Лекція № 24

з дисципліни “**Сигнали та процеси в радіотехніці**”

Частина друга **“Статистична радіотехніка”**

Тема 8. ОПТИМАЛЬНИЙ ПРИЙОМ СИГНАЛІВ

8.3. Апостеріорна щільність ймовірності параметрів радіосигналу

Обробка й аналіз прийнятого коливання можуть здійснюватися двома методами: дискретним і неперервним.

Під час дискретної обробки вибіркові значення прийнятого коливання $\xi(t)$ описуються спільними щільностями ймовірності корисного сигналу та шуму відповідно

$$f_{\xi}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \qquad f_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)$$

Нехай сигнал

$$s(t) = s(t, \lambda) \tag{8.14}$$

залежить від одного невідомого неперервного параметра λ, що має апріорну щільність ймовірності $f_{pr}(\lambda)$.

Всі відомості, які можна отримати про параметр після приймання коливання $\xi(t)$, укладені в умовній щільності ймовірності, яка є апостеріорною щільністю ймовірності

$$\xi(t) = f(\lambda / \xi_1, \ldots, \xi_m) \tag{8.15}$$

Відповідно до теореми множення ймовірностей

$$f(\lambda, \xi_1, ..., \xi_m) = f_\xi(\xi_1, ..., \xi_m) f(\lambda / \xi_1, ..., \xi_m) = f_{pr}(\lambda) f_\lambda(\xi_1, ..., \xi_m / \lambda) \qquad (8.16)$$

$$f_{ps}(\lambda) = k\ f_{pr}(\lambda) f_\lambda(\xi_1, ..., \xi_m / \lambda) \qquad (8.17)$$

Розглянута як функція від λ, умовна щільність ймовірності

$$L(\lambda) = f_\lambda(\xi_1, ..., \xi_m / \lambda) \qquad (8.18)$$

по суті є функцією правдоподібності.

Тоді формулу (8.17) можна записати в остаточному вигляді

$$f_{ps}(\lambda) = k\ f_{pr}(\lambda)L(\lambda) \qquad (8.19)$$

$$k = \left[\int f_{pr}(\lambda)L(\lambda)d\lambda \right]^{-1} \qquad (8.20)$$

Формула (8.19) являє математичний запис теореми Байєса.

Якщо параметр λ є дискретним і може приймати тільки одне з декількох можливих значень λ_i із апріорними ймовірностями $p_{pr}(\lambda_i)$, то апостеріорні ймовірності цих значень визначаються за формулою

$$p_{ps}(\lambda_i) = k\ p_{pr}(\lambda_i)L(\lambda_i) \qquad (8.21)$$

$$k = \left[\sum_{i=1}^{\nu} p_{pr}(\lambda_i)L(\lambda_i) \right]^{-1} \qquad (8.22)$$

Якщо сигнал залежить від безперервних параметрів

$$s(t) = s(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$$

то формула (8.19) буде мати вигляд

$$f_{ps}(\lambda_1, ..., \lambda_\mu) = k \ f_{pr}(\lambda_1, ..., \lambda_\mu) L(\lambda_1, ..., \lambda_\mu) \qquad (8.23)$$

$$k = \left[\int ... \int f_{pr}(\lambda_1, ..., \lambda_\mu) L(\lambda_1, ..., \lambda_\mu) d\lambda_1 ... d\lambda_\mu \right]^{-1} \qquad (8.24)$$

Розглянемо випадок, коли прийняте коливання являє собою адитивну суміш корисного сигналу й нормального білого шуму. Нехай здійснюються дискретні спостереження, коли відлики беруться через рівновіддалені моменти часу. Розіб'ємо інтервал спостереження рівновіддаленими точками $\Delta = t_i - t_{i-1}$.

