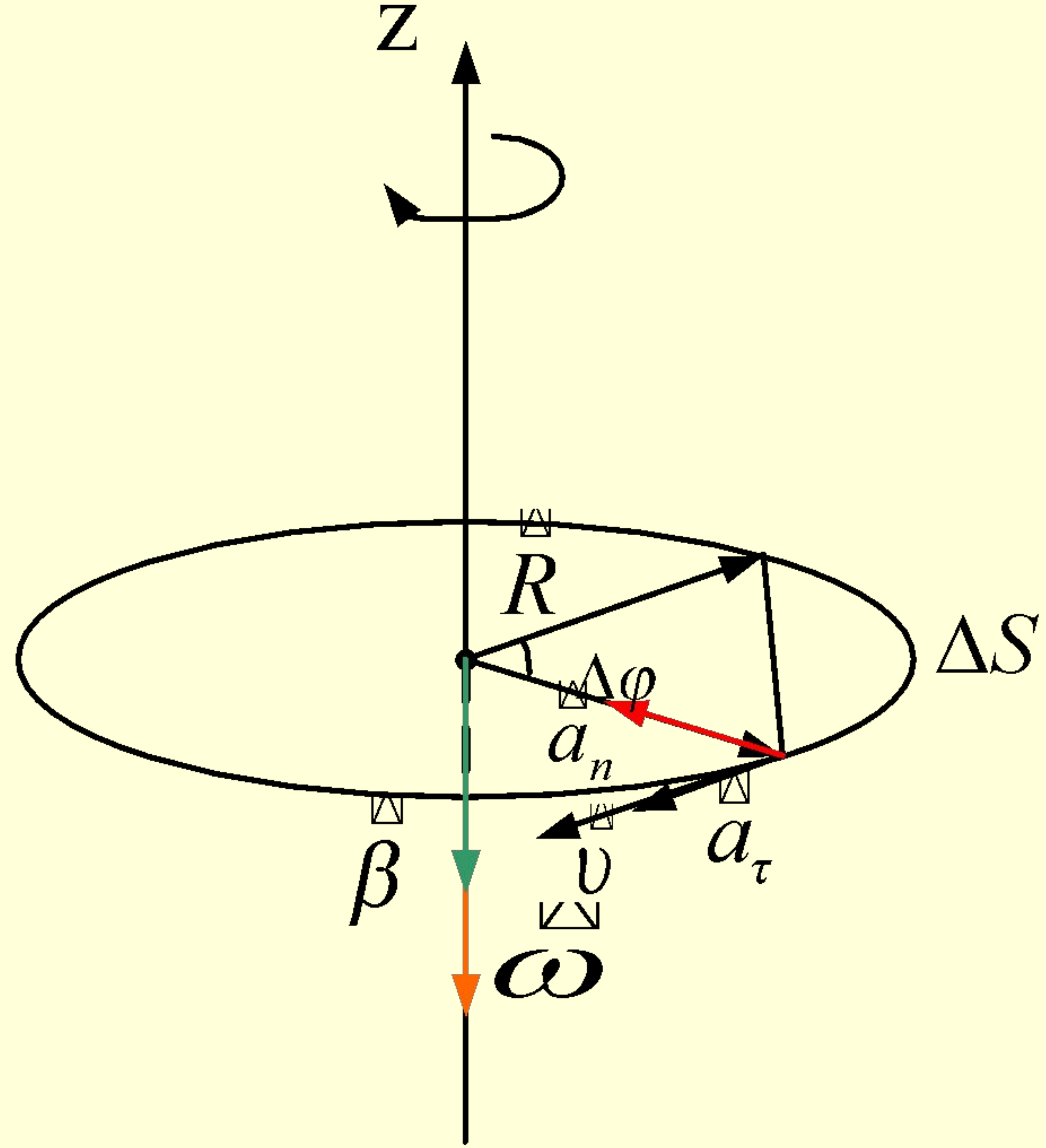
Вспомним основные формулы кинематики вращательного движения

