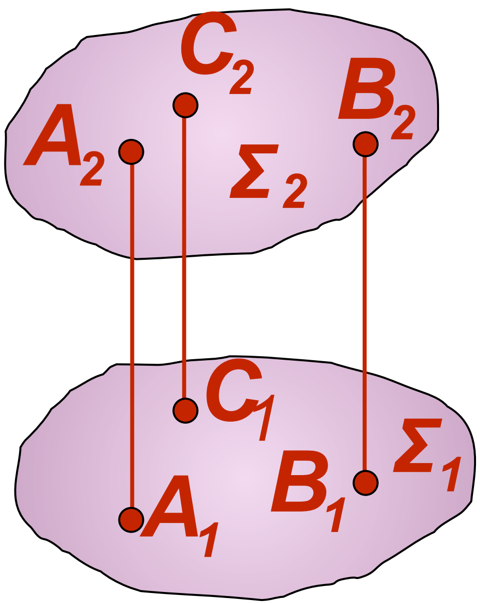
Проекции плоскости

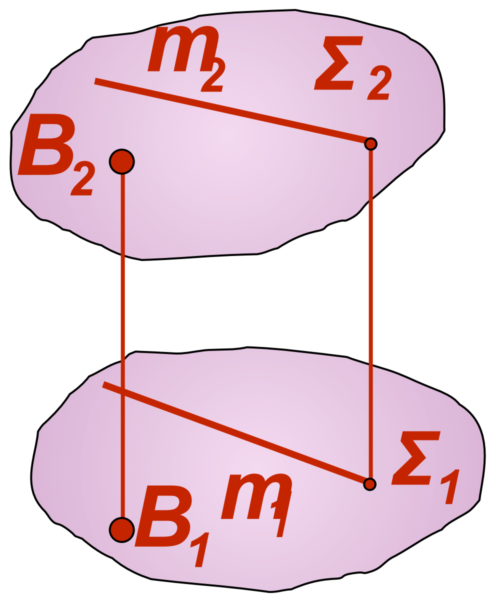
Способы задания плоскости

1



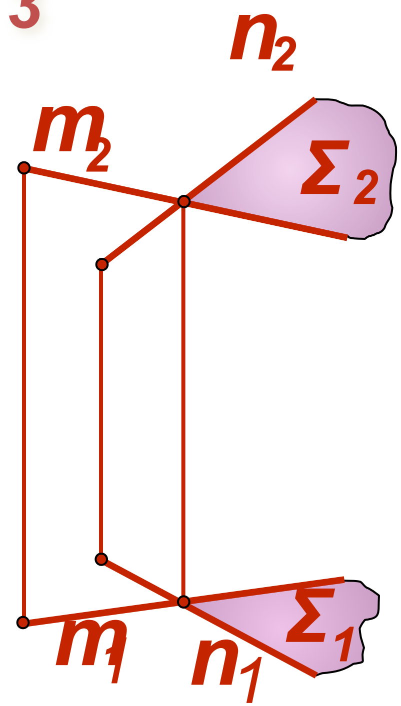
$\Sigma(A,B,C)$

2



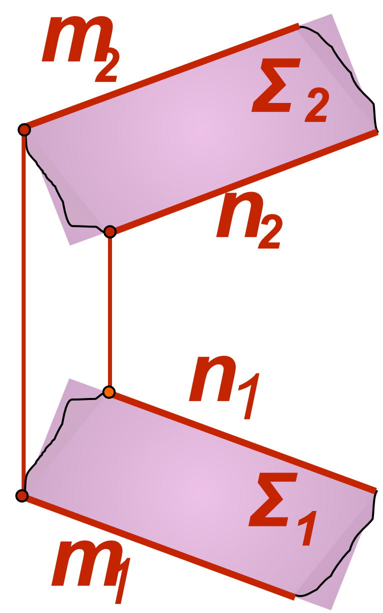
$\Sigma(B,m)$

3



$\Sigma(n \cap m)$

4

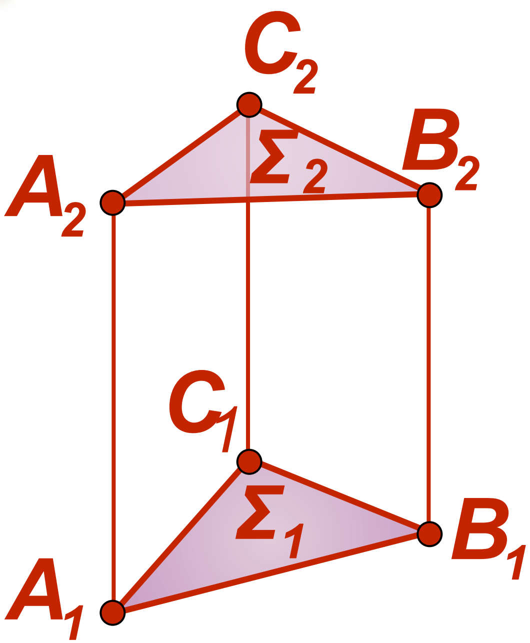


$\Sigma(n \parallel m)$

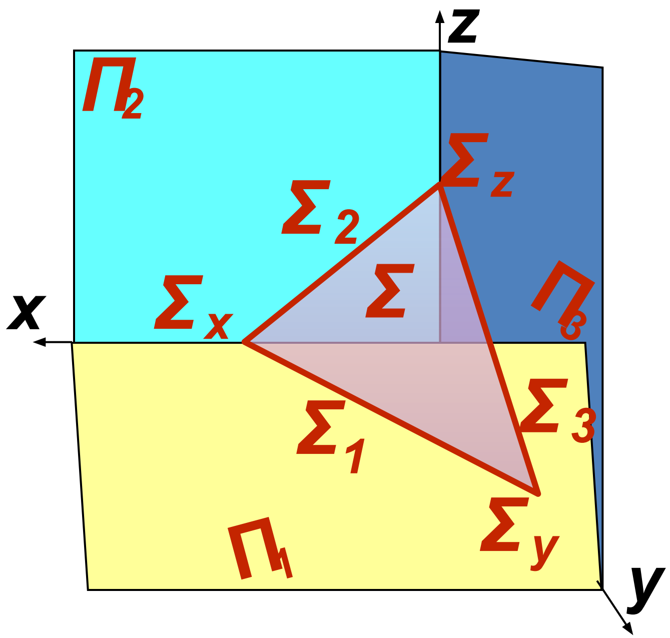
На комплексном чертеже плоскость Σ можно задать: 1) проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой; 2) проекциями прямой и точки, взятой вне этой прямой; 3) проекциями двух пересекающихся прямых; 4) проекциями двух параллельных прямых;

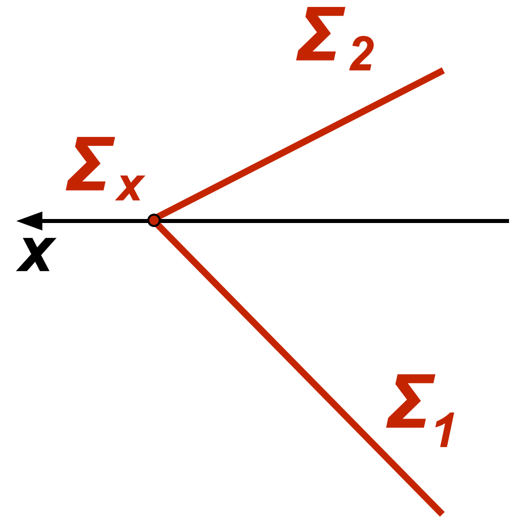
Способы задания плоскости

5



6 След плоскости – это линия ее пересечения с соответствующей плоскостью проекций





Σ (ΔABC)

Σ_1 - горизонтальный след
Σ_2 - фронтальный след
Σ_3 - профильный след
Σ_x, Σ_y, Σ_z - точки схода следов

$\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$

5) проекциями плоской фигурой; 6) следами плоскости. Все способы позволяют выделить из множества точек пространства точки, принадлежащие данной плоскости. Способ задания плоскости указывают в круглых скобках

Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Плоскость **общего положения наклонена** ко всем плоскостям проекций

Плоскость **частного положения перпендикулярна или параллельна одной** из плоскостей проекций

Плоскость, **перпендикулярная** одной из плоскостей проекций, называется **проецирующей плоскостью:**

Горизонтально проецирующая плоскость $\perp \Pi_1$

Фронтально проецирующая плоскость $\perp \Pi_2$

Профильно проецирующая плоскость $\perp \Pi_3$

Плоскость, параллельная плоскости проекций, называется **плоскостью уровня (дважды проецирующей):**

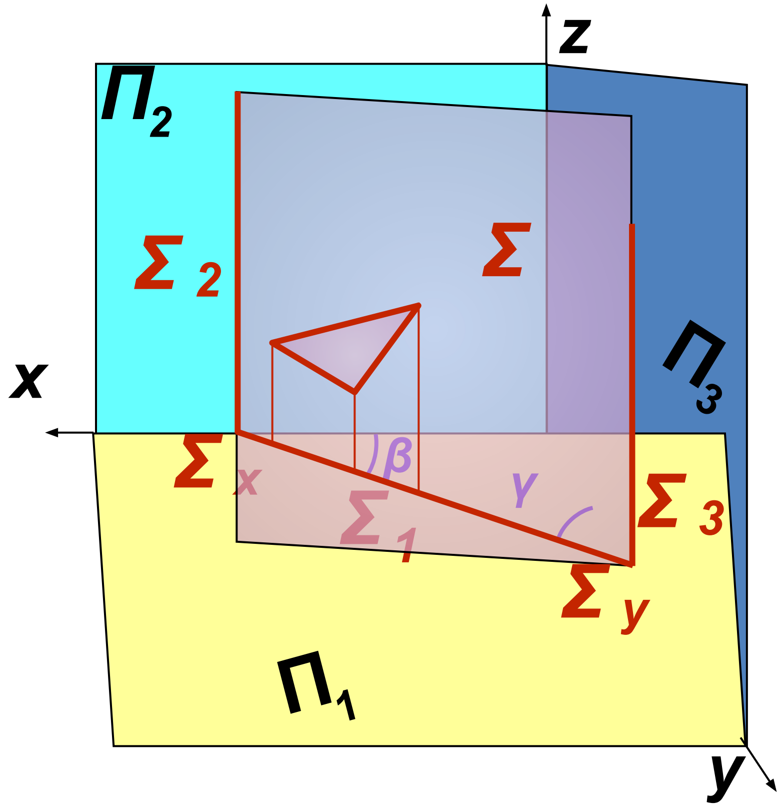
Горизонтальная плоскость $\parallel \Pi_1$

Фронтальная плоскость $\parallel \Pi_2$

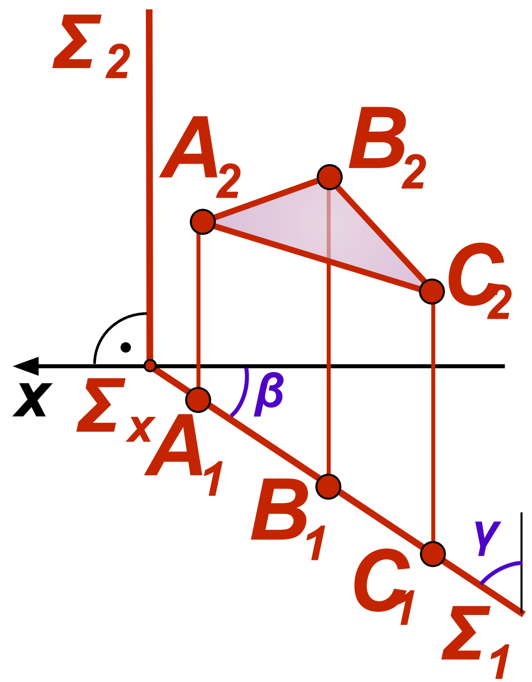
Профильная плоскость $\parallel \Pi_3$

Горизонтально проецирующая плоскость ($\perp \Pi_1$)

