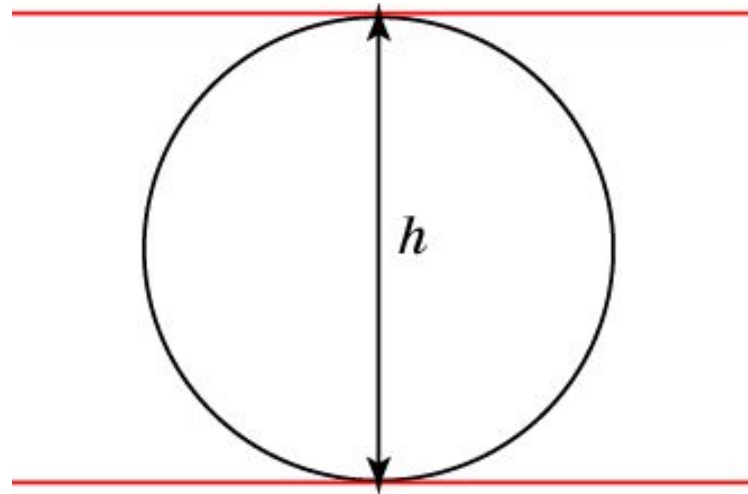
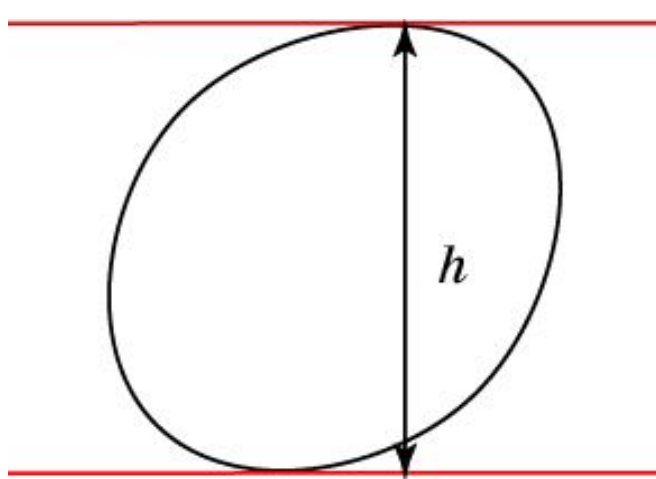


# Кривые постоянной ширины

Для определения ширины  $h$  замкнутой кривой рассмотрим две параллельные прямые, между которыми расположена данная кривая. Будем сдвигать друг к другу эти прямые до тех пор, пока они не коснутся кривой. Расстояние между полученными параллельными прямыми и будет шириной кривой в направлении перпендикулярном этим прямым.



Для разных направлений ширина кривой может быть разной. Примером кривой одинаковой (постоянной) ширины по всем направлениям является окружность. Ее ширина равна диаметру.

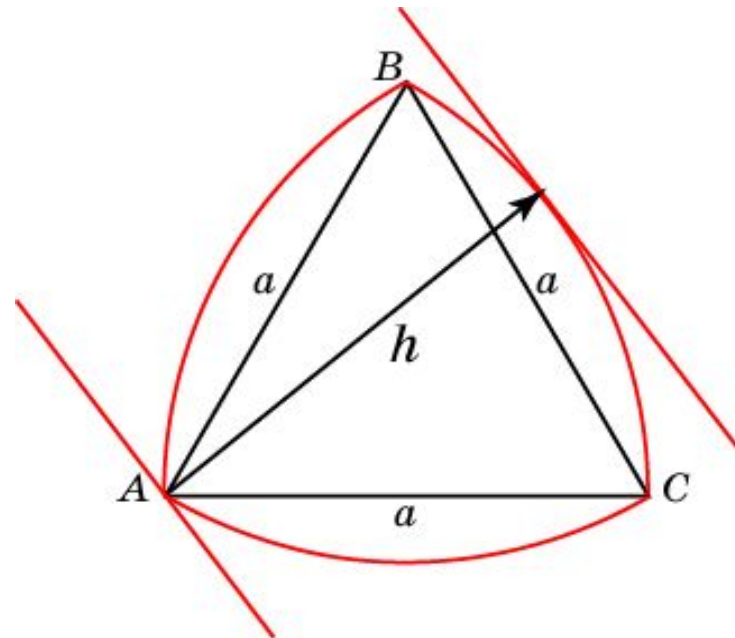
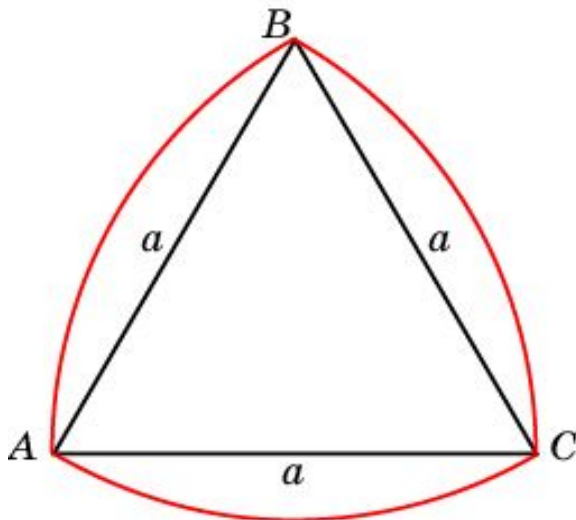
О кривых постоянной ширины рекомендуем посмотреть фильм на сайте [www.etudes.ru](http://www.etudes.ru)