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$




Z
R
ΔS
Δφ
a_n
a_τ
β
υ
ω

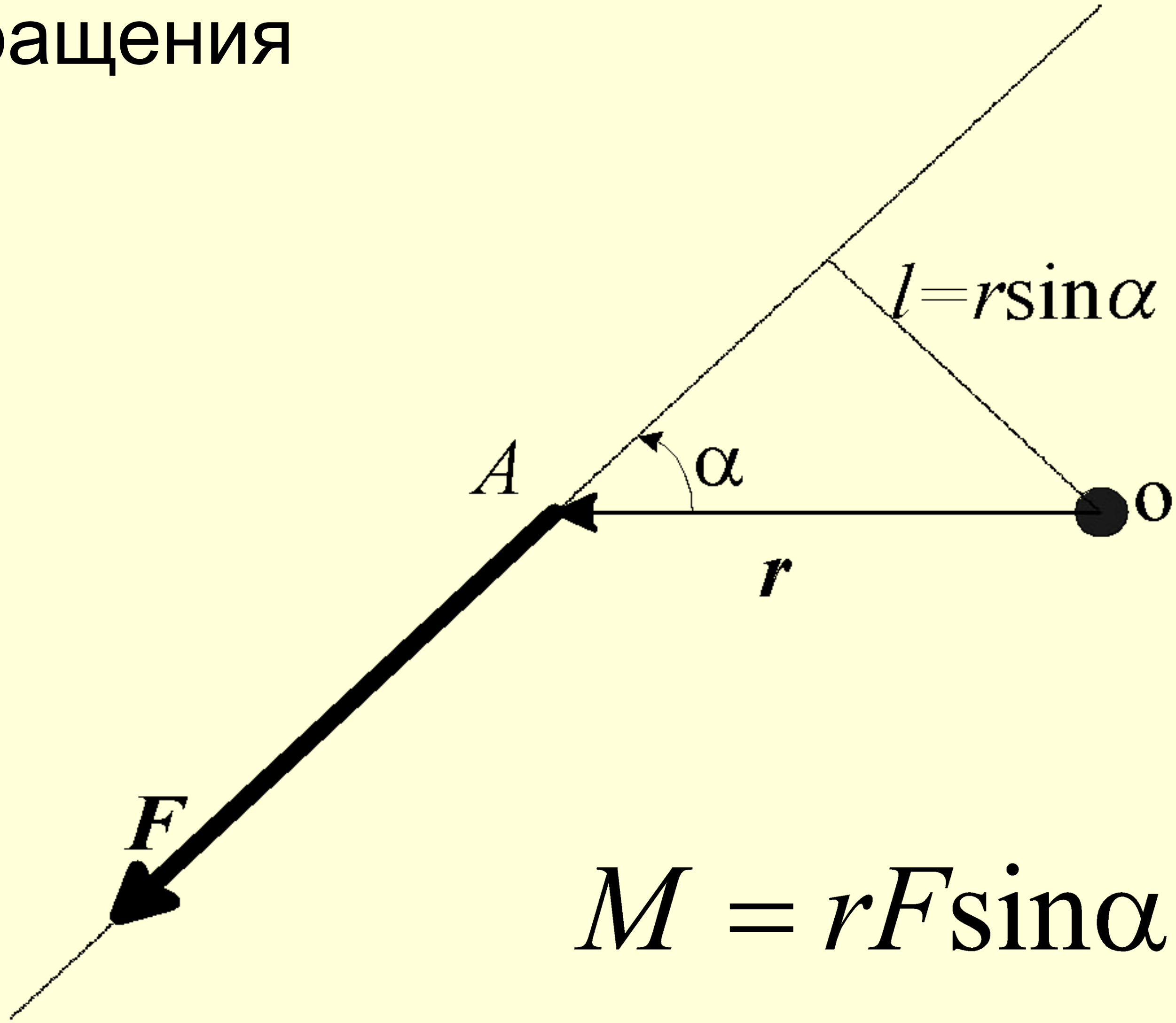
1. МОМЕНТЫ СИЛЫ

- Определим момент силы относительно
- центра вращения О

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1)$$

- ***М*** – векторная величина, определяемая
- векторным произведением радиус-
- вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$