Пространственная картина



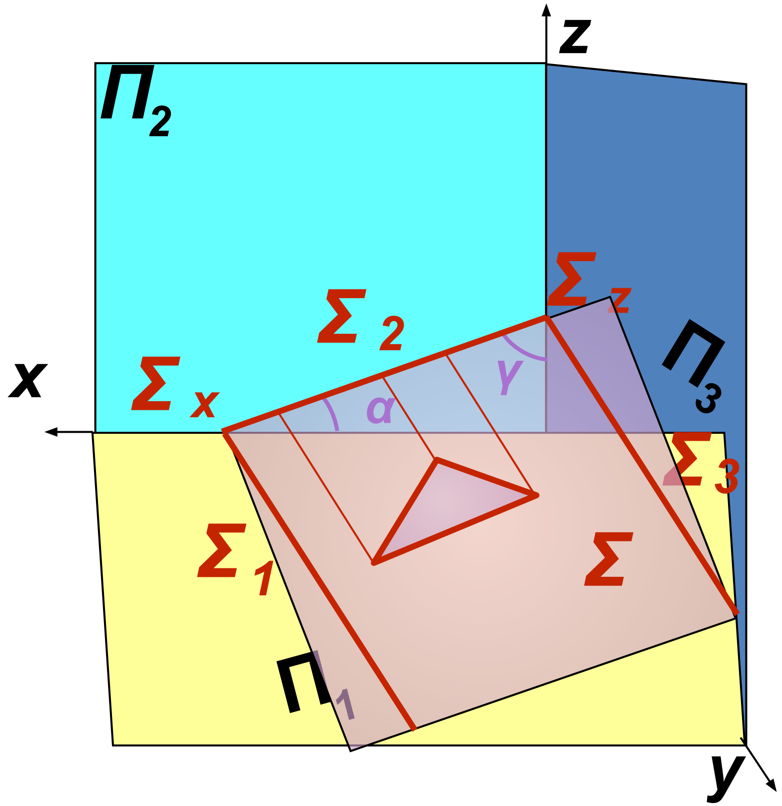
Комплексный чертеж



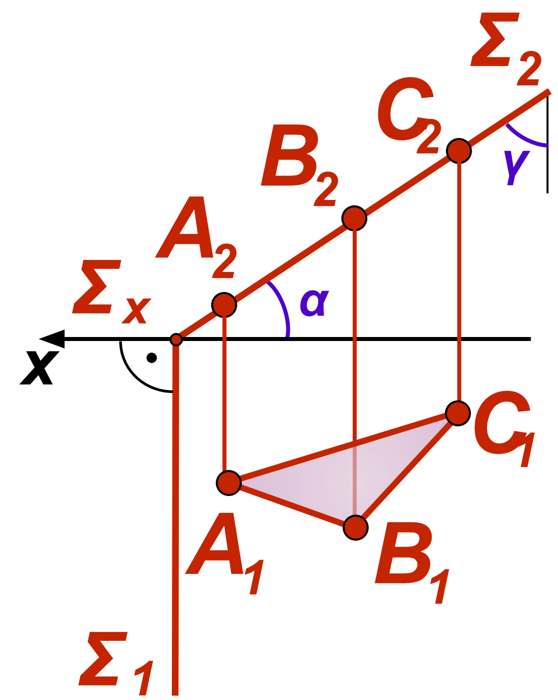
Горизонтальная проекция плоскости Σ вырождается в прямую (след), на Π_1 проекции трех произвольных точек плоскости лежат на горизонтальном следе плоскости Σ_1. Углы наклона данной плоскости Σ к фронтальной (β) и профильной (γ) плоскостям проекций на Π_1 не искажаются

Фронтально проецирующая плоскость ($\perp П_2$)

Пространственная картина



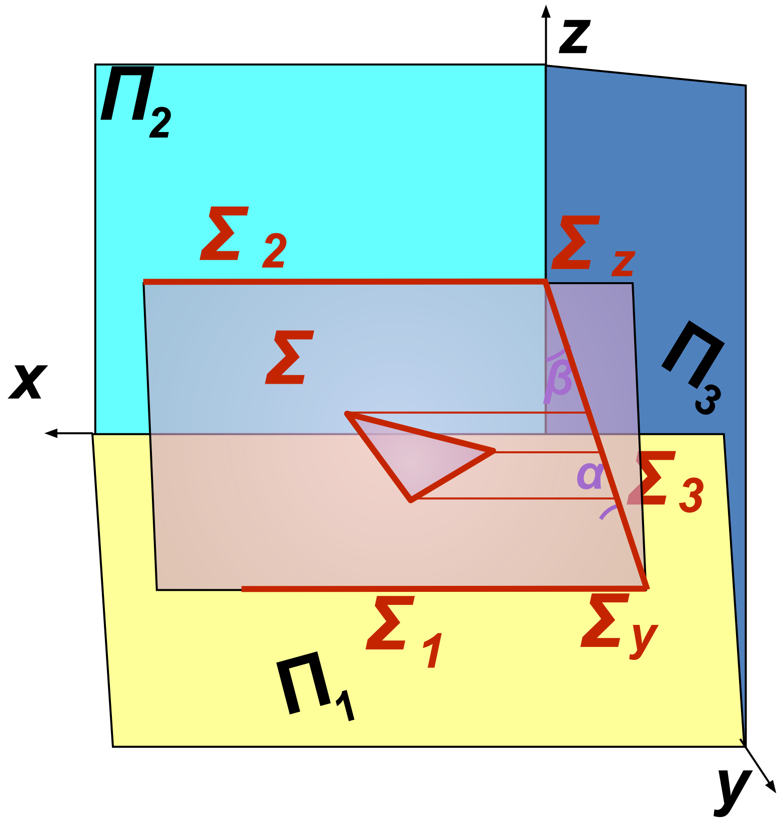
Комплексный чертеж



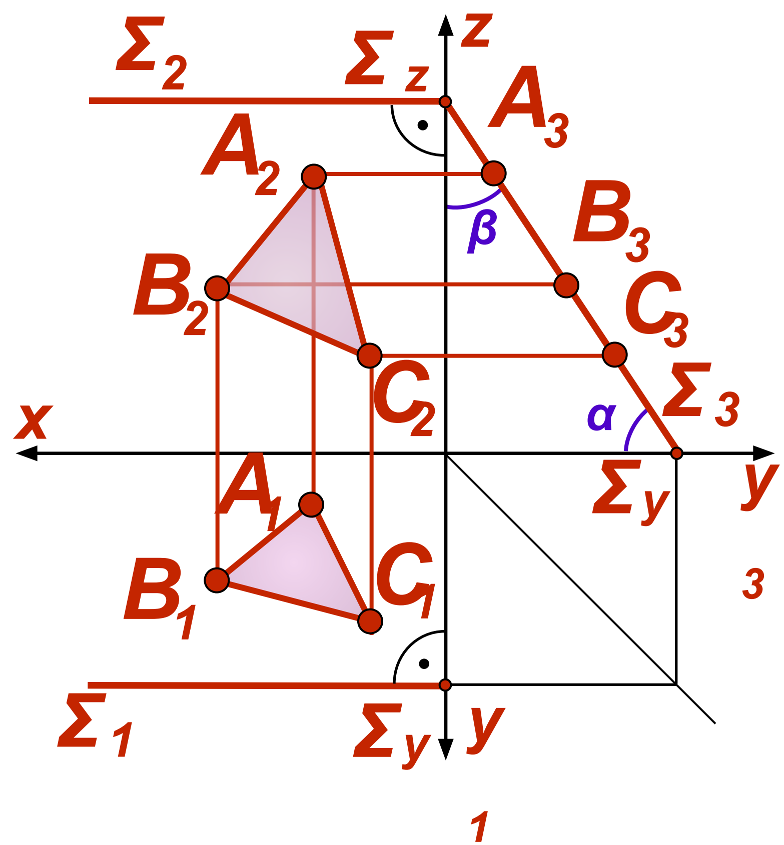
Фронтальная проекция плоскости $Σ$ вырождается в прямую (след). На $П_2$ проекции трех произвольных точек плоскости лежат на фронтальном следе плоскости $Σ_2$. Углы наклона данной плоскости $Σ$ к горизонталь-ной ($α$) и профильной ($γ$) плоскостям проекций на $П_2$ не искажаются

Профильно проецирующая плоскость ($\perp П_3$)

Пространственная картина



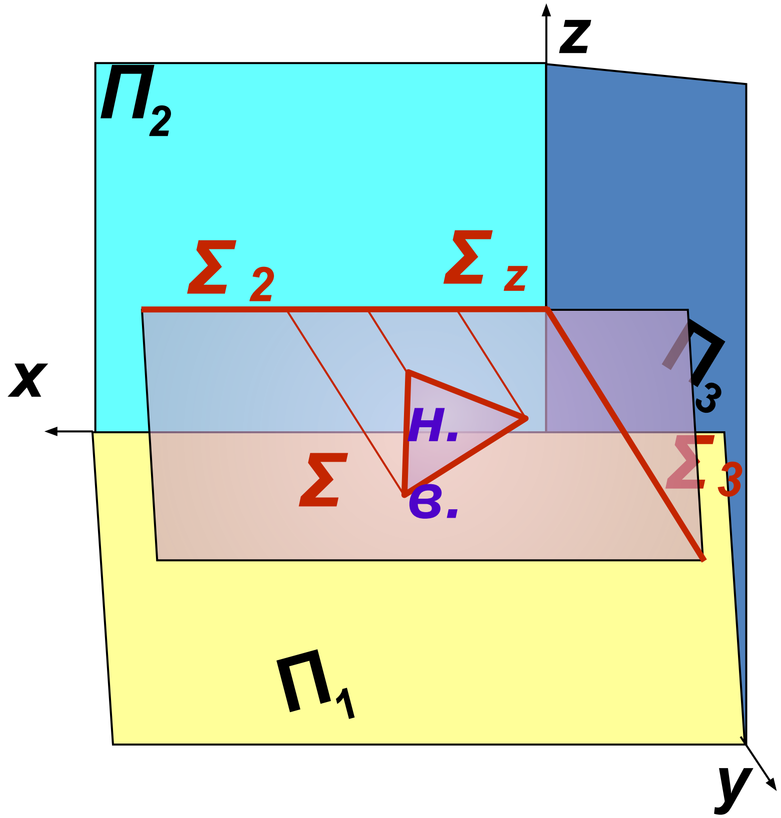
Комплексный чертеж



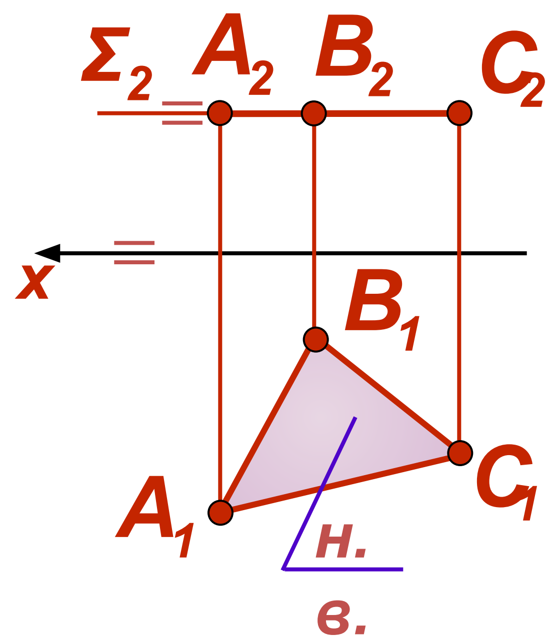
Профильная проекция плоскости Σ вырождается в прямую (след). На $П_3$ проекции трех произвольных точек плоскости лежат на профильном следе плоскости Σ_3. Углы наклона данной плоскости Σ к горизонталь-ной (α) и фронтальной (β) плоскостям проекций на $П_3$ не искажаются

Горизонтальная плоскость уровня (||П$_1$)