Позначимо осереднені за елементарний інтервал часу значення коливання, сигналу й шуму відповідно через

$$\xi_i = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} \xi(t)dt \qquad (8.25)$$

$$S_i(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} S(t,\lambda)dt \qquad (8.26)$$

$$n_i = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i - \Delta}^{t_i} n(t)dt \qquad (8.27)$$

$$n_i = \xi_i - S_i(\lambda) \qquad (8.28)$$

Випадкові величини n_i є нормально розподіленими й, згідно (8.27), мають наступні характеристики:

$$f_n(n_1,...,n_m) = f_1(n_1)...f_1(n_m) = (\pi \frac{N_0}{\Delta})^{-\frac{m}{2}} \exp\{-\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{m} n_i^2 \Delta\}$$

$$M[n_i] = 0$$

$$\sigma_i^2 = M[n_i^2] = \frac{N_0}{2\Delta}$$

$$M[n_i n_j] = 0, \ \ i \neq j$$

При дискретному спостереженні функцію правдоподібності у формулі (8.23) потрібно вважати рівною

$$L(\lambda) = (\pi \frac{N_0}{\Delta})^{-\frac{m}{2}} \exp\{-\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{m} [\xi(t_i) - S(t_i, \lambda)]^2 \Delta\} \qquad (8.29)$$

Для сигналу, що залежить від декількох параметрів, функція правдоподібності

$$L(\lambda_1, ..., \lambda_\mu) = (\pi \frac{N_0}{\Delta})^{-\frac{m}{2}} \exp\{-\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{m} [\xi(t_i) - S(t_i, \lambda_1, ..., \lambda_\mu)]^2 \Delta\} \qquad (8.30)$$

Щоб перейти до випадку неперервного спостереження, потрібно у формулах (8.29) і (9.30) перейти до межі $\Delta \to 0$

$$F(\lambda) = \lim_{\Delta \to 0} L(\lambda) \tag{8.31}$$

Здійснюючи граничний перехід, отримаємо

$$f[n(t)] = \exp\{-\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} n^2(t)dt\} \tag{8.32}$$

$$F(\lambda) = \exp\{-\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - S(t,\lambda)]^2 dt\} \tag{8.33}$$

Таким чином, при неперервній обробці

$$f_{ps}(\lambda) = k\ f_{pr}(\lambda)F(\lambda) \qquad (8.34)$$

При вирішенні основних задач оптимального прийому оперують також з відношенням правдоподібності. Воно являє собою відношення функцій (при дискретній обробці) або функціоналів (при безперервній обробці) правдоподібності при наявності й відсутності сигналу

$$l\,(\lambda) = \frac{F(\lambda)\big|_{S(t,\lambda)\neq 0}}{F(\lambda)\big|_{S(t,\lambda)=0}} = \frac{\exp\{-\frac{1}{N_0}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}[\xi(t)-S(t,\lambda)]^2\,dt\}}{\exp\{-\frac{1}{N_0}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi^2(t)dt\}} \qquad (8.35)$$

Розглянемо на прикладі процедуру формування апостеріорної щільності ймовірності параметрів радіосигналу й з'ясуємо якісний вплив на її значення окремих факторів.

Потрібно на основі аналізу прийнятого коливання радара

$$\xi(t) = S(t-\tau) + n(t), \quad 0 \le t \le T \tag{8.36}$$

визначити з мінімальною похибкою величину τ.

При цьому

$$f_{ps}(\tau) = k\, f_{pr}(\tau) \exp\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [\xi(t) - S(t-\tau)]^2 dt\} \tag{8.37}$$

Враховуючи, що енергія сигналу

$$E = \int_{0}^{T} S^2(t-\tau)dt \tag{8.38}$$

можна записати

$$f_{ps}(\tau) = k\, f_{pr}(\tau)\exp(-\frac{E}{N_0})\exp[q(\tau)] \tag{8.39}$$

$$q(\tau) = \frac{2}{N_0}\int_{0}^{T} \xi(t)S(t-\tau)dt \tag{8.40}$$

Множник exp(-E/N_0) можна також включити в постійну k, тоді

$$f_{ps}(\tau) = k\, f_{pr}(\tau) \exp[q(\tau)] \qquad (8.41)$$

Звідси випливає, що при відомій апріорній щільності ймовірності й спектральній інтенсивності N_0 визначення апостеріорної щільності ймовірності еквівалентно знаходженню функції $q(\tau)$.

