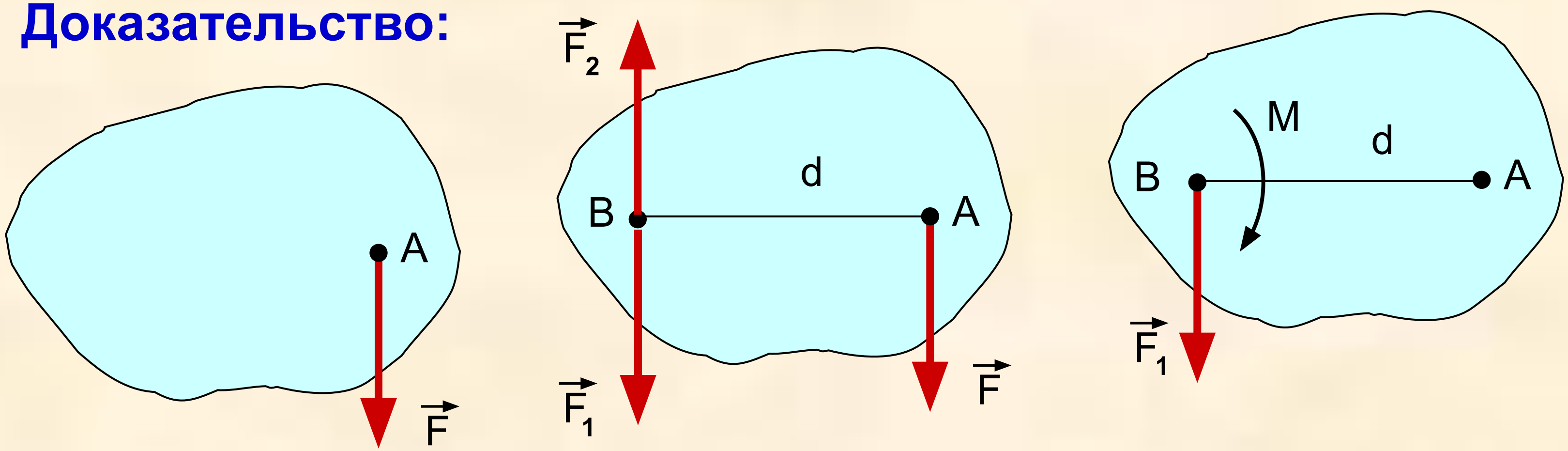
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ

ЛЕММА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИЛЫ

Силу, приложенную в некоторой точке АТТ, можно переносить параллельно самой себе в любую другую точку этого тела, прикладывая при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.

Доказательство:



$(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{F}$ (в точке A) т.к. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0;$

$(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{F}_1$ (в точке B) + пара сил $(\vec{F}, \vec{F}_2);$

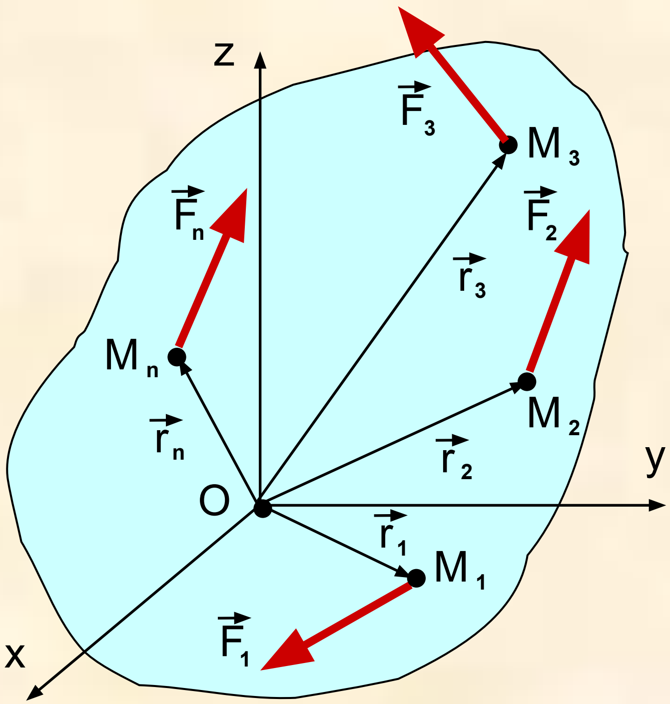
Следовательно, сила $\vec{F}$ в точке A эквивалентна силе $\vec{F}_1$ в точке B и паре сил $(\vec{F}, \vec{F}_2)$.