Момент силы относительно центра вращения



$$M = rF\sin\alpha = Fl$$

Вначале определим момент силы относительно точки (О): это векторная величина определяемая векторным произведением радиус-вектора на силу.

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \tag{1}$$

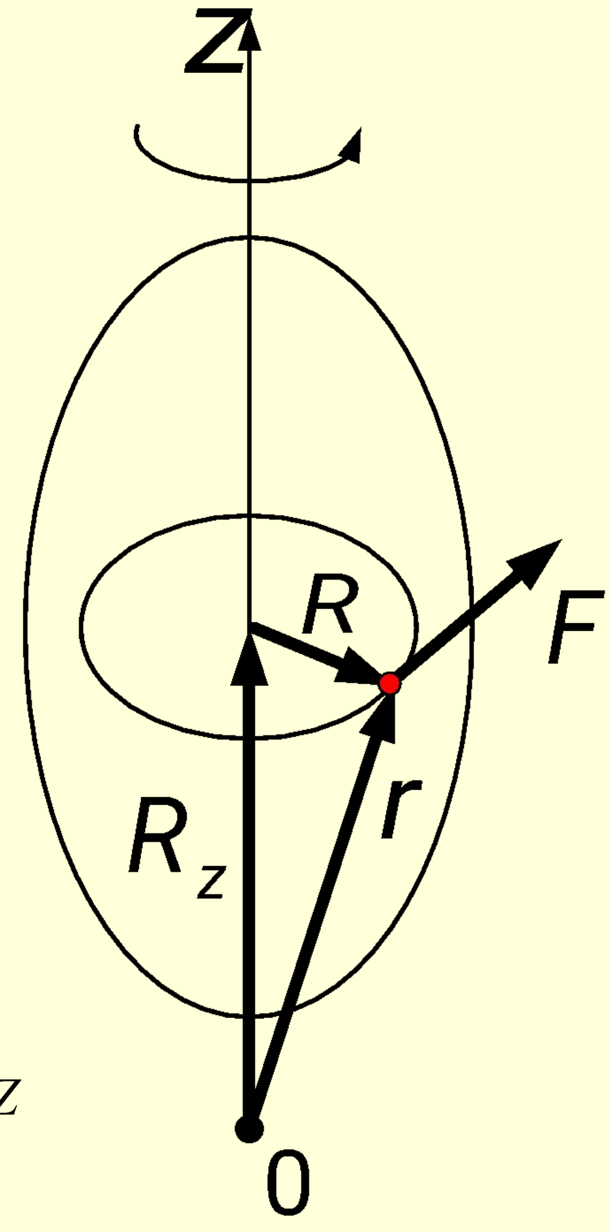
Направление определяется правилом буравчика. Момент силы относительно оси вращения - это скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора

$$M_Z = [\vec{r}, \vec{F}]_Z \tag{2}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M_Z = [\vec{r}, \vec{F}]_Z$$

$$M_Z = \left[\vec{R}, \vec{F}\right]_Z + \left[\vec{R}_Z, \vec{F}\right]_Z = \left[\vec{R}, \vec{F}\right]_Z$$



Разложим $\vec{r}$ на две составляющие.

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{R}_Z \qquad (3)$$

Подставив (3) в выражение (2), получим

$$M_Z = \left[\vec{R}, \vec{F}\right]_Z + \left[\vec{R}_Z, \vec{F}\right]_Z = \left[\vec{R}, \vec{F}\right]_Z \qquad (4)$$

т.к. второй член в выражении (4) равен нулю.

2. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ.
МОМЕНТ ИМПУЛЬСА.

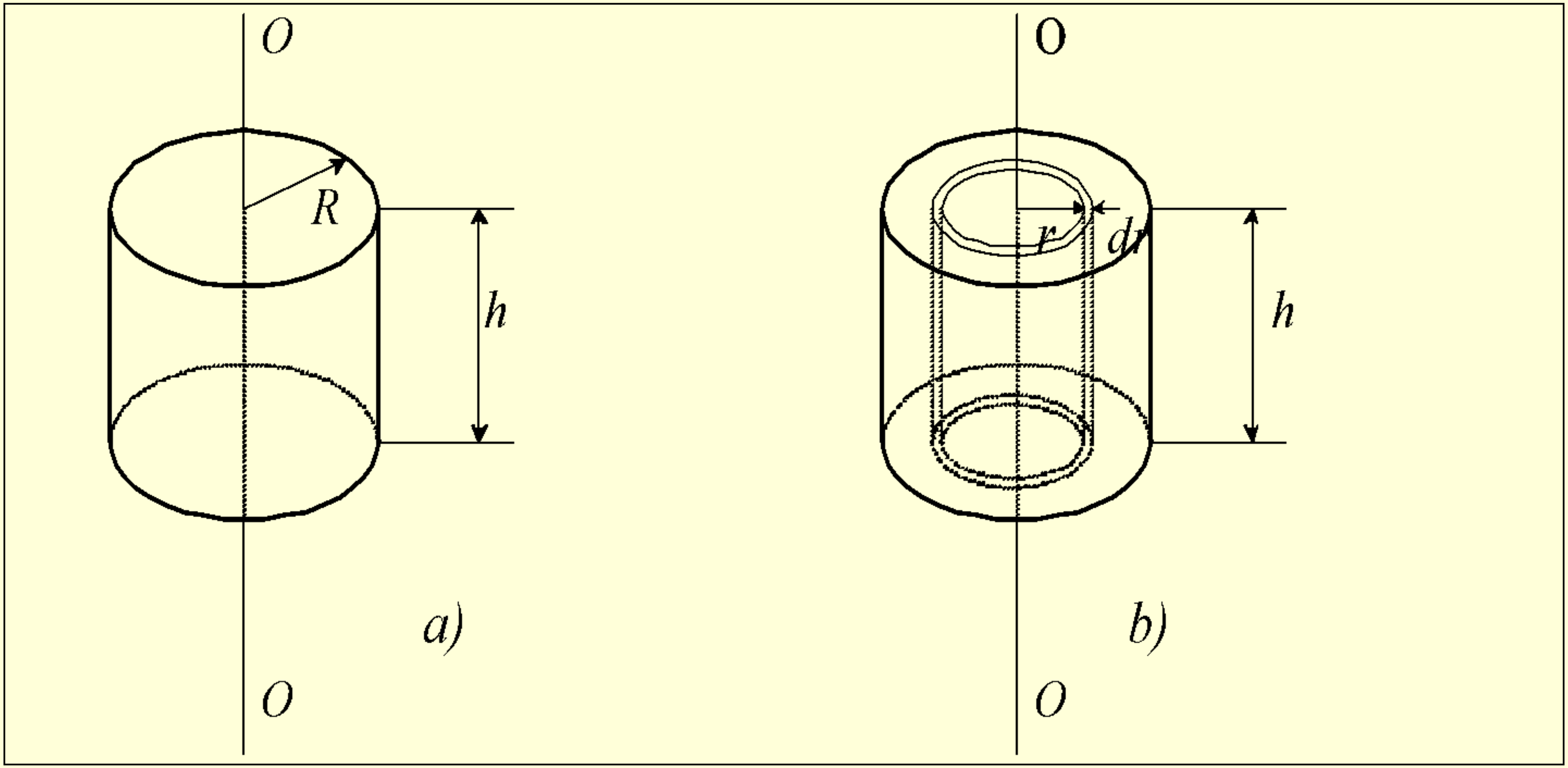
- Определение момента инерции элементарного объема относительно оси вращения:

$$I_i = m_i R_i^2 \qquad (1)$$

- Так как абсолютно твердое тело недеформируемо, то момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции элементарных объемов:

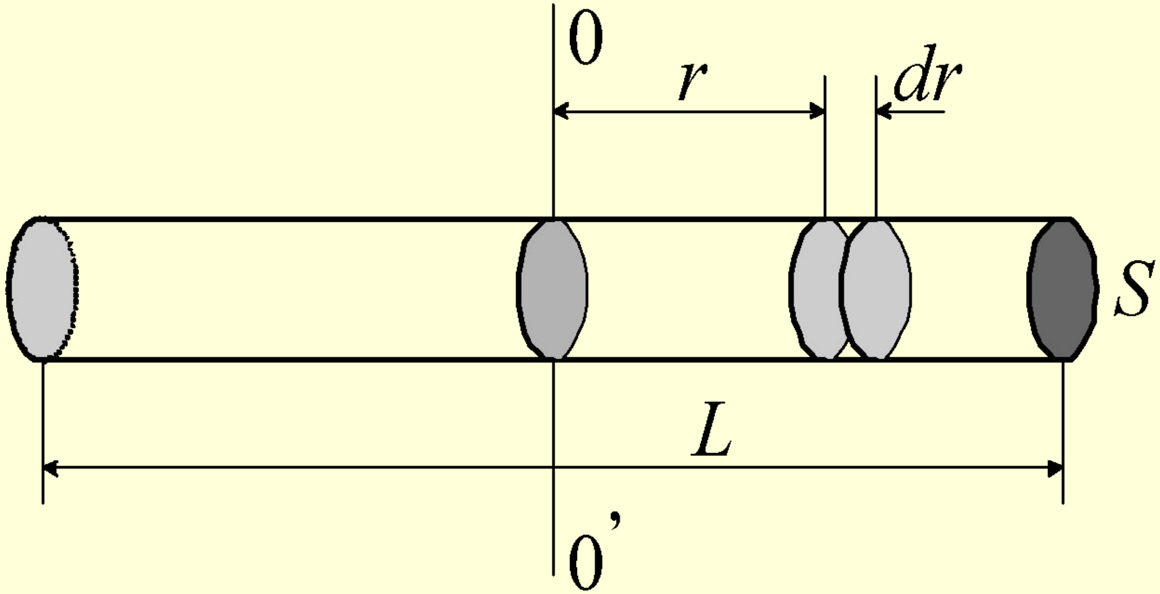
$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \qquad (2)$$

Момент инерции цилиндра (диска)



$$J = \int_0^R \rho r^2 2\pi r h dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} \qquad J = \frac{mR^2}{2}$$

- Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс



$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \rho r^2 S dr = \rho S 2 \int_0^{\frac{L}{2}} r^2 dr = 2\rho S \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{\rho S L^3}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} m l^2$$

Момент инерции тел относительно неподвижной оси, проходящей через центр симметрии. Тела считаются однородными.