Права частина формули (8.41) з точністю до постійного множника відтворює вираз для кореляційної функції між $\xi(t)$ і $S(t\text{-}\tau)$. Тому функція $q(\tau)$ характеризує міру взаємної кореляції між прийнятим коливанням $\xi(t)$ і корисним сигналом $S(t\text{-}\tau)$. Відповідно до цього пристрій для формування $q(\tau)$ називається *кореляційним приймачем*. Така назва зберігається при вимірюванні будь-якого параметра сигналу, а не тільки часового запізнювання τ. Загальний вираз для одержання $q(\tau)$ має вигляд

$$q(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) S(t, \lambda) dt \qquad (8.42)$$

8.4. Кореляційний прийом випадкових сигналів

Знайдемо основні ймовірнісні характеристики на виході кореляційного приймача. Нехай істинне значення параметра τ в прийнятій реалізації $\xi(t)$ дорівнює τ_0, тобто

$$\xi(t) = S(t - \tau_0) + n(t) \tag{8.43}$$

Підставивши цей вираз $\xi(t)$ в (8.42), функцію $q(\tau)$ можна представити у вигляді суми двох доданків

$$q(\tau) = q_s(\tau) + q_n(\tau) \tag{8.44}$$

$$q_s(\tau) = \frac{2}{N_0}\int_0^T S(t-\tau)S(t-\tau_0)dt \qquad (8.45)$$

$$q_n(\tau) = \frac{2}{N_0}\int_0^T n(t)S(t-\tau)dt \qquad (8.46)$$

Функція $q_s(\tau)$, що одержана на виході кореляційного приймача, являє собою «автокореляційну функцію» вхідного корисного сигналу й називається *сигнальною функцією*. Якщо в прийнятому коливанні $\xi(t)$ корисний сигнал відсутній, то сигнальна функція дорівнює нулю. Функція $q_n(\tau)$ на виході приймача обумовлена шумом і є «взаємокореляційною функцією» між шумом й вхідним корисним сигналом, яка називається *шумовою функцією*.

Визначальне розходження між сигнальною й шумовою функціями полягає в тому, що перша при кожному фіксованому значенні є детермінованою, а друга – випадковою.

Розглянемо характер сигнальної й шумової функцій. Сигнальна функція має максимум при $\tau=\tau_0$, що дорівнює

$$q_{s\,\max}(\tau_0) = \frac{2E}{N_0} = Q \qquad (8.47)$$

Формула (8.46) показує, що шумова функція формується з нормального білого шуму в результаті лінійного перетворення. Тому при кожному фіксованому значенні τ вона має нормальну щільність ймовірності з параметрами

$$M[q_n(\tau)] = \frac{2}{N_0}\int_0^T M[n(t)]S(t-\tau)dt = 0 \qquad (8.48)$$

$$\sigma_n^2 = M[q_n^2(\tau)] =$$

$$= \frac{4}{N_0^2}\int_0^T\int_0^T M[n(t_1)n(t_2)]S(t_1-\tau)S(t_2-\tau)dt_1dt_2 = \frac{2E}{N_0} \qquad (8.49)$$

З формул (8.47) і (8.49) видно, що відношення найбільшого значення сигнальної функції до середнього квадратичного значення шумової функції дорівнює

$$q_{s\max}(\tau_0)/\sigma_n = \sqrt{Q} = \sqrt{2E/N_0} \qquad (8.50)$$

Максимальне значення сигнальної функції й дисперсія шумової функції дорівнюють однієї й тій же величині

$$Q = \frac{2E}{N_0} \qquad (8.51)$$

Величина Q, яка рівна відношенню подвоєної енергії сигналу до спектральної інтенсивності шуму, називається *відношенням сигнал/шум по потужності* на вході приймача.