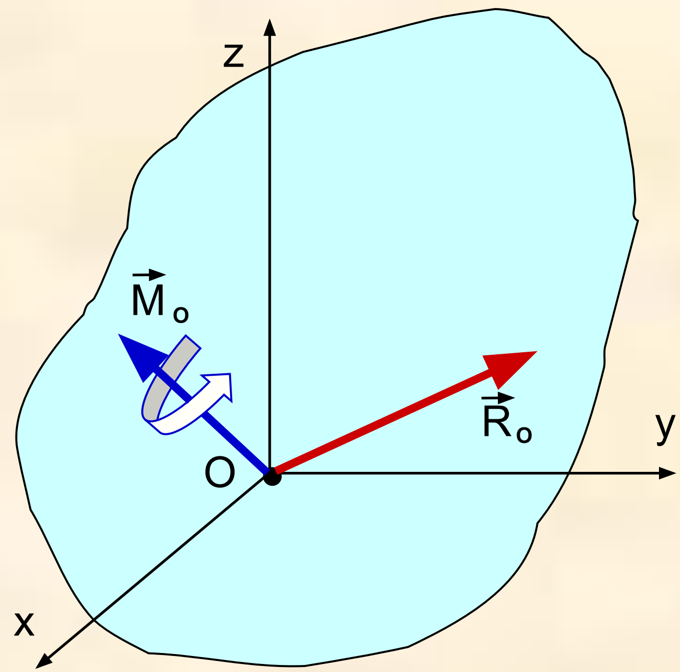
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ

Теорема Пуансо

Произвольную пространственную систему сил, приложенных к АТТ, в общем случае можно заменить одной силой, равной главному вектору $\vec{R}_o$ системы сил и приложенной в произвольно выбранном центре приведения О, и одной парой сил с моментом, равным главному моменту $\vec{M}_o$ системы относительно выбранного центра приведения.

Доказательство:





$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \ , \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k \ .$$

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ СИЛ

$$\begin{cases} R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \\ M_y = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}), \\ M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \end{cases}$$

$$\left|\vec{R}_O\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\left|\vec{M}_O\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

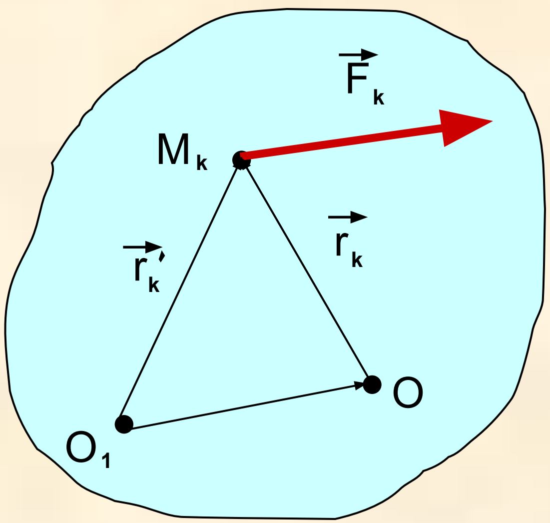
$$\begin{cases} \cos(\vec{R}_O,\hat{\ } x) = R_x / \left|\vec{R}_O\right|, \\ \cos(\vec{R}_O,\hat{\ } y) = R_y / \left|\vec{R}_O\right|, \\ \cos(\vec{R}_O,\hat{\ } z) = R_z / \left|\vec{R}_O\right|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\vec{M}_O,\hat{\ } x) = M_x / \left|\vec{M}_O\right|, \\ \cos(\vec{M}_O,\hat{\ } y) = M_y / \left|\vec{M}_O\right|, \\ \cos(\vec{M}_O,\hat{\ } z) = M_z / \left|\vec{M}_O\right|. \end{cases}$$

ПЕРЕМЕНА ЦЕНТРА ПРИВЕДЕНИЯ

При перемене центра приведения главный вектор системы сил не изменяется, а главный момент системы сил относительно нового центра приведения равен главному моменту системы сил относительно старого центра приведения, сложенному с моментом главного вектора системы сил, взятого в старом центре приведения относительно нового центра приведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Центр O :

$$\begin{cases} \vec{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k , \\ \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k . \end{cases}$$

