



Интегральное исчисление

Приложения
определённого
интеграла

Студент должен знать

- понятия неопределённого и определённого интегралов;
- свойства интегралов;
- таблицу неопределённых интегралов;
- методы интегрирования;
- формулу Ньютона-Лейбница.

Заполните таблицу

$F(x)$	$f(x)=F'(x)$
$F(x) = x^3 + 11$	$f(x) = 3x^2$
$F(x) = x^2 + 0,2$	$f(x) = 2x$
$F(x) = x^4 + \frac{\pi}{2}$	$f(x) = 4x^3$

Первообразная (определение)

$$y = F(x), \quad y = f(x), \quad D(F) = D(f) = X,$$

- $F(x)$ – первообразная для $f(x)$,
если для всех $x \in X$:

$$F'(x) = f(x).$$

Определить первообразную
функции $f(x) = 3x^2$

$$F(x) = x^3$$

Т.К.

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x).$$

Определить первообразную
функции $f(x) = 3x^2$

1. $F(x) = x^3 + 1$, т.к.

$$F'(x) = (x^3 + 1)' = 3x^2 + 0 = f(x).$$

2. $F(x) = x^3 - 7$, т.к.

$$F'(x) = (x^3 - 7)' = 3x^2 - 0 = f(x).$$

Теорема 1

- Функция $f(x)$, имеет бесконечное множество первообразных вида $F(x) + C$.

Неопределённый интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.



Свойства неопределённого интеграла

Теорема 2

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

- Дифференциал интеграла функции равен подынтегральному выражению.

Теорема 3

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

- Производная интеграла равна подынтегральной функции.

Теорема 4

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

- Интеграл производной функции равен сумме этой функции с произвольной константой.

Теорема 5

$$\int (f(x) + g(x)) dx =$$

$$= \int f(x) dx + \int g(x) dx$$



- Интеграл суммы равен сумме интегралов

Теорема 6

$$\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

- Постоянный множитель выносится за знак интеграла





Основные формулы интегрирования

Интеграл дифференциала аргумента

$$\int dx = x + C$$

Интеграл степенной функции

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$n \neq -1$$



Интеграл обратной пропорциональности

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$x \neq 0$$



Интеграл

экспоненциальной функции

$$\int e^x dx = e^x + C$$



Интеграл

показательной функции

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$



Интеграл

функции косинуса

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Интеграл функции синуса

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование
2. Метод подстановки (замены переменной)
3. Метод интегрирования по частям

Непосредственное интегрирование

■ Найти:

$$\int (2x^3 + 3x^2 - 2x + 8) dx$$

$$\int (2x^3 + 3x^2 - 2x + 8) dx =$$

$$= \int 2x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 8 dx =$$

$$= 2 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 8 \int dx =$$

$$= 2 \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} \right) + 3 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right) - 2 \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + 8x + C =$$

$$= \frac{x^4}{2} + x^3 - x^2 + 8x + C.$$

Метод подстановки (замены переменной)

- Найти:

$$\int (x^3 + 3)^4 x^2 dx$$

Введение подстановки

$$t = x^3 + 3$$

$$dt = d(x^3 + 3) = (x^3 + 3)' dx = 3x^2 dx$$

$$dt = 3x^2 dx$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} dt$$




$$\begin{aligned}\int (x^3 + 3)^4 x^2 dx &= \int t^4 \cdot \frac{1}{3} dt = \\ &= \frac{1}{3} \int t^4 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{t^5}{15} + C = \frac{(x^3 + 3)^5}{15} + C.\end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Найти: $\int x \ln x dx$

Чтобы воспользоваться формулой $\int u dv = uv - \int v du$

необходимо выбрать функцию u и дифференциал dv

Пусть $u = x$ и $dv = \ln x$.

Тогда: $du = dx$ и $v = \int dv = \int \ln x dx$

Такой выбор неудачен: невозможно интегрирование.