# Треугольник Рело

Бывают ли кривые, отличные от окружности и имеющие постоянную ширину?

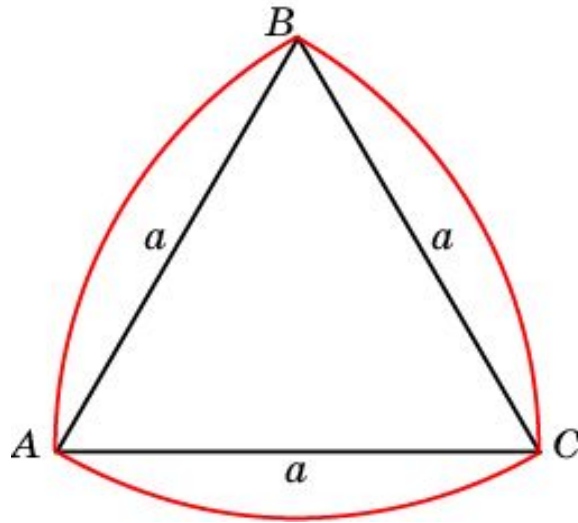
Оказывается, бывают. Примером такой кривой является кривая, придуманная французским ученым Ф. Рело (1829 – 1905), называемая «треугольник Рело».

Для его построения рассмотрим правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $a$ . С центром в вершине  $A$  и радиусом  $a$  проведем дугу  $BC$  окружности. Аналогично, с центрами в вершинах  $B$  и  $C$  и радиусом  $a$  проведем дуги окружности  $AC$  и  $AB$ . В результате получим искомую кривую, состоящую из трех дуг окружности. Ее ширина равна стороне  $a$  правильного треугольника.



# Упражнение 1

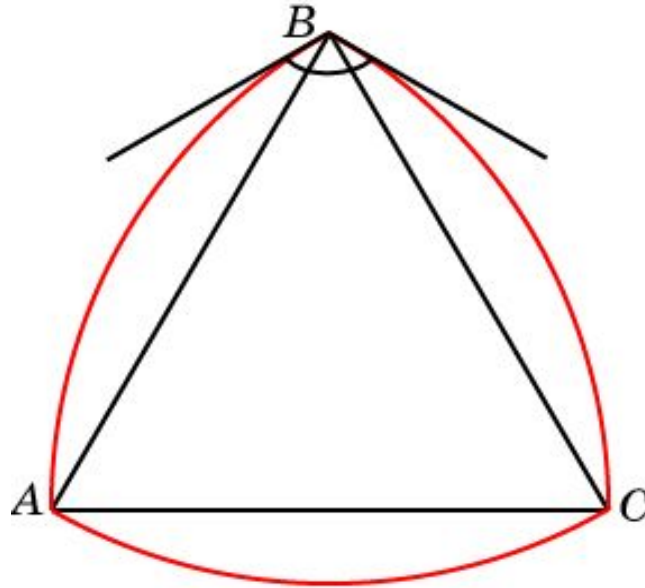
Докажите, что периметр треугольника Рело равен длине окружности, диаметр которой равен ширине треугольника Рело.