Пространственная картина



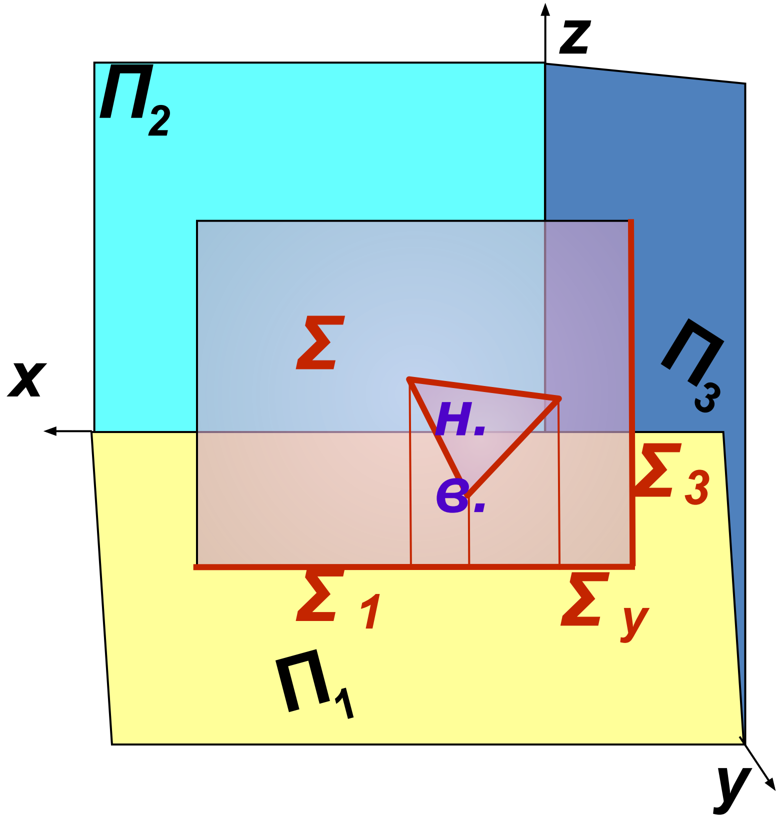
Комплексный чертеж



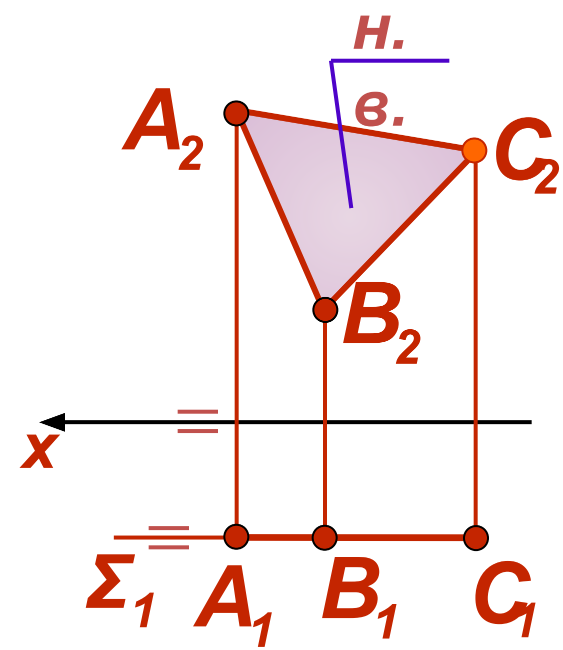
В силу параллельности следы (фронтальный Σ_2 и профильный Σ_3) плоскости Σ будут параллельны соответствующим осям координат. Фигура, задающая плоскость Σ, проецируется в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций

Фронтальная плоскость уровня (||П$_2$)

Пространственная картина



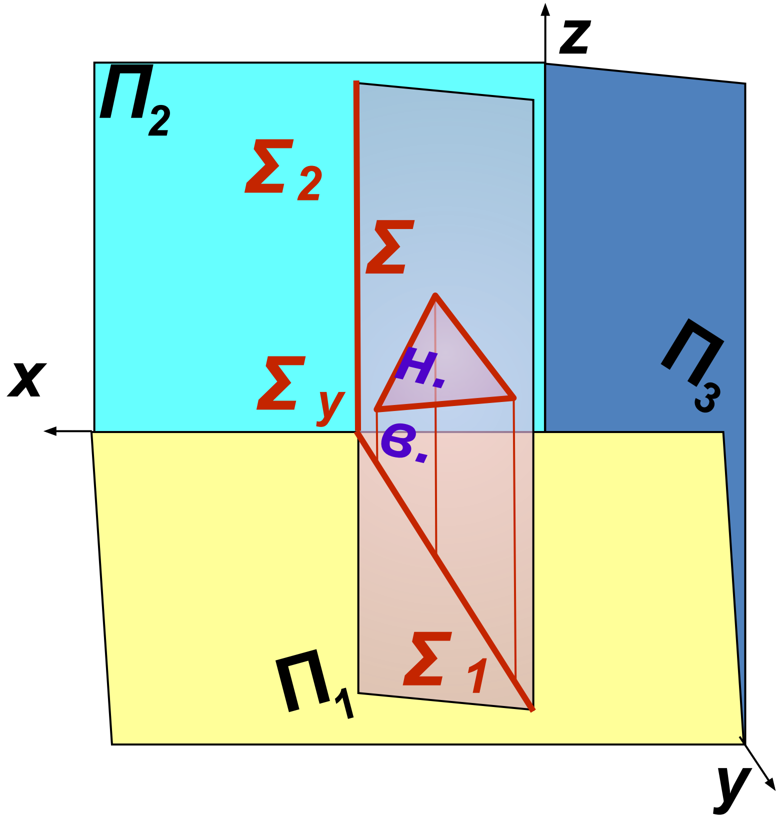
Комплексный чертеж



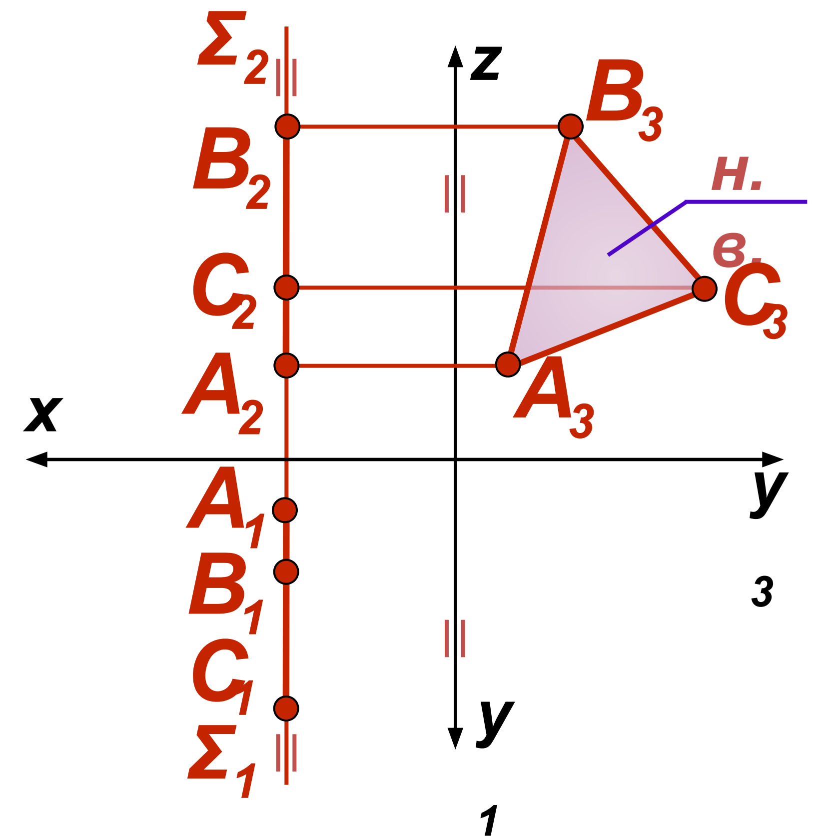
В силу параллельности следы (горизонтальный Σ_1 и профильный Σ_3) плоскости Σ будут параллельны соответствующим осям координат. Фигура, задающая плоскость Σ, изображается в натуральную величину на фронтальной плоскости проекций

Профильная плоскость уровня (||П$_3$)

Пространственная картина



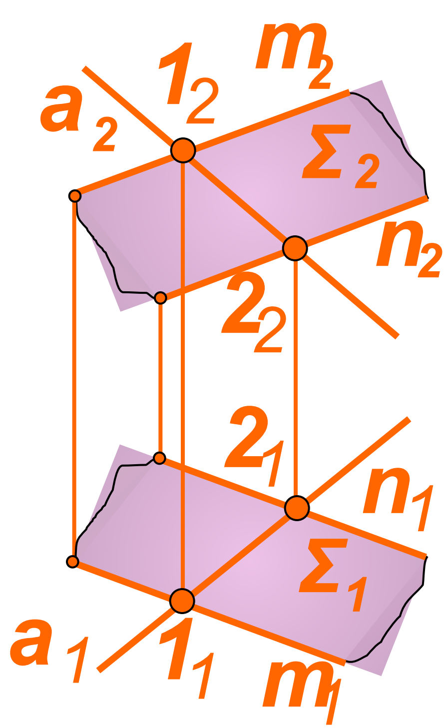
Комплексный чертеж



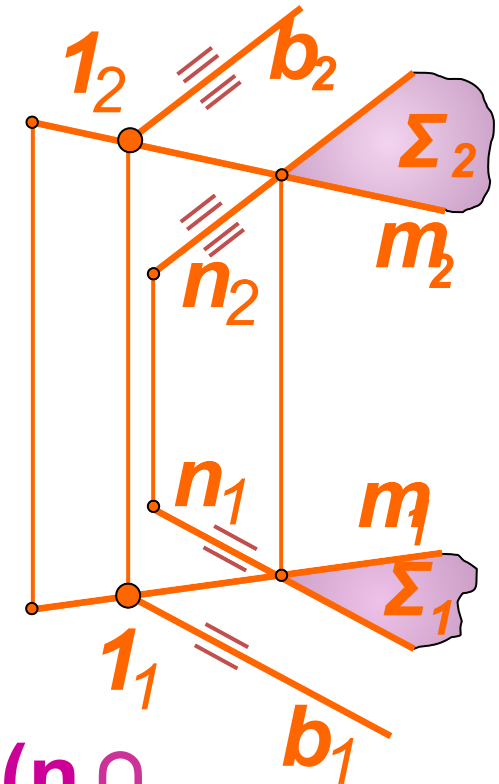
В силу параллельности следы (горизонтальный Σ_1 и фронтальный Σ_2) плоскости Σ будут параллельны соответствующим осям координат. Фигура, задающая плоскость Σ, проецируется в натуральную величину на профильную плоскость проекций

Принадлежность прямой плоскости

1



2



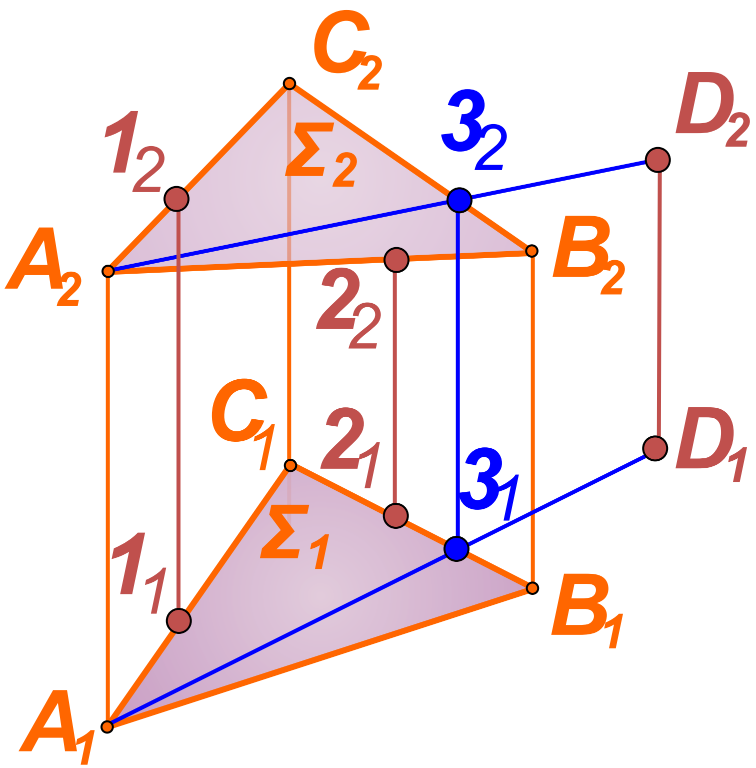
$\Sigma(n \parallel m)$; $(1 \in m) \in \Sigma$; $(2 \in n) \in \Sigma \Rightarrow a \in \Sigma$

$\Sigma(n \cap m)$; $(1 \in m) \in \Sigma$; $b \parallel n \Rightarrow b \in \Sigma$

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит:

1) через две точки этой плоскости;
2) через одну точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости

Принадлежность точки плоскости



Σ (ΔABC)

1 $1,2 \in \Sigma$ - ?