Выберем функцию u и дифференциал dv иначе:

Пусть $u = \ln x$ и $dv = x dx$.

$$\text{Тогда: } du = \frac{dx}{x} \quad \text{и} \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Образец оформления

$$\int x \ln x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2 dx}{2x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x dx}{2} =$$


$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

Определённый интеграл

- *Определённый интеграл* функции $y=f(x)$ есть *число*, значение которого зависит от вида этой функции и пределов интегрирования a и b :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

- $f(x)$ – подынтегральная функция,
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение,
- a – нижний предел интегрирования
- b – верхний предел интегрирования

Формула

Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$



Свойства определённого интеграла

Теорема 7 (аддитивность)

$$a < c < b$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Теорема 8

$$\begin{aligned} & \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \\ & = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Теорема 9

$$\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Теорема 10

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Вычисление определённых интегралов

Вычислить:

$$\int_1^3 x^3 dx.$$

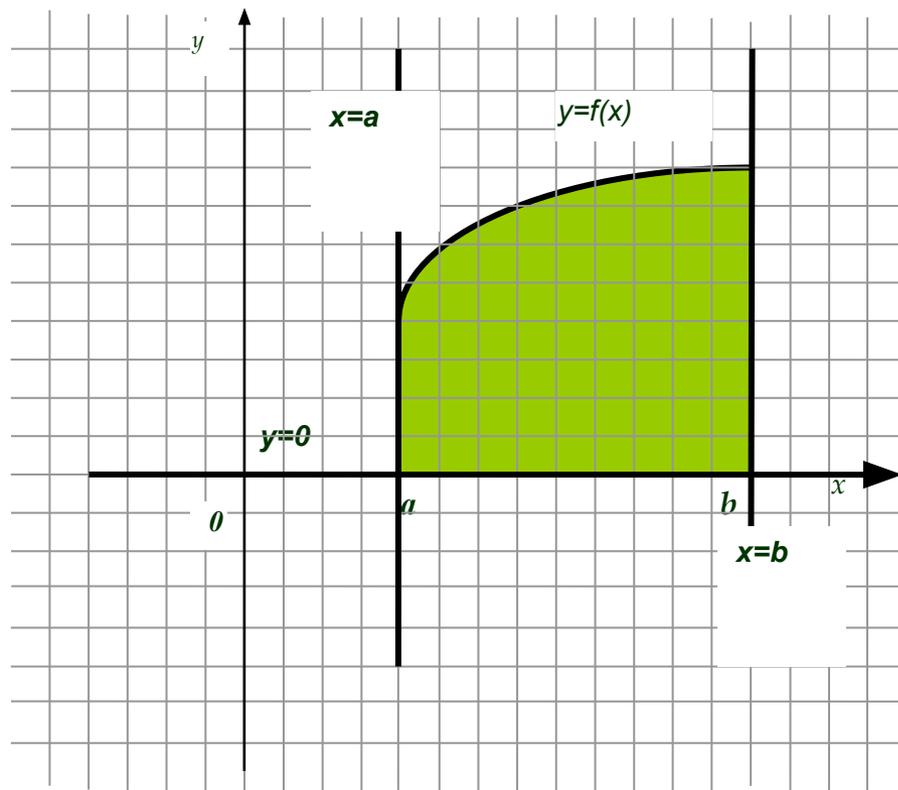
Вычисление определённых интегралов

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} \right) - \left(\frac{1^4}{4} \right) =$$
$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

Криволинейная трапеция

плоская фигура, ограниченная линиями:

- $y = f(x)$,
- $y = 0$ — ось абсцисс,
- $x = a$,
- $x = b$.