Центр O_1 :

$$\begin{cases} \vec{R}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k , \\ \vec{M}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}\,'_k \times \vec{F}_k . \end{cases}$$

$$\vec{r}\,'_k = \overrightarrow{O_1O} + \vec{r}_k$$

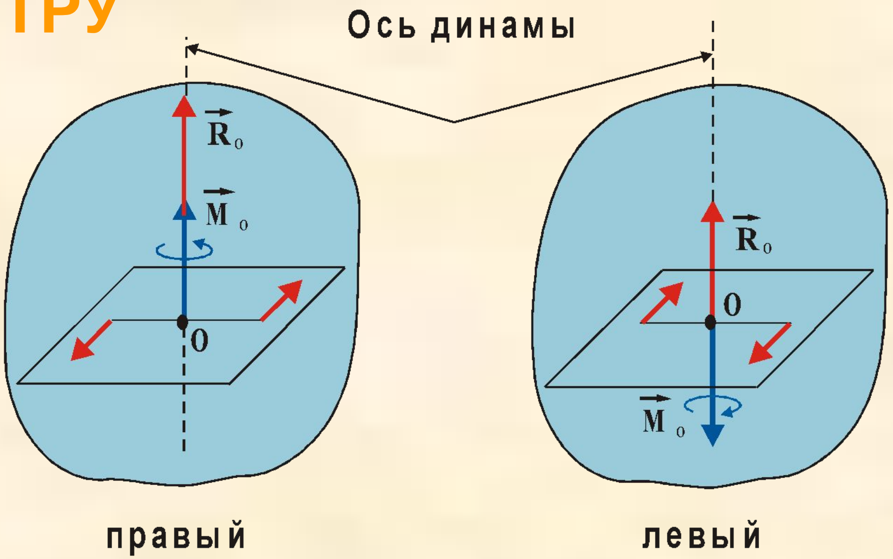
$$\vec{M}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}\,'_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{O_1O} + \vec{r}_k) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k =$$

$$= \overrightarrow{O_1O} \times (\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \vec{M}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}_O .$$

Величины, не изменяющиеся при каком-либо преобразовании, называют инвариантами этого преобразования. В рассматриваемом случае существуют два инварианта: $\vec{R}_O = \vec{R}_{O1} =$ invar ; $\vec{R}_O \cdot \vec{M}_O = \vec{R}_{O1} \cdot \vec{M}_{O1} =$ invar.

$$\begin{cases} \vec{R}_{O1} = \vec{R}_O \\ \vec{M}_{O1} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{R}_O . \end{cases}$$

ВОЗМОЖНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ

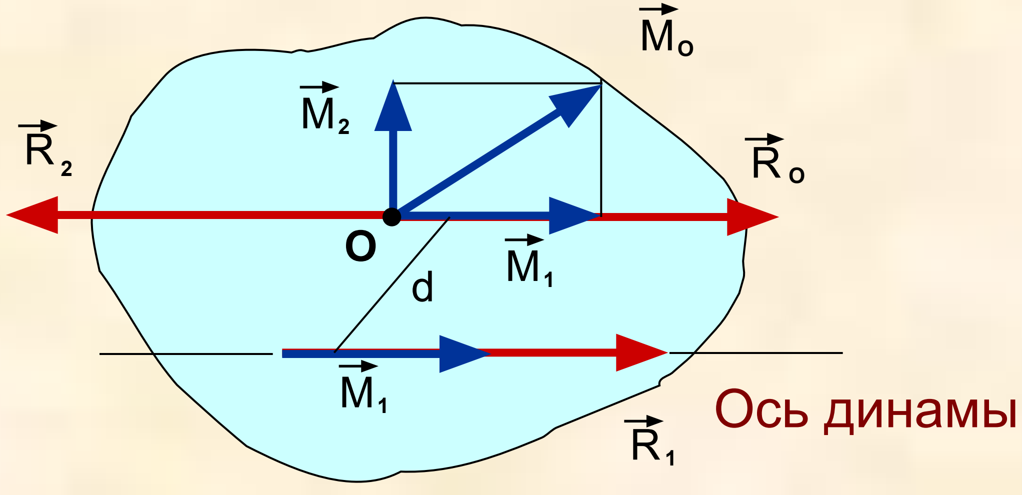


1) Динамический винт (динама).