$(1 \in AC)$

$2 \notin \Sigma$

2 D_2 - ?, если $D \in \Sigma$

$П_1$: $(D_1$ И $A_1) \cap C_1B_1 = 3_1$

$П_2$: $3_2 \in C_2B_2$

A_2 И 3_2

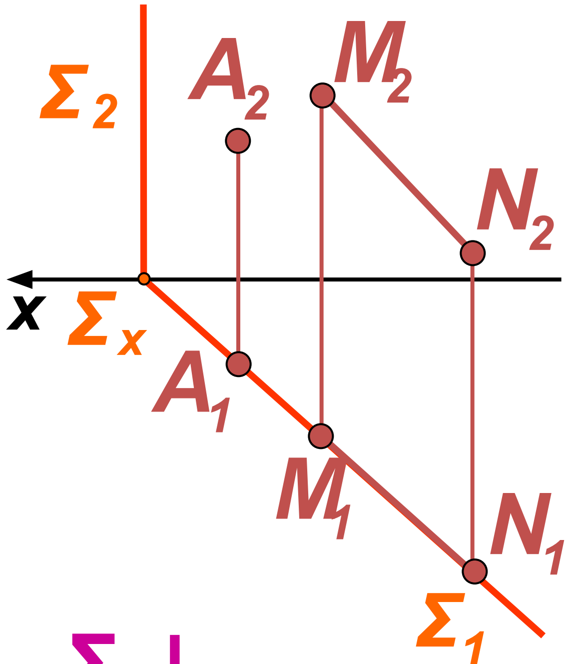
$D_2 \in A_23_2$

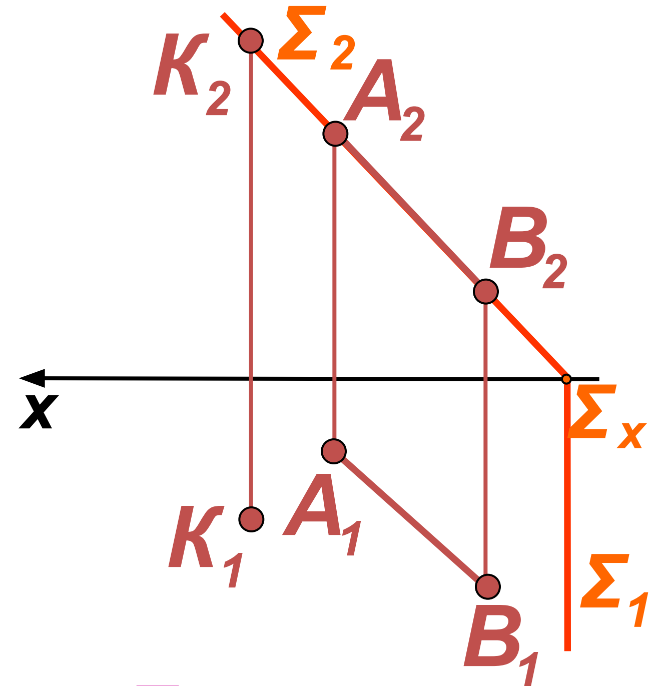
Точка будет лежать в плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой этой плоскости. Воспользуемся этим положением:

1) при чтении чертежа;

2) при построении точки, лежащей в данной плоскости

Принадлежность прямой и точки плоскости





$\Sigma \perp \Pi_1$

$A_1 \in \Sigma_1 \Rightarrow A \in \Sigma$

$N_1M_1 \in \Sigma_1 \Rightarrow MN \in \Sigma$

$\Sigma \perp \Pi_2$

$K_2 \in \Sigma_2 \Rightarrow K \in \Sigma$

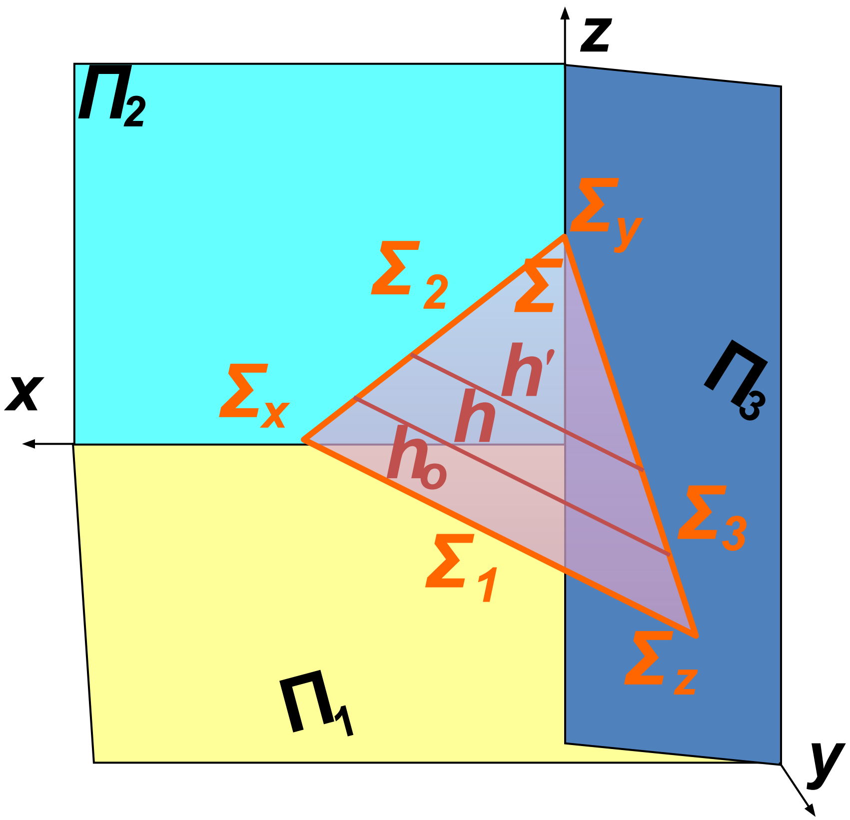
$A_2B_2 \in \Sigma_2 \Rightarrow AB \in \Sigma$

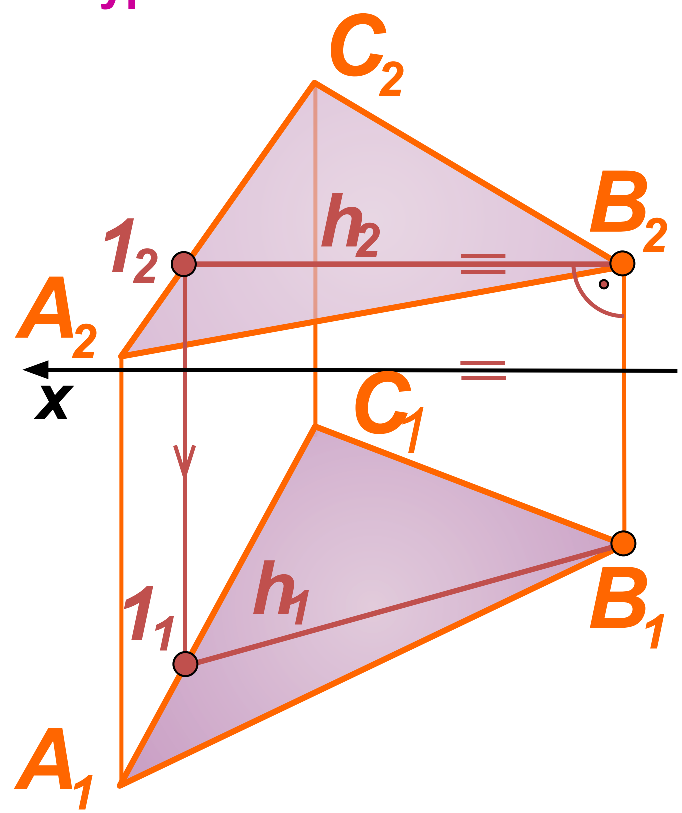
Если плоскость занимает проецирующее положение, то соответствующие проекции всех точек и прямых данной плоскости совпадают с ее следом.

Это собирательное свойство проецирующих плоскостей

Главные линии плоскости

Горизонталей плоскости бесчисленной множество,
все они параллельны между собой
Горизонтальный след – это горизонталь нулевого уровня

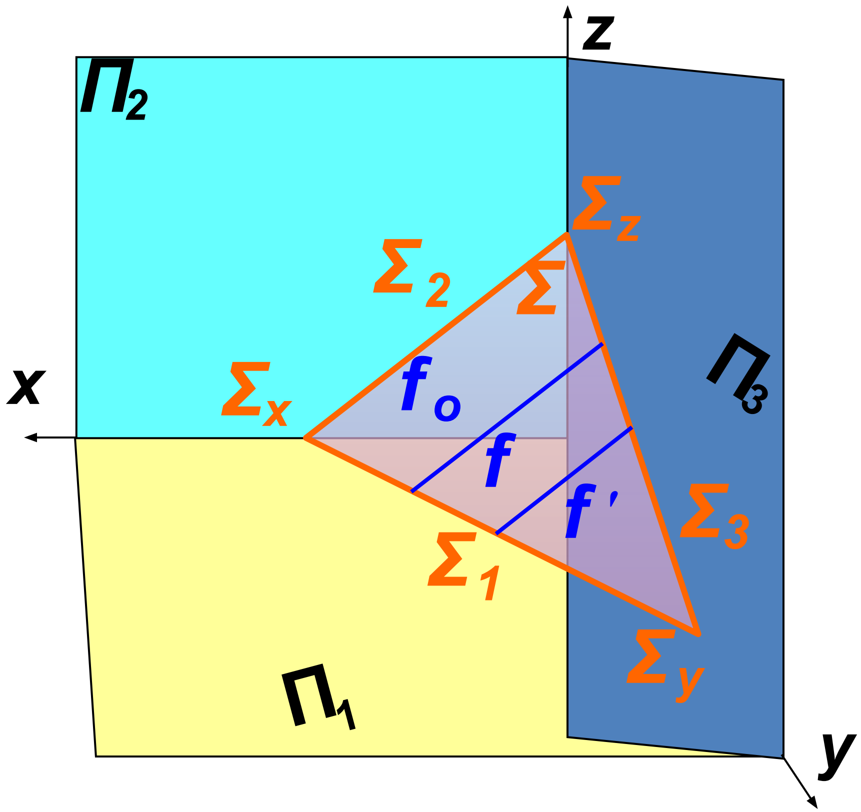


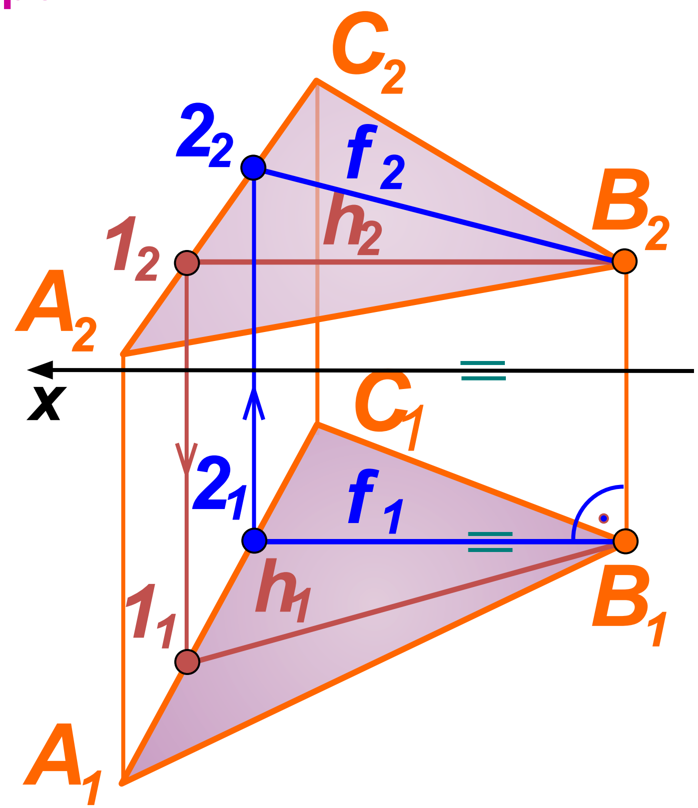


Горизонталь плоскости – это прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси *x*. Положение горизонтали в плоскости определяют две точки (например, *B* и *1*)

Главные линии плоскости

Фронталей плоскости бесчисленное множество,
все они параллельны между собой
Фронтальный след – это фронталь нулевого уровня