**Решение.** Напомним, что длина дуги окружности с центральным углом  $\varphi$  и радиусом  $r$  равна  $\varphi r$ . Так как треугольник Рело состоит из трех дуг окружностей, для которых  $r = a$ ,  $\varphi = \pi/3$ , то их общая длина равна  $\pi r$ , т.е. равна длине окружности, диаметр которой равен ширине треугольника Рело.

## Упражнение 2

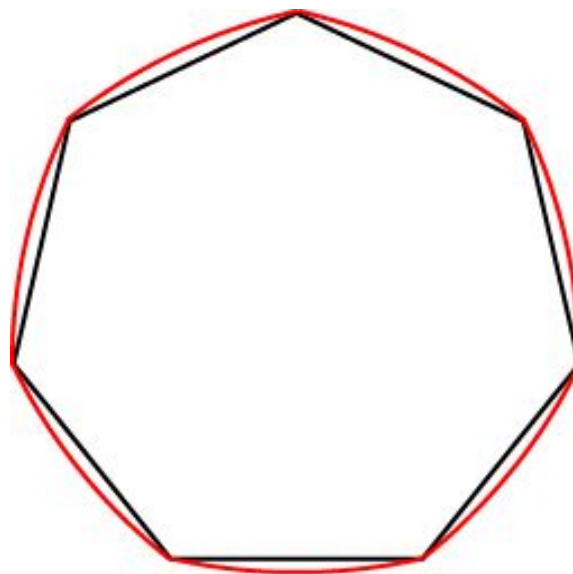
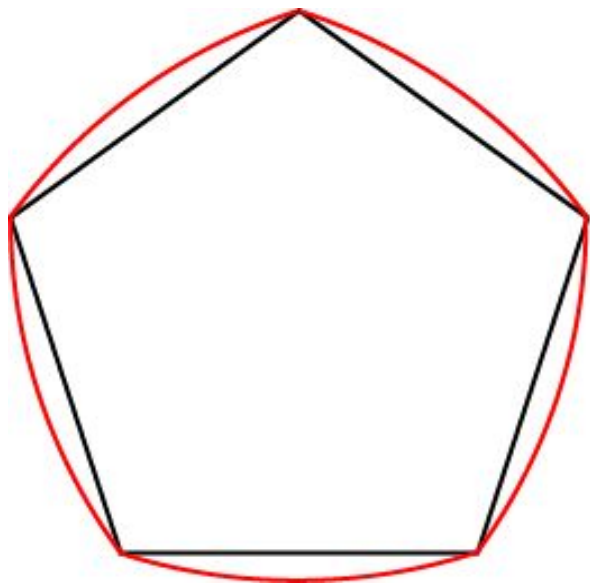
Найдите углы треугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах.



Ответ.  $120^\circ$ .

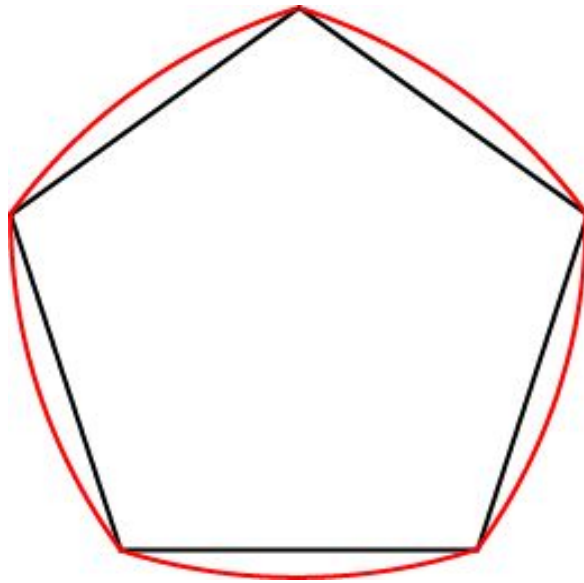
# Правильные многоугольники Рело

Кривые постоянной ширины можно получать не только из правильного треугольника, но и из правильных многоугольников с нечетным числом сторон. На рисунке показаны такие кривые для правильных пятиугольника и семиугольника.