Динамическим винтом (динамой) называют совокупность главного вектора и коллинеарного ему главного момента.

Пусть в центре приведения O

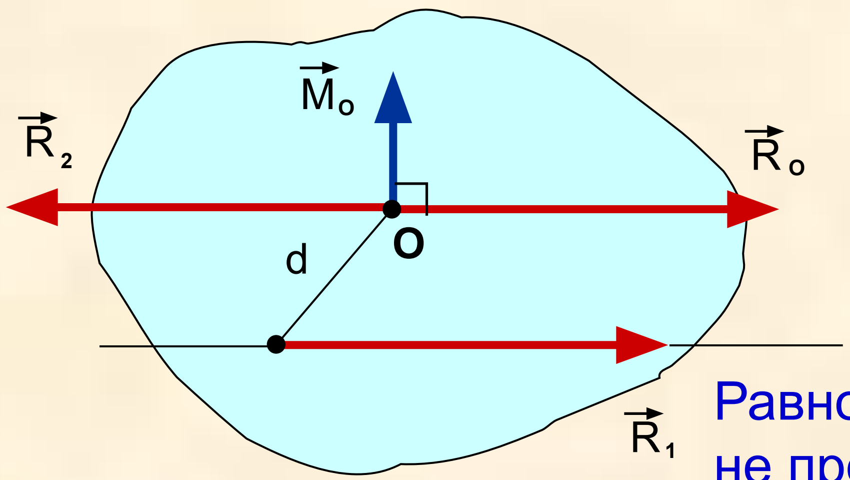
$\vec{R}_o \neq 0$, $\vec{M}_o \neq 0$, $\vec{R}_o \not\perp \vec{M}_o$



ВОЗМОЖНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ

2) Пусть в центре приведения O

$\vec{R}_o \neq 0$, $\vec{M}_o \neq 0$, $\vec{R}_o \perp \vec{M}_o$



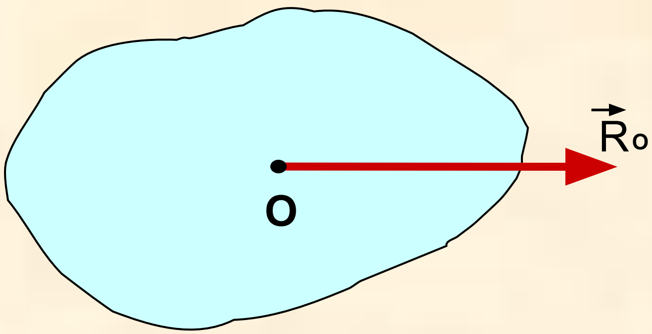
Равнодействующая, не проходящая через выбранный центр приведения.

$$d = \frac{\left|\vec{M}_O\right|}{\left|\vec{R}_O\right|}$$

ВОЗМОЖНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ

3) Пусть в центре приведения О

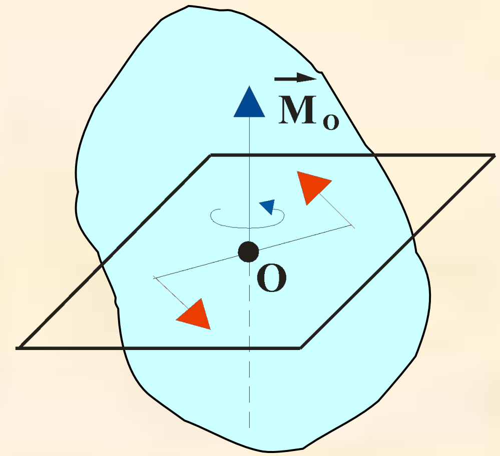
$\vec{R}_o \neq 0$, $\vec{M}_o = 0$



Равнодействующая, проходящая через выбранный центр приведения.

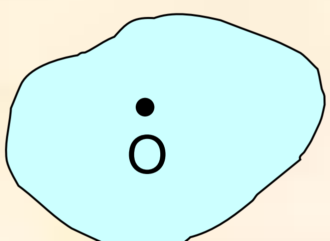
4) Пусть в центре приведения О

$\vec{R}_o = 0$, $\vec{M}_o \neq 0$



Пара сил.

5) Пусть в центре приведения О $\vec{R}_o = 0$, $\vec{M}_o = 0$



Система сил, эквивалентная нулю.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА О МОМЕНТЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Если произвольная пространственная система сил приводится к равнодействующей, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен векторной сумме моментов всех сил данной системы относительно того же центра.