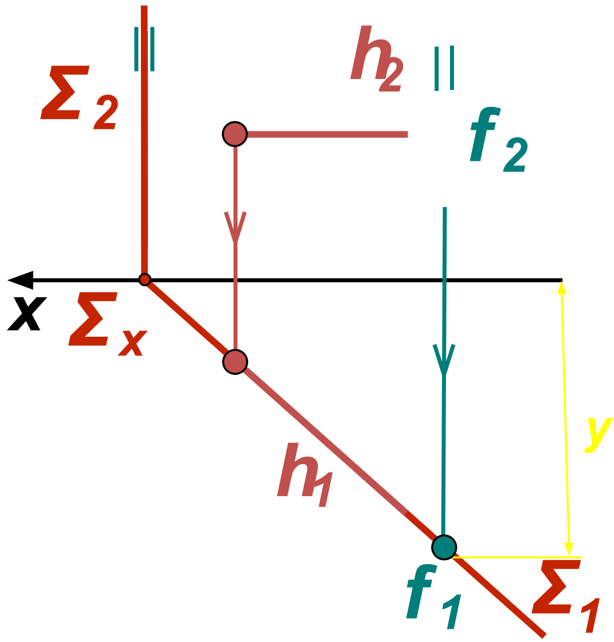




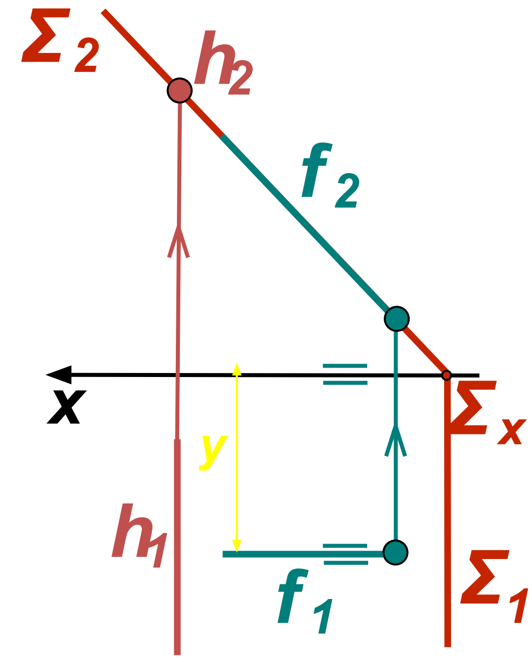
Фронталь плоскости – это прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.
Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси *x*. Положение фронтали в плоскости определяют две точки (например, *B* и *2*)

Главные линии плоскости

В проецирующих плоскостях одна из линий уровня является проецирующей прямой



$\Sigma \perp \Pi$

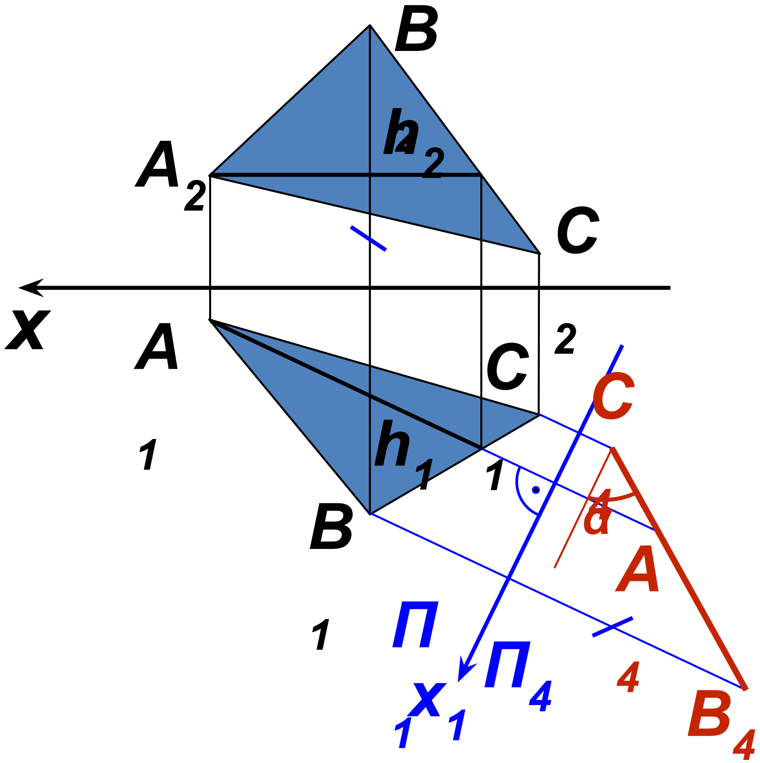


$\Sigma \perp \Pi_2$

Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси *x*. Фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу плоскости или ему принадлежит. Координата *y* показывает расстояние от фронтали данной плоскости до фронтальной плоскости проекций

Метрические задачи

Задача 1. **Определить натуральную величину треугольника Σ (ΔABC) и угол наклона его к плоскости Π_1 способом перемены плоскостей проекций**



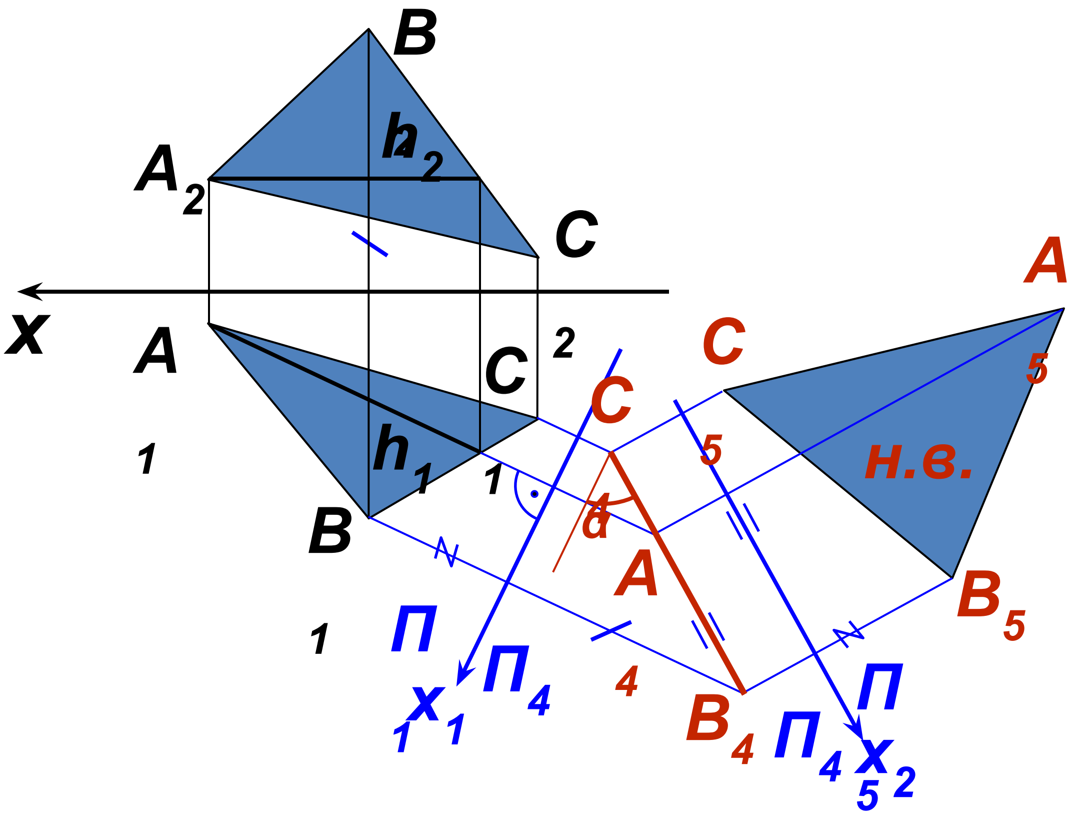
1. $\Pi_4 \perp \Pi_1$

$\Pi_4 \perp h \in \Sigma$ (ΔABC)

При первом преобразовании выбираем новую плоскость проекций Π_4 перпендикулярно горизонтали плоскости h так, чтобы она заняла проецирующее положение. На Π_4 получаем вырожденную проекцию плоскости (прямую) и ее угол наклона α к плоскости проекций Π_1.

Метрические задачи

Задача 1. Определить натуральную величину треугольника Σ (ΔABC) и угол наклона его к плоскости Π_1 способом перемены плоскостей проекций



1. $\Pi_4 \perp \Pi_1$

$\Pi_4 \perp h \in \Sigma$ (ΔABC)

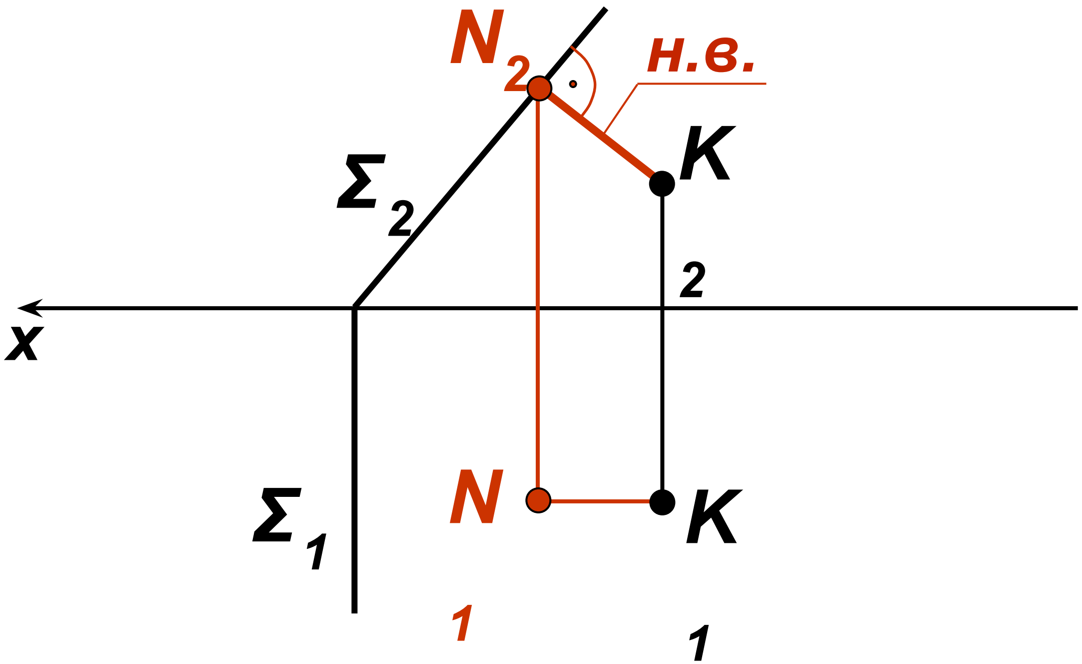
2. $\Pi_5 \perp \Pi_4$

$\Pi_5 \parallel \Sigma(\Delta ABC)$

При втором преобразовании выбираем новую плоскость проекций Π_5 так, чтобы плоскость заняла положение плоскости уровня. На Π_5 строим натуральную величину треугольника

Метрические задачи

Задача 2. **Определить расстояние от точки *K* до плоскости частного положения $\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$**

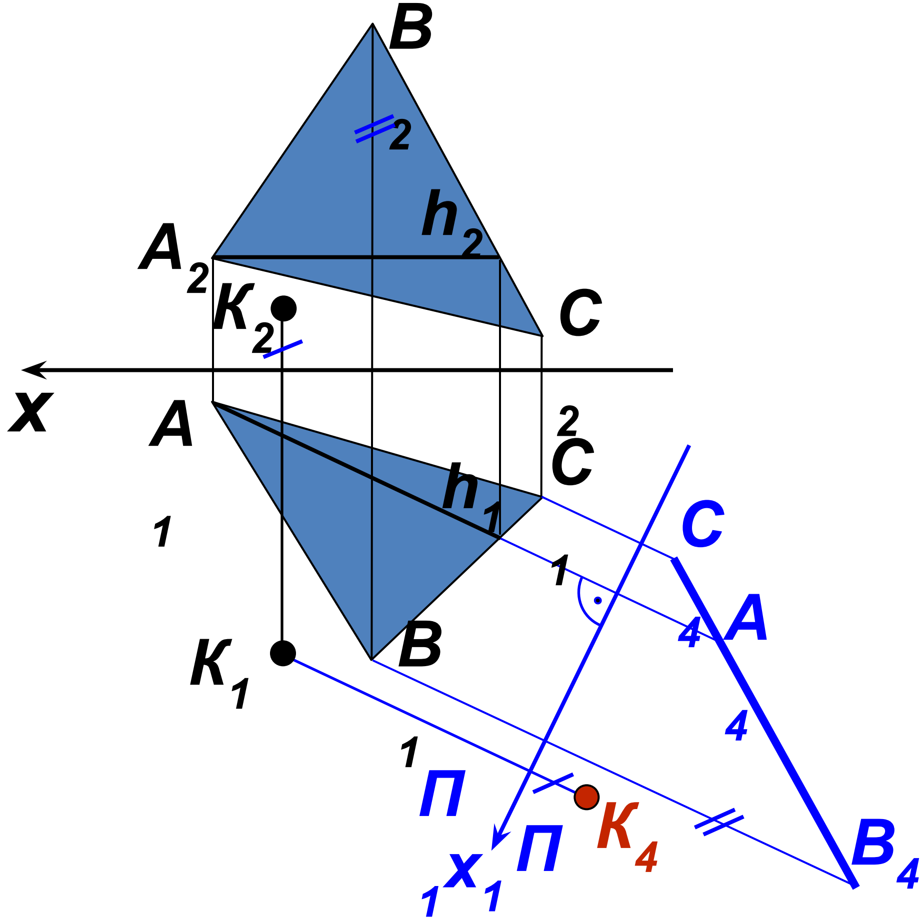


KN - искомое расстояние

Проекции искомого расстояния будут перпендикулярны следам данной плоскости. В силу этого N_2K_2 есть натуральная величина расстояния. Перпендикуляр *NK* проходит под плоскостью Σ, поэтому его горизонтальная проекция невидима