## Упражнение 3

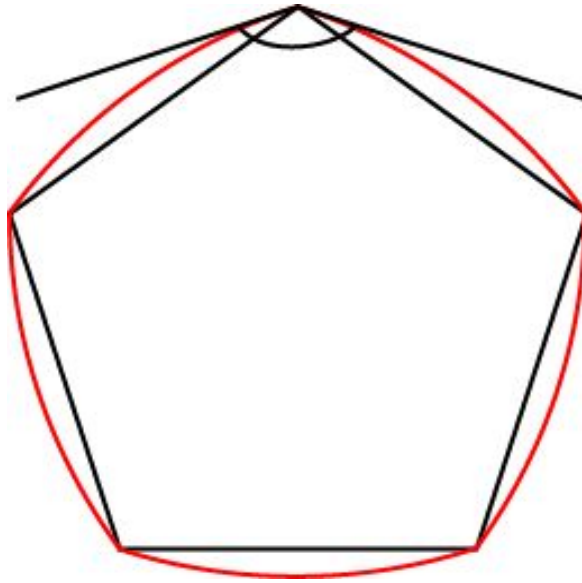
Сторона правильного пятиугольника равна 1. Найдите ширину соответствующего треугольника Рело.



Ответ.  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

## Упражнение 4

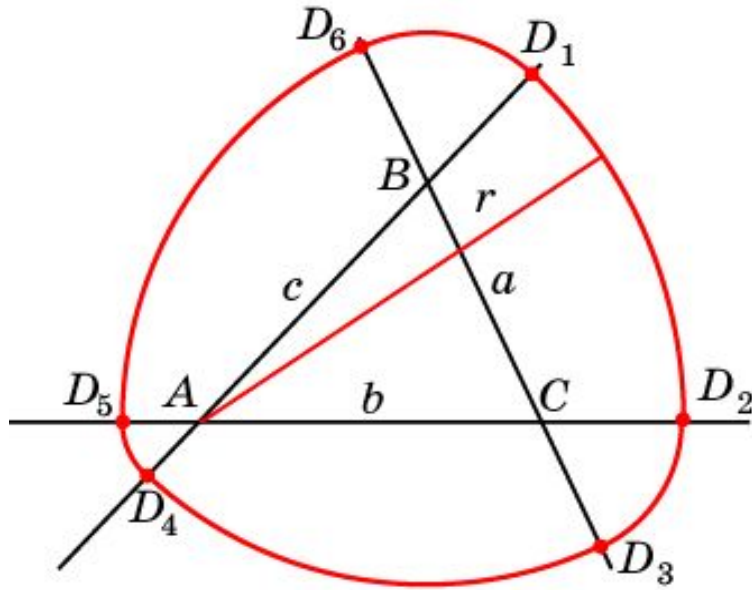
Найдите углы пятиугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах.



Ответ.  $144^\circ$ .

# Неравносторонний треугольник

Рассмотрим три прямые, попарно пересекающиеся в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Обозначим стороны треугольника  $ABC$  соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .



На продолжении отрезка  $AB$  возьмем точку  $D_1$ . С центром в точке  $A$  и радиусом  $r = AD_1$  проведем дугу окружности, соединяющую точку  $D_1$  и точку  $D_2$  на луче  $AC$ .

Далее, с центром в точке  $C$  и радиусом  $CD_2 = r - b$  проведем дугу окружности, соединяющую точку  $D_2$  и точку  $D_3$  на луче  $BC$ .

Затем, с центром в точке  $B$  и радиусом  $BD_3 = a + r - b$  проведем дугу окружности, соединяющую точку  $D_3$  и точку  $D_4$  на луче  $BA$ .

С центром в точке  $A$  и радиусом  $AD_4 = a + r - b - c$  проведем дугу окружности, соединяющую точку  $D_4$  и точку  $D_5$  на луче  $CA$ .