Доказательство:

Пусть в центре приведения O : $\vec{R}_O \neq 0, \vec{M}_O = 0.$

Тогда в произвольном центре O_1

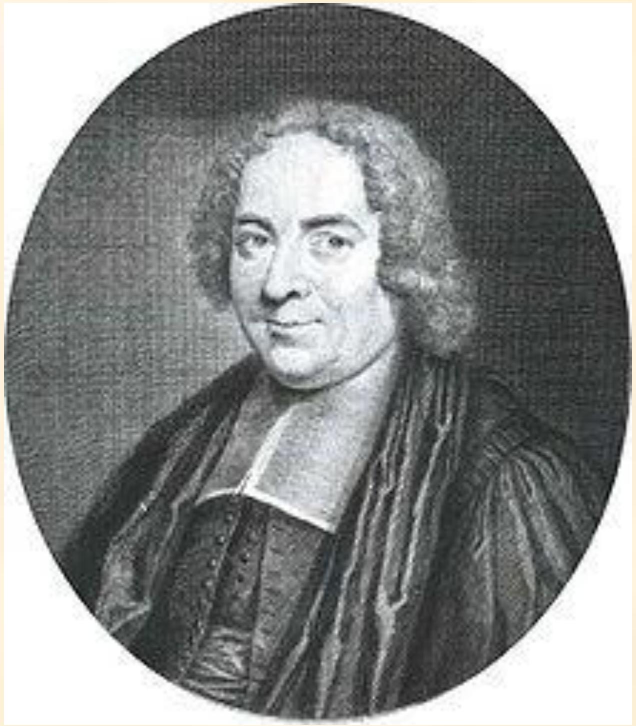
$$\vec{M}_{O1} = \vec{M}_O + \vec{O_1O} \times \vec{R}_O = \vec{O_1O} \times \vec{R}_O = \vec{M}_{O1}(\vec{R}_O) \quad \text{т.к.} \quad \vec{M}_O = 0$$

С другой стороны $\vec{M}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O1}(\vec{F}_k).$

Таким образом : $\vec{M}_{O1}(\vec{R}_O) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O1}(\vec{F}_k).$

Замечание. Данная теорема справедлива и для момента равнодействующей силы относительно произвольной оси, что позволяет при решении задач существенно упростить вычисление моментов сил относительно выбранных осей координат.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ



Пьер Вариньон (фр. *Pierre Varignon)*
Кан,1654 —23.12,1722,Париж)
французский математик и механик,
член Парижской Академии наук,
профессор математики коллежа Мазарини,
профессор Коллеж де Франс.
Обучался в иезуитском коллеже
и университете в Кане, где стал магистром в 1682г.
Вариньон был другом Ньютона, Лейбница и Бернулли.
Основной вклад Вариньон совершил в статику и механику;
кроме того, труды Вариньона посвящены
анализу бесконечно малых, геометрии, гидромеханике.
Вариньон был самым первым пропагандистом
дифференциального исчисления во Франции.
В 1687 г. в своей работе «Проект новой механики…»
Вариньон дал точную формулировку закона
параллелограмма сил, развил понятие момента сил
и вывел теорему, получившую имя Вариньона.
В работе «Новая механика или статика,
проект которой был дан в 1687» (1725)
Вариньон дал систематическое изложение учения
о сложении и разложении сил,
о моментах сил и о правилах оперирования ими.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Луи́ Пуансо́ (фр. *Louis Poinsot*, 1777—1859) —
Французский математик и механик,
академик Парижской Академии наук (1813);
пэр Франции (1846), сенатор (1852).

Известен своими трудами в области геометрии
и механики. Именно Пуансо впервые ввёл понятие
эллипсоида вращения.

В 1797 г. Пуансо окончил лицей Людовика Великого
и Политехническую школу в Париже.

В 1834 г. Пуансо опубликовал работу *Éléments de statique*
(«Элементы статики»), в которой им были применены
Геометрические методы исследования к учению о
равновесии твёрдых тел и их систем;
эта книга много раз переиздавалась,
причём автор неоднократно дополнял её своими
новыми статьями. Долгое время работа считалась
образцовым руководством для первоначального
преподавания механики.

В 1834 г. Пуансо построил теорию вращения
твердого тела вокруг неподвижной точки.