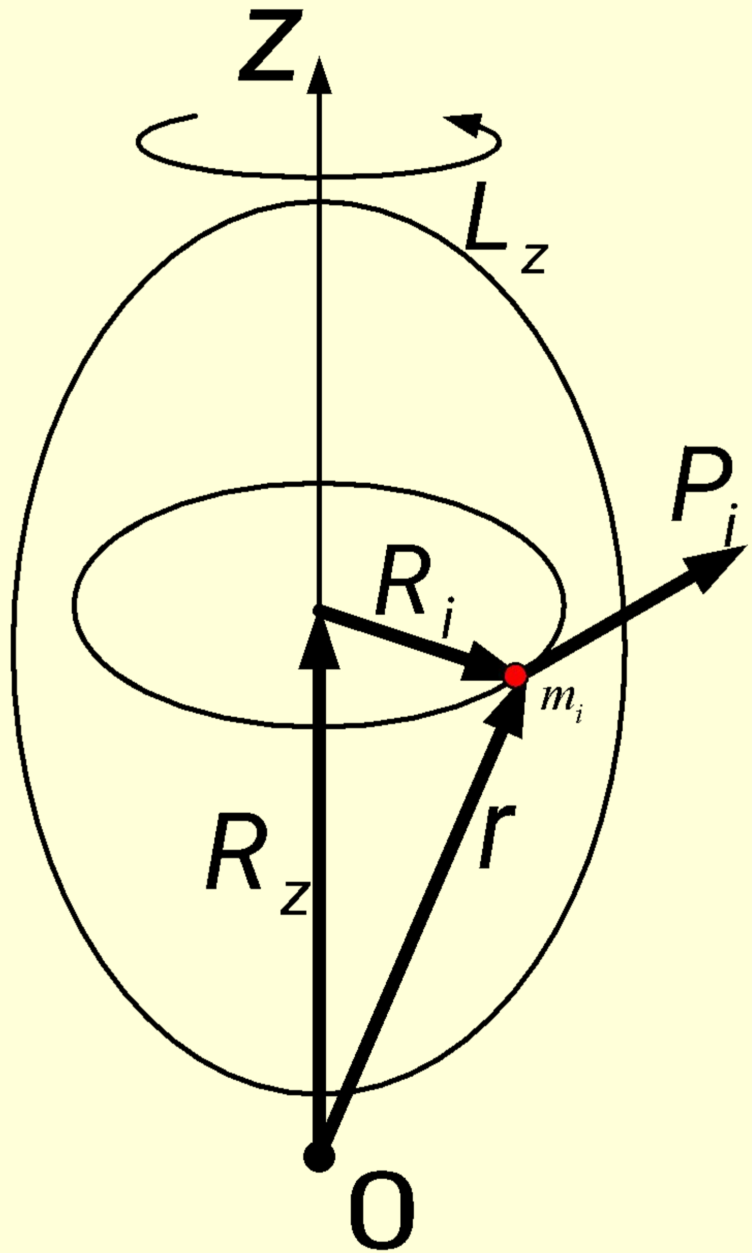
Тело	**Момент инерции I**
1.Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	mR^2
2. Сплошной цилиндр или диск радиуса R	$\frac{1}{2}mR^2$
3. Шар радиуса R	$\frac{2}{5}mR^2$
4.Прямой тонкий стержень длиной l. Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$

Момент импульса твердого тела

- Вначале определяем момент импульса элементарного объема относительно оси вращения:

$$L_{Zi} = \left[\vec{R}_i, \vec{p}_i\right]_Z \qquad (3)$$

- где $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ – импульс элементарного объема.



Z
L z
P i
R i
m i
R z
r
O

- Затем, просуммировав по всем элементарным объемам, получим выражение для момента импульса твердого тела:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- где I – момент инерции твердого тела.

- Для кинетической энергии вращательного движения твёрдого тела

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}\quad ; \quad E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} \qquad (4)$$

- где I_c – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс;
- v_c – скорость центра масс тела.

Основное уравнение динамики вращательного

- Запишем второй закон Ньютона для каждого элементарного объема:

$$F_i = m_i a_{\tau i} \qquad (1)$$

- где F_i – касательная составляющая силы, $a_{\tau i} = \beta R_i$ – тангенциальное ускорение.
- Подставим выражение для $a_{\tau i}$ в формулу (1) и умножим обе части полученного выражения на Ri.

Тогда:

$$F_i R_i = m_i R_i^2 \cdot \beta = I_i \beta \qquad (2)$$

- Где $I_i = m_i R_i^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси вращения,

- $M_i = F_i R_i$ – момент силы относительно оси вращения.