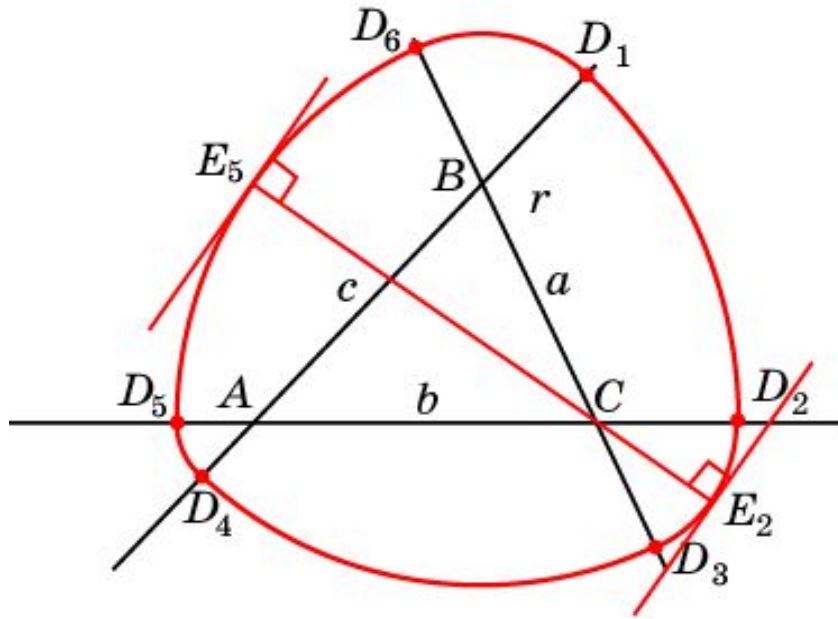
С центром в точке  $C$  и радиусом  $CD_5 = a + r - c$  проведем дугу окружности, соединяющую точку  $D_5$  и точку  $D_6$  на луче  $CB$ .

С центром в точке  $B$  и радиусом  $BD_6 = r - c$  проведем дугу окружности, соединяющую точку  $D_6$  и точку  $D_1$  на луче  $AB$ . Получим замкнутую кривую.



## Упражнение 5

Докажите, что полученная кривая имеет постоянную ширину. Найдите ее выражение через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $r$ .



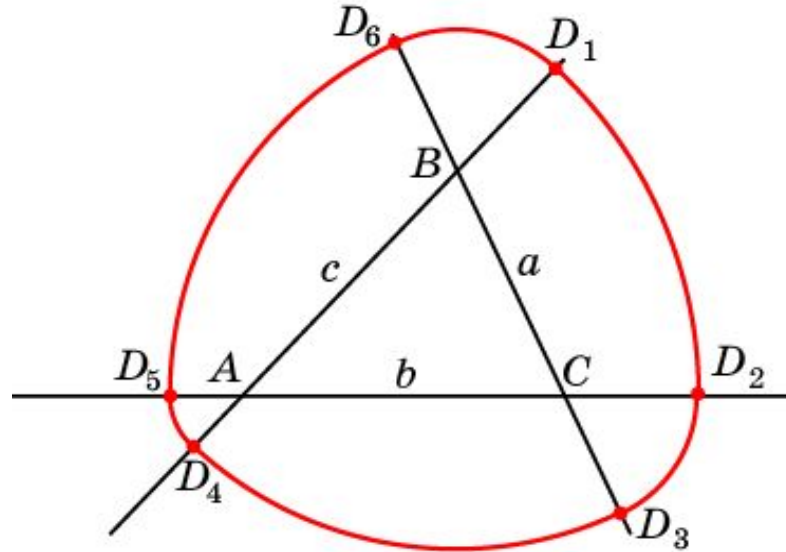
**Решение.** Через точку  $E_1$  на дуге  $D_1D_2$  и точку  $A$  проведем прямую. Ее точку пересечения с дугой  $D_4D_5$  обозначим  $E_4$ . Касательные к кривой в точках  $E_1, E_4$  будут перпендикулярны отрезку  $E_1E_4$ . Следовательно, длина этого отрезка будет шириной кривой  $h$  в направлении прямой  $E_1E_4$ ,  $h = r + a + r - b - c = 2r + a - b - c$ . Ясно, что это значение не зависит от выбора точки  $E_1$  на дуге  $D_1D_2$ .

Рассмотрим теперь точку  $E_2$  на дуге  $D_2D_3$ . Через нее и точку  $C$  проведем прямую. Ее точку пересечения с дугой  $D_5D_6$  обозначим  $E_5$ . Касательные к кривой в точках  $E_2, E_5$  будут перпендикулярны отрезку  $E_2E_5$ . Следовательно, длина этого отрезка будет шириной кривой в направлении прямой  $E_2E_5$ . Она равна  $r - b + a + r - c = 2r + a - b - c = h$ . Ясно, что это значение не зависит от выбора точки  $E_2$  на дуге  $D_2D_3$ .