Метрические задачи

Задача 3. **Определить расстояние от точки *К* до плоскости треугольника *Σ(ΔАВС)***

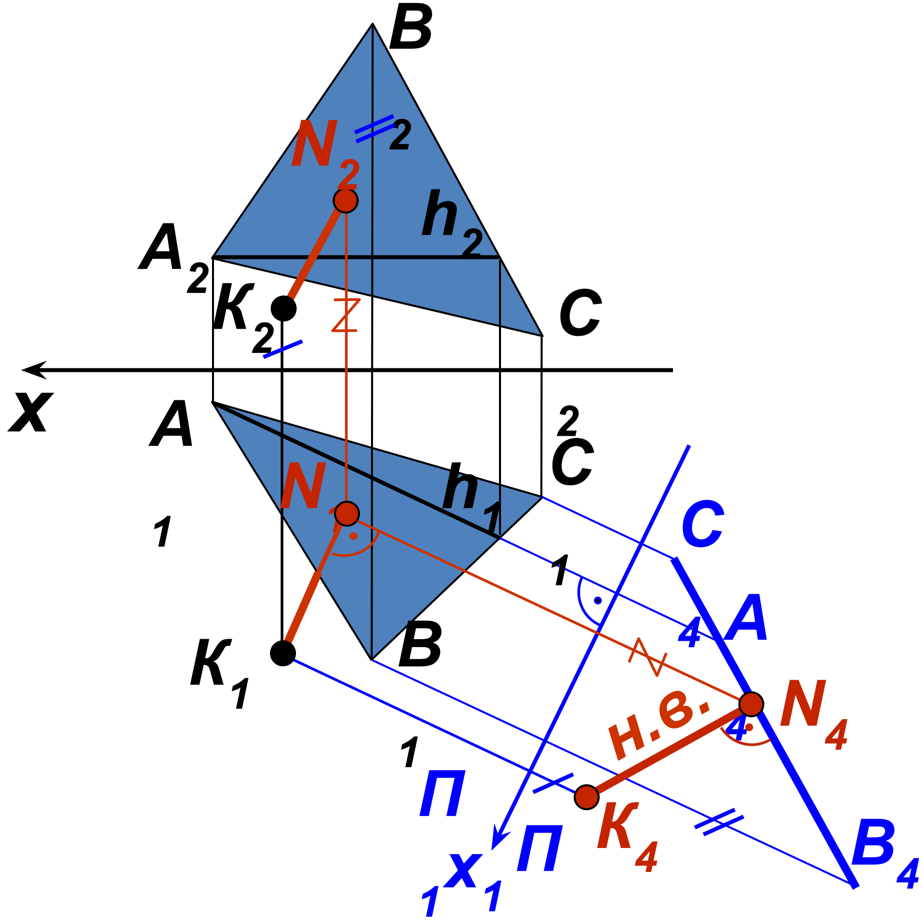


1. $П_4 \perp П_1$
$П_4 \perp h \in Σ$
(ΔАВС)

Выбираем новую плоскость проекций $П_4$ перпендикулярно горизонтали плоскости h так, чтобы она заняла проецирующее положение. На $П_4$ получаем вырожденную проекцию плоскости (прямую) и проекцию точки $К_4$.

Метрические задачи

Задача 3. **Определить расстояние от точки *К* до плоскости треугольника *Σ(ΔАВС)***



1. $П_4 \perp П_1$

$П_4 \perp h \in Σ$ (ΔАВС)

2. KN - искомый отрезок

Построение перпендикуляра начинают с плоскости проекций *$П_4$* (см. зад.12), затем строят его проекции на плоскостях *$П_1$* и *$П_2$*. На плоскости проекций *$П_4$* изобразится натуральная величина расстояния от точки К до плоскости треугольника. Определяют видимость перпендикуляра.

Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей. Позиционные задачи

Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

Прямая и плоскость:

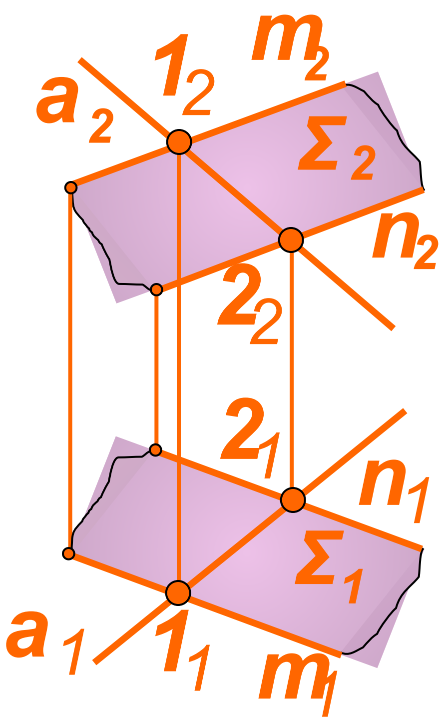
- **Прямая принадлежит плоскости (см. тема 3):** ***все точки прямой являются точками плоскости***
- **Прямая параллельна плоскости:** ***общих точек нет***
- **Прямая пересекает плоскость:** ***одна общая точка***

Две плоскости:

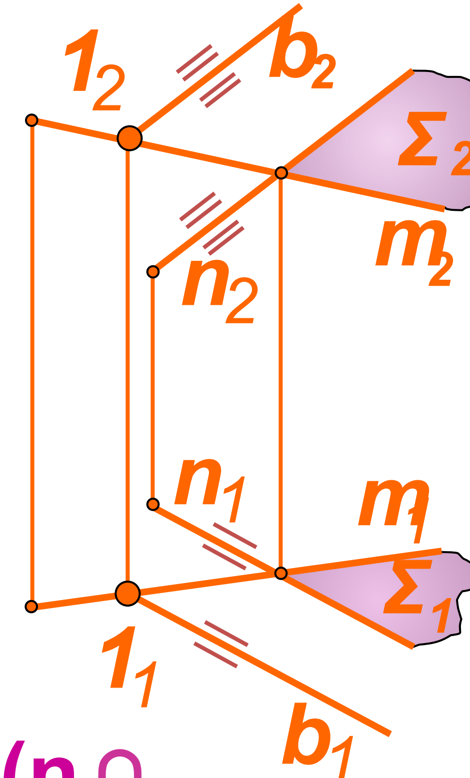
- **Плоскости параллельны:** ***общих прямых нет***
- **Плоскости пересекаются:** ***одна общая прямая***

Принадлежность прямой плоскости

1



2



$\Sigma(n \parallel m)$

$(1 \in m) \in \Sigma;$

$(2 \in n) \in \Sigma$; $a = (1, 2) \Rightarrow$

$a \in \Sigma$

$\Sigma(n \cap m)$

$(1 \in m) \in \Sigma;$

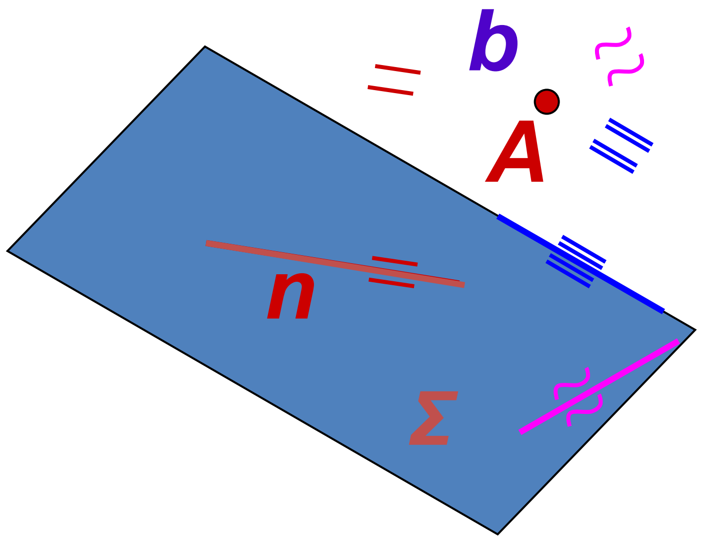
$b \parallel n$; $1 \in b \Rightarrow$

$b \in \Sigma$

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит

1) через две точки этой плоскости;
2) через одну точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой этой плоскости

Параллельность прямой и плоскости



Признак параллельности:

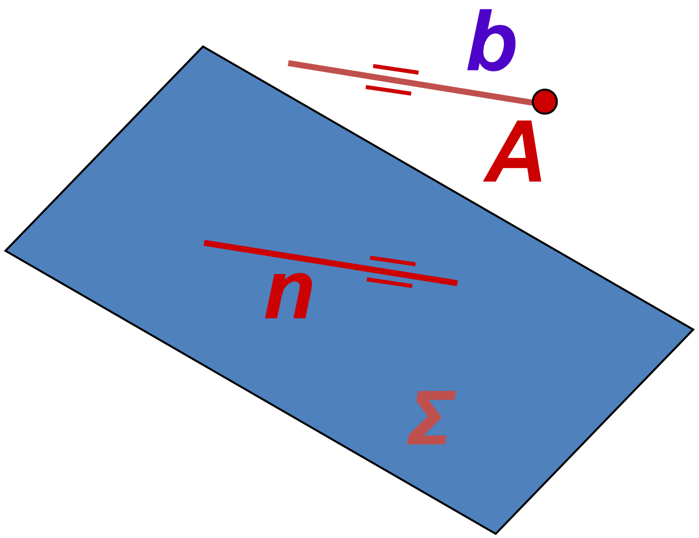
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

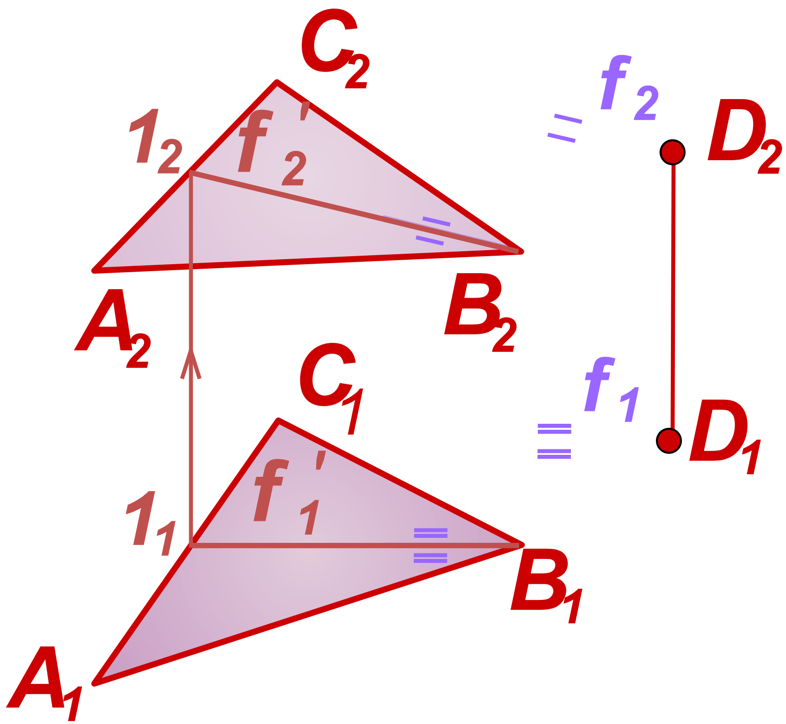
$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$

Через точку *A* в пространстве можно провести бесчисленное множество прямых линий, параллельных данной плоскости *Σ* . Для однозначного решения проведем в плоскости прямую *n*