Площадь криволинейной трапеции

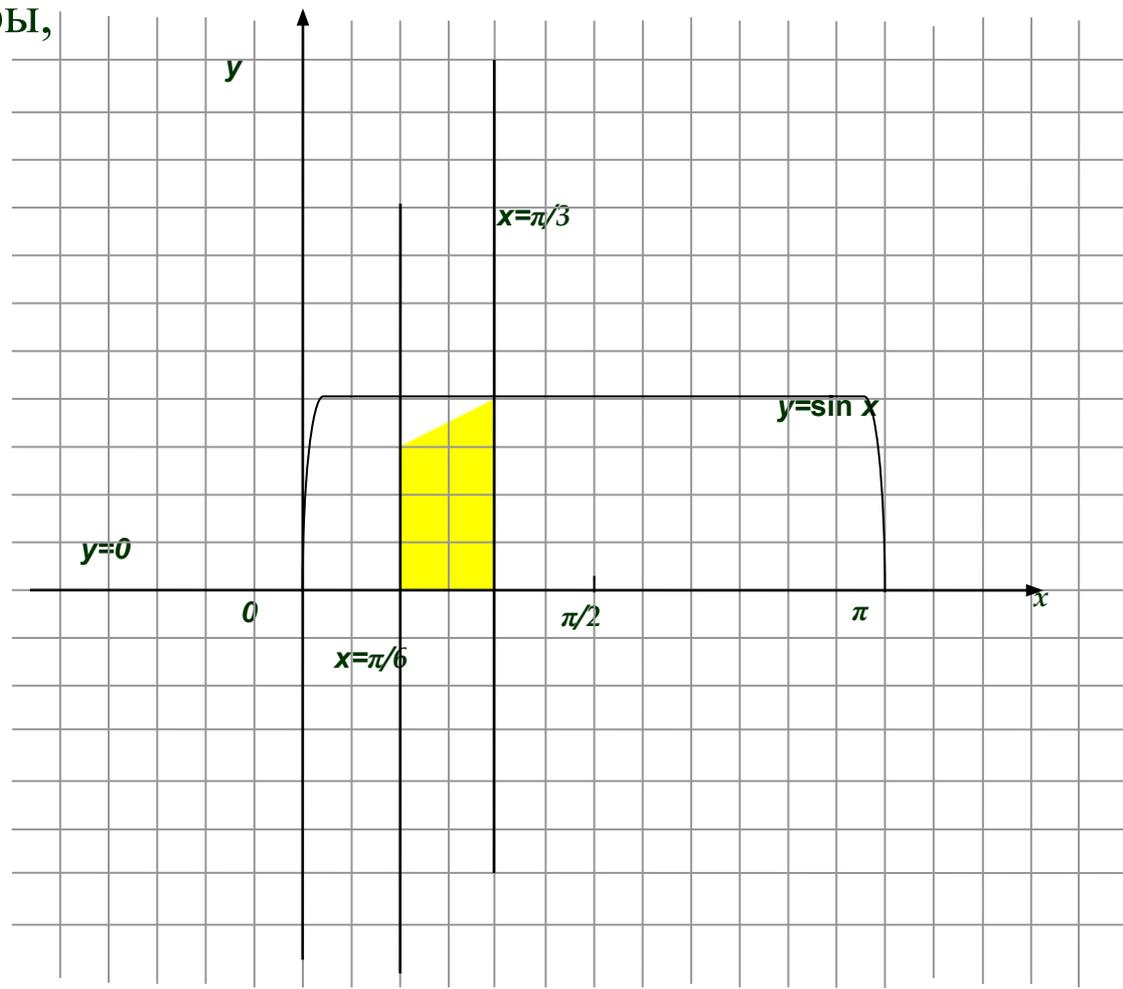
$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Вычисление площадей плоских фигур

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sin x, \quad y = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{3}.$$



$$\begin{aligned} S &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ (кв.ед.).} \end{aligned}$$



Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение* —

- это уравнение, связывающее
 - независимую переменную x ,
 - её функцию y ,
 - производные различных порядков этой функции: y' , y'' , y''' ...

*«Дифференциальное уравнение» будем кратко обозначать аббревиатурой «ДУ»

Решить ДУ –

это значит, найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному ДУ:

- Такое множество функций имеет вид:
- $y = f(x; C)$, где C – произвольная постоянная,
 - Это – общее решение ДУ.

Обыкновенное ДУ* –

- это ДУ, которое имеет только одну независимую переменную (например, x или t).
- **ДУ в частных производных**** – это ДУ, которое имеет две и более независимых переменных.

*«Обыкновенное дифференциальное уравнение» будем кратко обозначать аббревиатурой «ОДУ».

**Такие ДУ в рамках нашей программы не рассматриваются.

Порядок* ОДУ –

- это порядок старшей производной:

$$y' + 1 = 0 \quad \text{– ОДУ первого порядка;}$$

$$y'' + y = x \cdot \sin x \quad \text{– ОДУ второго порядка;}$$

$$y^{(V)} + y^{(III)} = a \cdot y, \quad a \in R \quad \text{– ОДУ пятого порядка.}$$

*В рамках нашей программы будут рассматриваться только ОДУ первого порядка.