Аналогичным образом показывается, что для точек  $E_3$  дуги  $D_3D_4$  ширина кривой также будет равна  $2r + a - b - c = h$ .

## Упражнение 6

Докажите, что длина полученной кривой равна длине окружности с диаметром, равным ширине  $h$  кривой.



**Решение.** Напомним, что длина  $l$  дуги окружности радиуса  $R$  и центральным углом  $\varphi$  выражается формулой  $l = \varphi R$ .

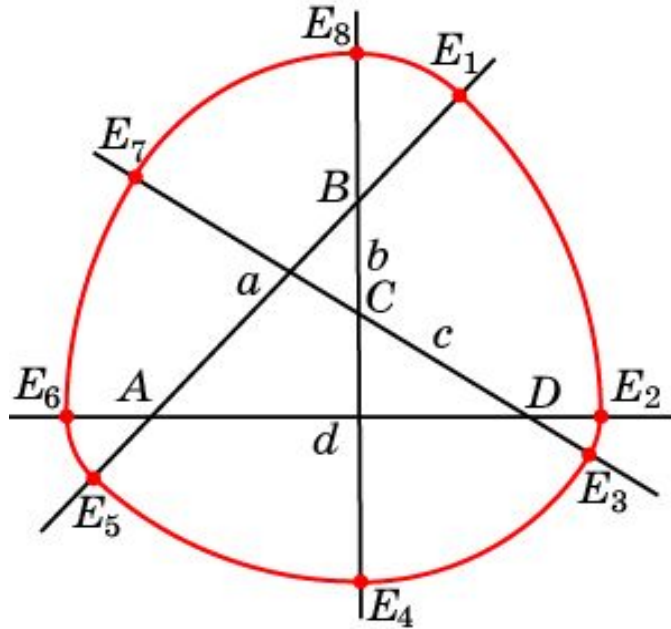
Пусть углы треугольника  $ABC$  равны соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Тогда длина дуги  $D_1D_2$   $\alpha r$ , длина дуги  $D_4D_5$  равна  $\alpha(a + r - b - c)$ . Их сумма равна  $\alpha h$ .

Аналогично, сумма длин дуг  $D_2D_3$  и  $D_5D_6$  равна  $\gamma h$ , сумма длин дуг  $D_3D_4$  и  $D_6D_1$  равна  $\beta h$ .

Таким образом, длина всей кривой равна  $\alpha h + \beta h + \gamma h = (\alpha + \beta + \gamma)h = \pi h$ , т.е. равна длине окружности с диаметром  $h$ .

# Невыпуклый четырехугольник

Рассмотрим четыре прямые, попарно пересекающиеся в точках  $A, B, C, D$ . Обозначим стороны четырехугольника  $ABCD$  соответственно  $a, b, c, d$ .



На продолжении отрезка  $AB$  возьмем точку  $E_1$ . С центром в точке  $A$  и радиусом  $r = AE_1$  проведем дугу окружности, соединяющую точку  $E_1$  и точку  $E_2$  на луче  $AD$ .

Проведите дальнейшее построение кривой постоянной ширины самостоятельно, найдите ее ширину. Докажите, что ее длина равна длине окружности с диаметром, равным ширине  $h$  кривой.

**Ответ.** Искомая кривая изображена на рисунке, где  $E_2E_3$  – дуга окружности с центром  $D$  и радиусом  $r - d$ ,  $E_3E_4$  – дуга окружности с центром  $C$  и радиусом  $c + r - d$ ,  $E_4E_5$  – дуга окружности с центром  $B$  и радиусом  $b + c + r - d$ ,  $E_5E_6$  – дуга окружности с центром  $A$  и радиусом  $b + c + r - d - a$ ,  $E_6E_7$  – дуга окружности с центром  $D$  и радиусом  $b + c + r - a$ ,  $E_7E_8$  – дуга окружности с центром  $C$  и радиусом  $b + r - a$ ,  $E_8E_1$  – дуга окружности с центром  $B$  и радиусом  $r - a$ . Ширина  $h$  кривой равна  $2r + b + c - a - d$ .