Параллельность прямой и плоскости

Задача: **Через точку D провести фронталь, параллельную плоскости Σ(ΔABC)**

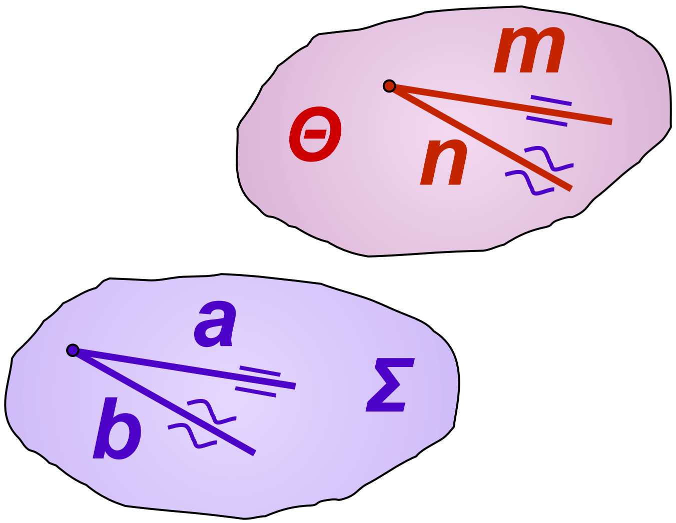


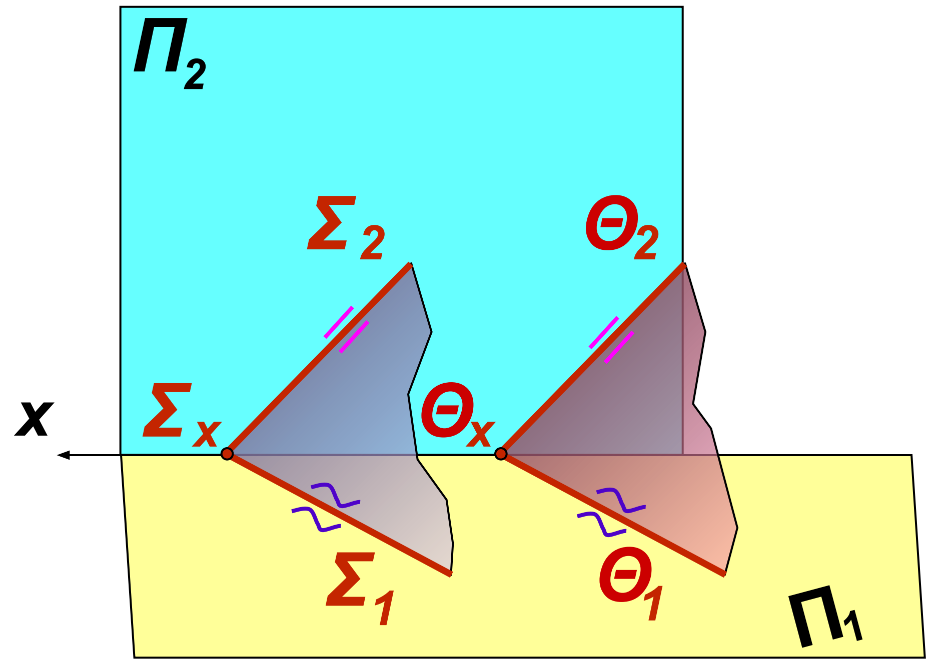


$b \| n \in \Sigma \Rightarrow b \| \Sigma$

Построим в плоскости *Σ* (Δ*ABC*) вспомогательную фронталь *f '*. Через точку *D* проводим фронталь *f* , проекции которой параллельны одноименным проекциям фронтали *f '*. Получаем искомую прямую *f* , параллельную заданной плоскости *Σ* (Δ*ABC*)

Параллельность двух плоскостей





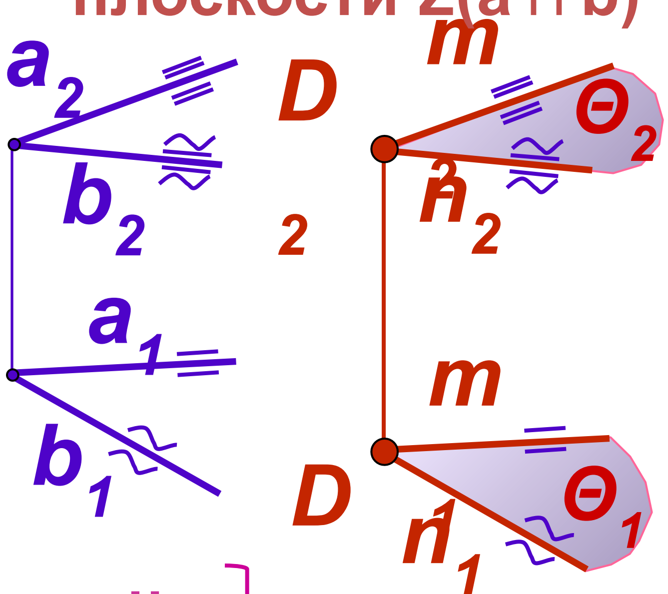
$a \parallel m$, $b \parallel n$ $\Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$

$\Sigma_1 \parallel \Theta_1$, $\Sigma_2 \parallel \Theta_2$ $\Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$

Признак параллельности: плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. В качестве прямых могут быть использованы следы плоскостей

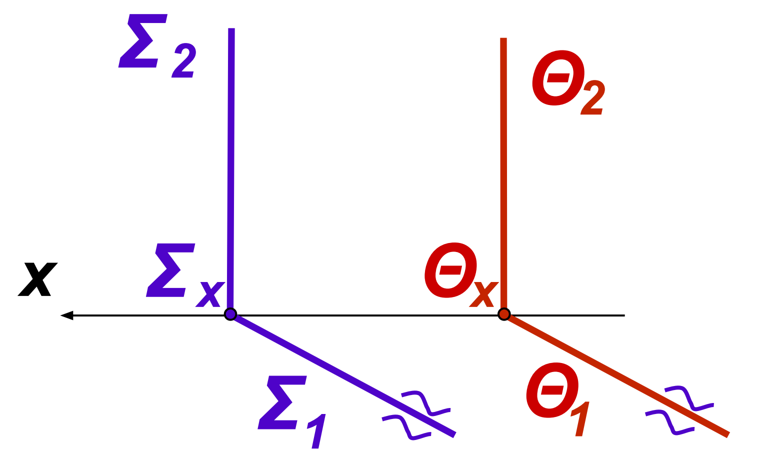
Параллельность двух плоскостей

Задача 1: Через точку D провести плоскость Θ, параллельную плоскости Σ(a ∩ b)



$$\left.\begin{array}{l} m \parallel a \\ n \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$$

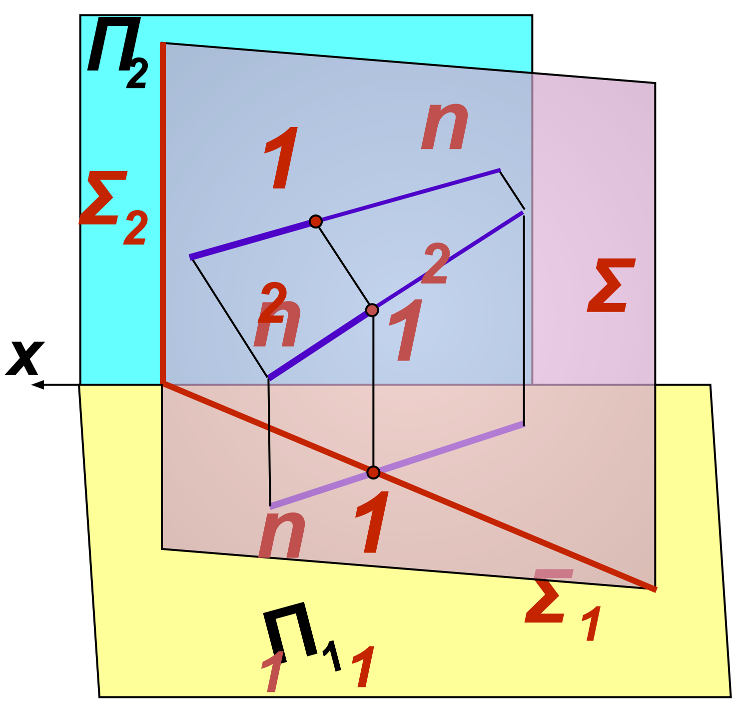
Задача 2: Построить плоскость $\Theta \parallel \Sigma \perp \Pi_1$

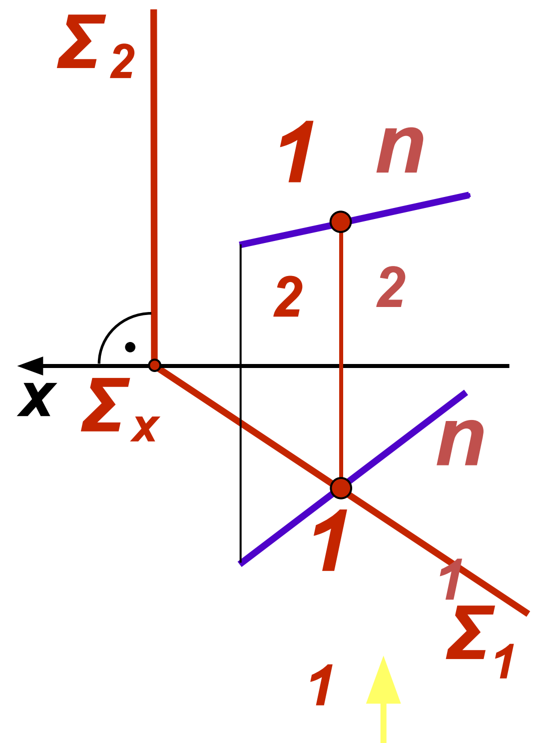


$$\Theta_1 \parallel \Sigma_1 \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$$

1. Искомая плоскость *Θ* задается двумя пересекающимися прямыми *m* и *n*, проекции которых соответственно параллельны проекциям прямых *a* и *b* заданной плоскости.
2. У параллельных плоскостей *Θ* и *Σ* следы параллельны

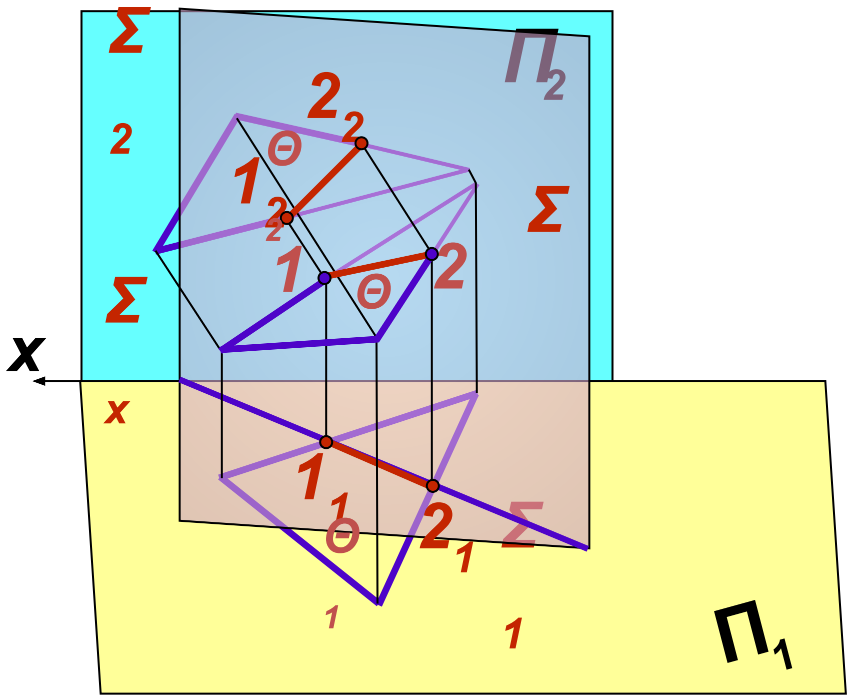
Пересечение прямой с проецирующей плоскостью





Одна из проекций точки 1 (пересечения прямой *n* с проецирующей плоскостью *Σ*) находится на пересечении следа плоскости Σ_1 с проек-цией прямой n_1. Видимость прямой определяется по направлению взгляда наблюдателя, плоскость считается непрозрачной

