

Тригонометрические уравнения

Два основных метода

решения

тригонометрических

$\text{tg}(\alpha - \beta)$ уравнений

Математика

10 класс

МБОУ СШ №12

Учитель: Шудраков Николай

Метод введения новой переменной

□ Метод сводится к замене тригонометрической функции новой переменной.

□ Полученное уравнение решается известными способами, после решения возвращаемся к решению тригонометрического уравнения

Пример 1.

□ Решите уравнение:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Пример 1. Решение

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Введем новую переменную: $z = \sin x$

Уравнение примет вид:

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

отсюда находим $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$

Пример 1. Решение

Значит, либо $\sin x = 2$,

либо $\sin x = \frac{1}{2}$

Первое уравнение не имеет корней,

а из второго находим:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Пример 2.

□ Решите уравнение:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Пример 2. Решение

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

По основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Получим:

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Введем новую переменную:

$$z = \cos x$$

Уравнение примет вид:

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

Пример 2. Решение

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

Находим корни:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2}$$

Отсюда: $\cos x = 1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$

Из первого уравнения $x = 2\pi n$

Их второго находим $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $x = 2\pi n$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Метод разложения на множители

□ Если уравнение $f(x) = 0$ удается

а преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то либо

$$f_1(x) = 0, \text{ либо } f_2(x) = 0.$$

□ В подобных случаях говорят, что задача

сводится к решению совокупности

уравнений:

$$f_1(x) = 0; \quad f_2(x) = 0$$

Пример 3.

□ Решите уравнение:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos 5x - \cos 5x = 0$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Пример 3. Решение

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos 5x - \cos 5x = 0$$

Вынесем общий множитель за скобку и получим:

$$\cos 5x \left(2 \sin \frac{x}{2} - 1 \right) = 0$$

Приходим к совокупности двух уравнений:

$$\cos 5x = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} - 1 = 0$$

Пример 3. Решение

Решаем первое уравнение:

$$\cos 5x = 0$$

$$t = 5x$$

$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$$

Пример 3. Решение

Решаем второе уравнение:

$$2 \sin \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} = 1$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$