Решение ОДУ

- ОДУ: $y' = x^2$;
- Одно из решений: $y = (1/3) \cdot x^3$;
- Проверка:
 - $((1/3) \cdot x^3)' = (1/3) \cdot (x^3)' = (1/3) \cdot 3x^2 = x^2$.
- Другое решение ОДУ: $y = (1/3) \cdot x^3 + 1, 2$.
- ОДУ могут иметь **множество решений**.

Общее решение ОДУ –

- это множество решений, содержащее ВСЕ без исключения решения этого дифференциального уравнения.

Частное решение ОДУ –

- одно из множества решений ОДУ, удовлетворяющее изначально заданным дополнительным условиям:
- ОДУ: $y' = x^2, y(1) = 1;$
- Общее решение: $y(x) = (1/3) \cdot x^3 + C.$
- Найдём C : $1 = (1/3) \cdot 1^3 + C$
 $C = 2/3.$
- Частное решение ОДУ: $y = (1/3) \cdot x^3 + 2/3.$

Задача Коши —

- это задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным **начальным условиям**.

ОДУ с разделяющимися переменными —

это уравнение, которое возможно преобразовать таким образом, что **правая часть** будет содержать выражения **ТОЛЬКО** с переменной y , а **левая** — **ТОЛЬКО** с переменной x (или наоборот).

Пример 1

Найти **общее** решение ОДУ

$$xy' = y.$$

Решение ОДУ происходит в несколько этапов:

Этап 1: расшифровка производной

Запишем: $y' = dy/dx$

Тогда:

$$xy' = y \Rightarrow$$
$$x \cdot dy/dx = y;$$

Этап 2: разделение переменных

$$x \cdot dy/dx = y;$$

По свойству пропорции, перенесём «крест-накрест» x и dx вправо, а y – влево:

$$dy/y = dx/x;$$

Этап 3: интегрирование

Найдём интегралы левой и правой частей уравнения:

$$\int(dy/y) = \int(dx/x);$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \text{константа};$$

$$\text{константа} = \ln|C|;$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|;$$

Этап 4: нахождение y в явном виде

Найдём общее решение (функцию y) в явном виде:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|;$$

$$y = Cx.$$

ОТВЕТ: $y = Cx$, где C – константа.

*Общее решение ОДУ – семейство функций (здесь – семейство прямых пропорциональностей).

Пример 2 (задача Коши)

Найти **частное** решение дифференциального уравнения

$$y' = -2y,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = 2.$$

Этап 1: расшифровка производной

Запишем: $y' = dy/dx$

Тогда:

$$y' = -2y \Rightarrow$$
$$dy/dx = -2y;$$

Этап 2: разделение переменных

$$dy/dx = -2y;$$

По свойству пропорции, перенесём «крест-накрест» dx вправо, а y – влево:

$$dy/y = -2dx;$$

Этап 3: интегрирование

Найдём интегралы левой и правой частей уравнения:

$$dy/y = dx;$$

$$\int(dy/y) = \int(-2dx);$$

$$\int(dy/y) = -2\int dx;$$

$$\ln|y| = -2x + C;$$

Этап 4: нахождение y в явном виде

Найдём общее решение (функцию y) в явном виде:

$$\ln|y| = -2x + C^*;$$

Учтём: если $\ln a = b$, то $a = e^b$;

$$y = e^{-2x + C^*};$$

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x} \Rightarrow$$

Переобозначим: $e^{C^*} = C$,

тогда общее решение будет иметь вид: $y = Ce^{-2x}$.

(семейство экспоненциальных функций)

Этап 5: нахождение частного решения

Найдём частное решение для $y(0) = 2$:

При $x = 0$: $y = Ce^{-2 \cdot 0} = Ce^0 = C \cdot 1 = C = 2$.

Тогда $y = Ce^{-2x}$ и $C = 2 \Rightarrow$

$y = 2e^{-2x}$ – частное решение ОДУ.

Ответ: $y = 2e^{-2x}$.

Итоги

- свойства интегралов;
- таблица неопределённых интегралов;
- методы интегрирования;
- формула Ньютона-Лейбница;
- дифференциальные уравнения;
- задача Коши.

Домашнее задание

К практическому занятию №3:

- Теория – лекционный материал;
- Письменно – упражнения для самостоятельной работы.

Благодарю за сотрудничество

До встречи!