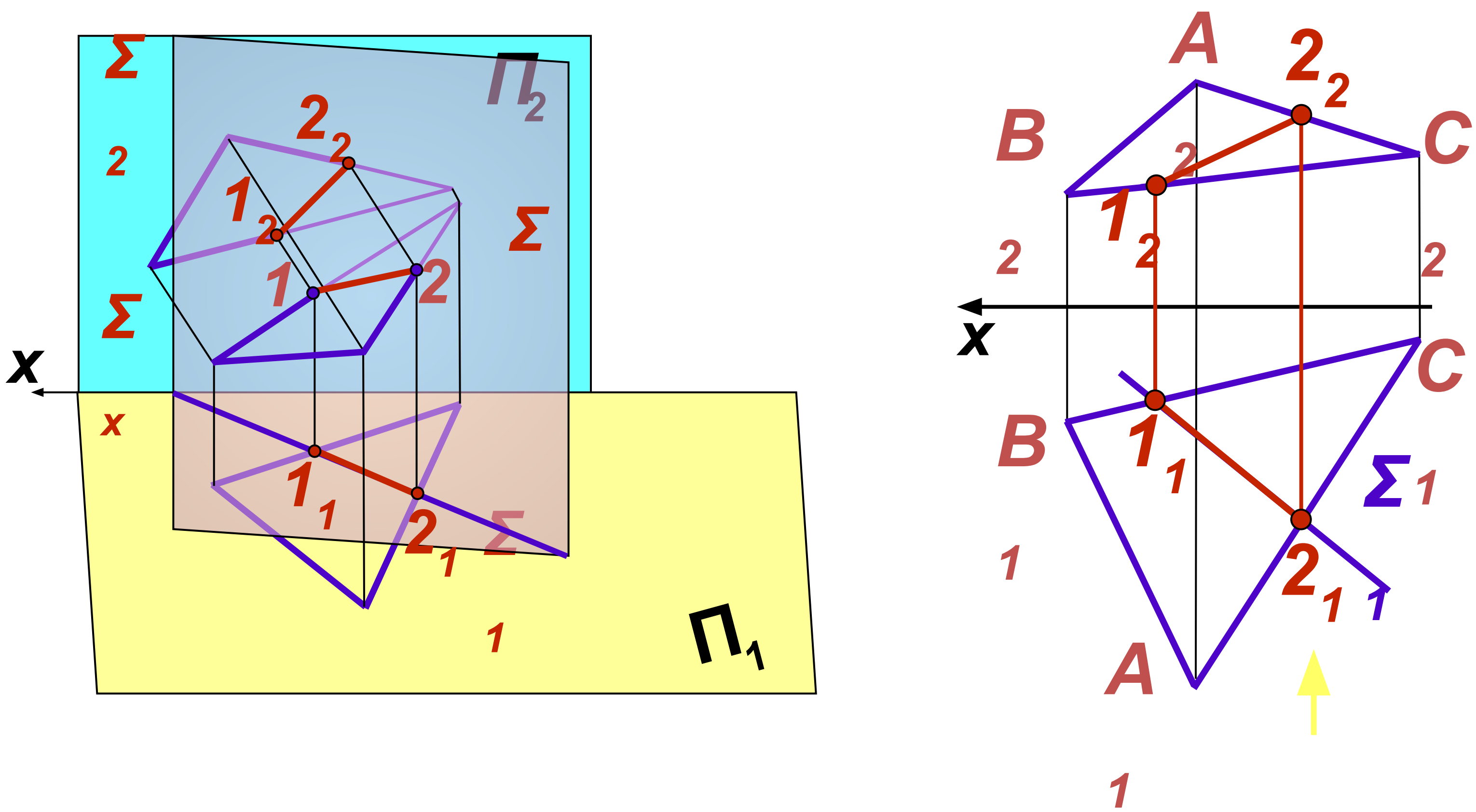
Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



Σ – горизонтально проецирующая плоскость;
Θ(Δ) – плоскость общего положения

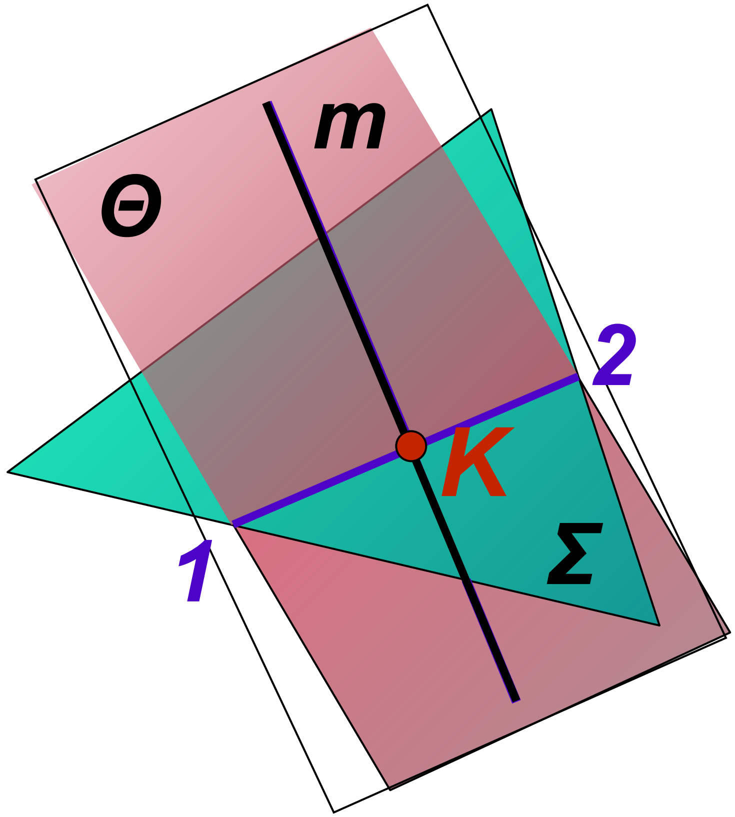
Две плоскости пересекаются по прямой линии. Необходимо найти две точки искомой линии пересечения, которые принадлежат одновременно двум плоскостям

Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



Горизонтально проецирующая плоскость *Σ* проецируется на *$П_1$* в виде следа, которому принадлежит проекция $1_1 2_1$ искомой линии пересечения. Часть треугольника, находящаяся перед плоскостью *Σ*, будет видима на *$П_2$*. Линия $1_2 2_2$ служит границей видимости

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

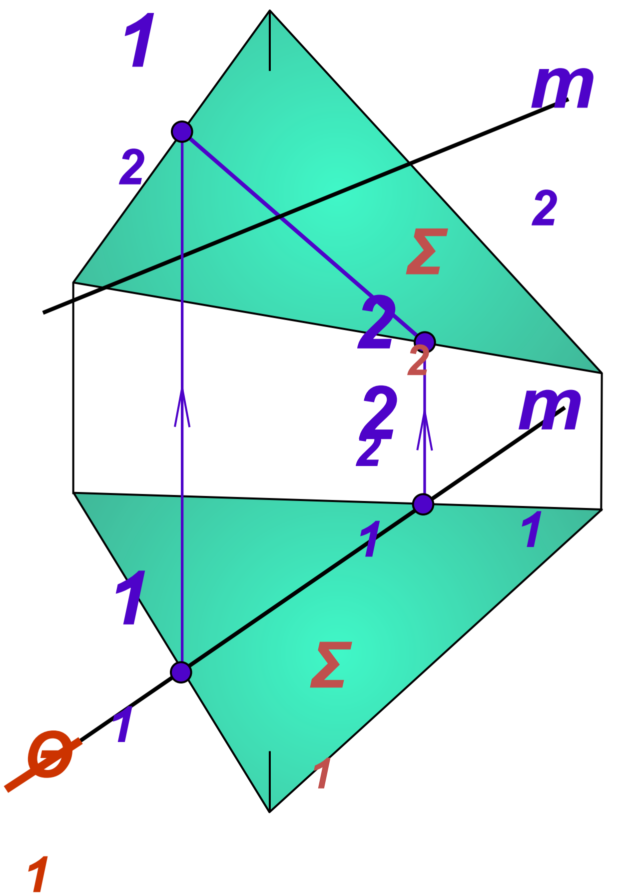


Алгоритм:

1. $m \in \Theta$
2. $\Theta \cap \Sigma$ = 1-2
3. 1-2 $\cap$ m = K
4. Видимость m

1. Через данную прямую *m* проводят вспомогательную плоскость *Θ* .
2. Находят линию пересечения 1-2 плоскостей: заданной *Σ* и вспомогательной *Θ* . 3. На полученной линии пресечения 1-2 находят общую точку *К* с заданной прямой *m* . 4. Определяют видимость прямой *m*

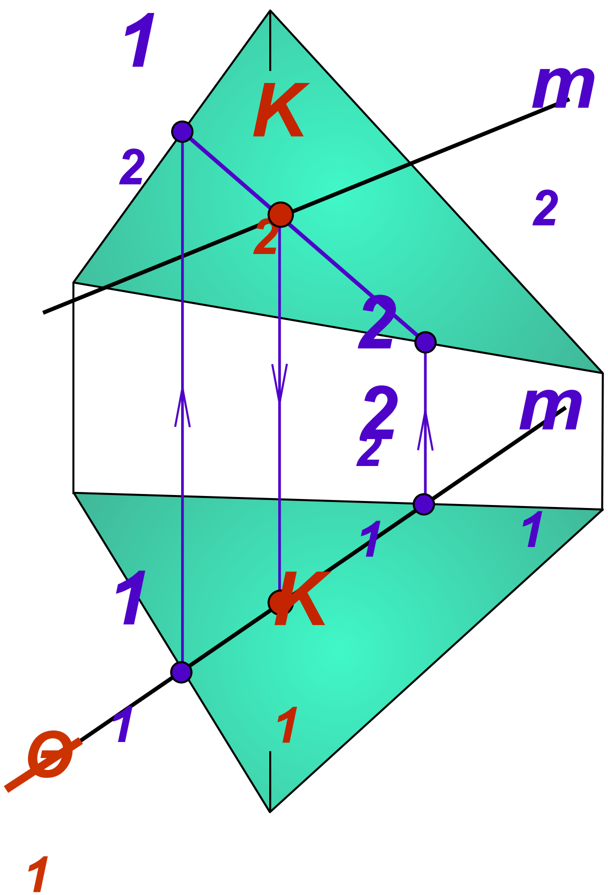
Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
   $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1\text{-}2$;
   $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$

В качестве вспомогательной выбираем горизонтально проецирующую плоскость *Θ* (*Θ₁*), проходящую через заданную прямую *m* . Строим горизонтальную $1_1 2_1$, а затем фронтальную $1_2 2_2$ проекции линии пересечения вспомогательной плоскости *Θ* с данным треугольником *Σ*

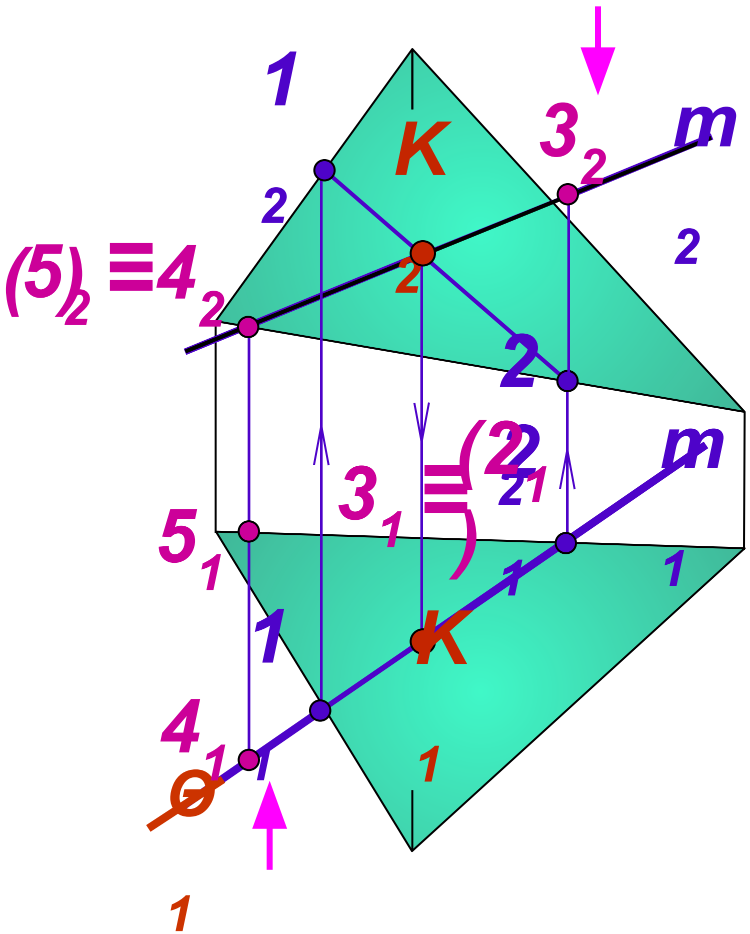
1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
   $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta)=1\text{-}2$;
   $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3. $1\text{-}2 \cap m = K$; $K_2 \rightarrow K_1$

Находим фронтальную проекцию *K_2* точки пересечения *К* линии 1-2 и данной прямой *m* . Горизонтальная проекция *K_1* искомой точки пересечения будет принадлежать горизонтальной проекции *m_1* прямой *m*

1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;

   $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$

2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1\text{-}2$;

   $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$

3. $1\text{-}2 \cap m = K$; $K_2 \rightarrow K_1$

4. Видимость m

   (по конкурирующим точкам)

Видимость горизонтальной проекции прямой определяют по горизонтально конкурирующим точками 3 и 2 ($3 \in m$; $2 \in \Sigma$). Видимость фронтальной проекции прямой определяют по фронтально конкурирующим точками 4 и 5 ($4 \in m$; $5 \in \Sigma$). Видимость прямой *m* меняется в точке