- Момент M_i можно представить как сумму моментов всех внутренних и внешних сил, действующих на точку.

- Просуммировав выражение (2) по всем элементарным объемам получим основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = I\vec{\beta} \qquad (3)$$

- Получим другую форму закона основного уравнения динамики, используя понятие момента импульса .
- Перепишем выражение (3):

$$\vec{M} = I\vec{\beta} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (4)$$

- *Формулировка: Производная момента импульса твердого тела по времени равна результирующему моменту всех внешних сил, вызывающих вращение тела.*
- *При* $\vec{M} = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ *,т.е.*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const} \qquad (5)$$

- *Это математическая запись закона сохранения момента импульса.*

- Формулировка: Момент импульса системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени, если сумма моментов сил, действующих на систему, равна нулю.

- Из закона следует, что так как сохраняется постоянным произведение $I\vec{\omega}$, то увеличение момента инерции приводит к пропорциональному уменьшению частоты вращения и наоборот.

Таблица аналогий величин и законов поступательного и вращательного движения

- **Поступательное** **Вращательное**
- Масса m Момент инерции I
- Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
- Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ Угловое ускорение $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
- Сила $\vec{F}$ Момент силы $\vec{M}$
- Импульс Момент импульса

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

Второй закон Ньютона

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} \\ \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \end{array}\right\}$$

Основное уравнение динамики:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M} = I\vec{\beta} \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \end{array}\right\}$$

Работа:

$$dA = F_s dS \qquad dA = Md\varphi$$

Кинетическая энергия:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

ЗАДАЧА

- К ободу диска радиусом 0,2 м приложена постоянная касательная сила 98,1 Н. При вращении на диск действует момент сил трения, равный 0,5 Нм. Найти массу диска, если известно, что диск вращается с постоянным угловым ускорением 100 рад/с^2.

Дано:

$$R = 2 \cdot 10^{-1}\ \text{м}$$

$$F = 98{,}1\ \text{Н}$$

$$M_{\text{тр}} = 0{,}5\ \text{Н} \cdot \text{м}$$

$$\beta = 10^2\ \text{рад/с}^2$$

---

m = ?

Решение

1. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела:

$$M = I \cdot \beta \qquad (1)$$

$I = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент инерции диска.

$$M = F \cdot R - M_{\text{тр}} \qquad (2)$$

M – результирующий момент всех внешних сил. После подстановки (2) в (1) с учетом (1) получим

$$\frac{mR^2}{2} \cdot \beta = F \cdot R - M_{\text{тр}} \qquad (3)$$

откуда

$$m = \frac{2(FR - M_{\text{тр}})}{\beta R^2}$$

Задача

- На скамье Жуковского стоит человек и держит в вытянутых руках гантели массой 6 кг каждая. Длина руки человека 60 см. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью 4 рад/с. С какой угловой скоростью будет вращаться скамья с человеком, если он опустит руки с гантелями вниз вдоль оси вращения? Суммарный момент инерции человека и скамьи 5кг$м^2$. Гантели считать материальными точками.

Дано:

$m_1 = 6$ кг

$R = 0{,}6$ м

$\omega_1 = 4$ рад/с^2

$I_0 = 5$ кг $\cdot$ м^2

$\omega_2 = ?$

Решение

- Закон сохранения момента импульса

$$L = I\omega = \mathrm{const}$$

$$(I_0 + 2m_1R^2)\cdot\omega_1 = I_0\cdot\omega_2$$

- момент инерции гантели $I_1 = m_1R^2$

$$\omega_2 = \omega_1\cdot\frac{I_0 + 2m_1R^2}{I_0} = \omega_1\left(1 + \frac{2m_1R}{I_0}\right) = 4\left(1 + \frac{2\cdot 6\cdot 0{,}36}{5}\right) =$$

$= 4\cdot 1{,}87 = 7{,}48$ рад/с.