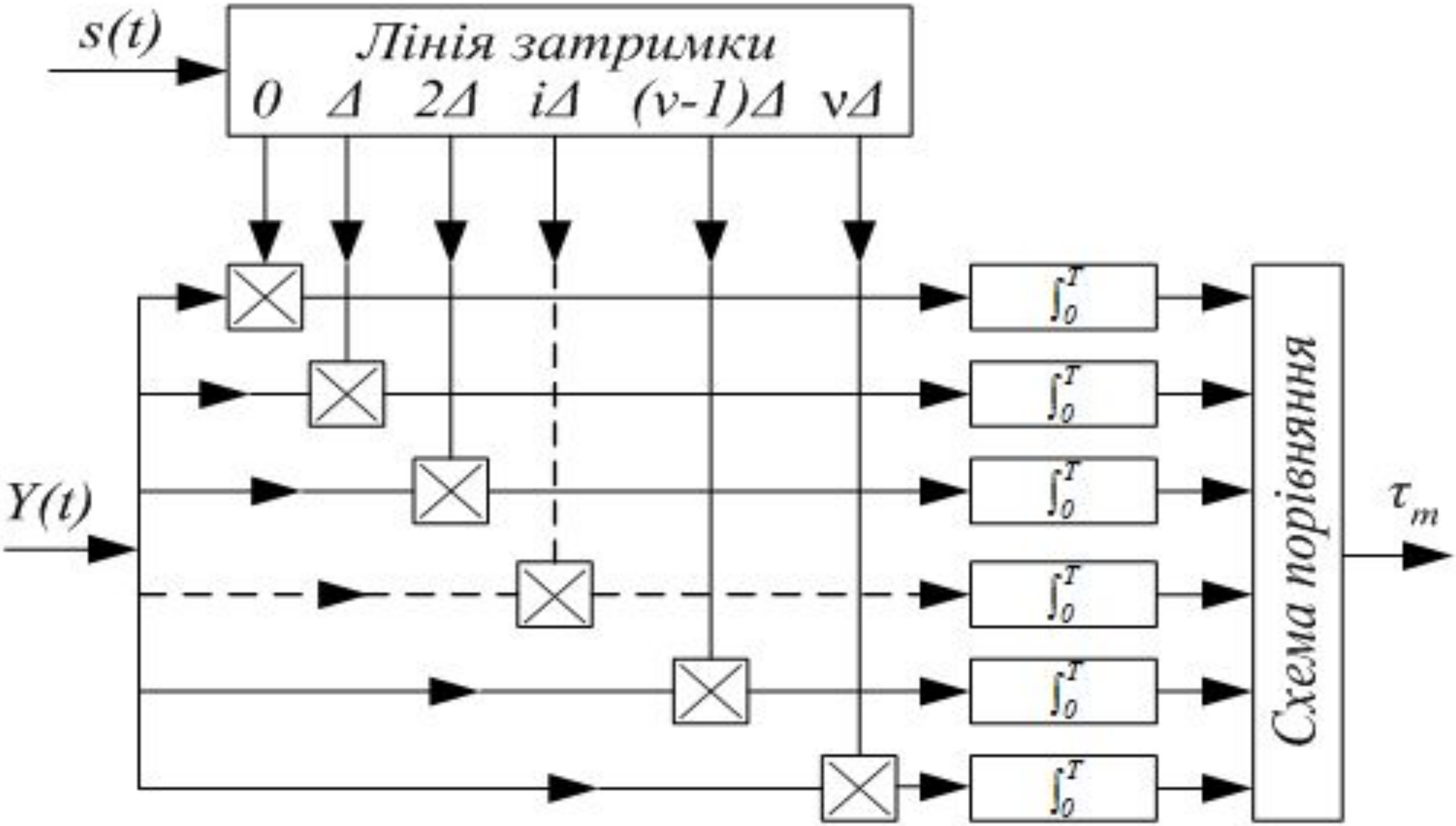
Для з'ясування характеру зміни шумової функції залежно від τ знайдемо кореляційну функцію $q_n(\tau)$. Скориставшись формулами (8.46) і (8.13), отримаємо

$$M[q_n(\tau_1)q_n(\tau_2)] = \frac{4}{N_0^2}\int_0^T\int_0^T M[n(t_1)n(t_2)]S(t_1-\tau_1)S(t_2-\tau_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T S(t-\tau_1)S(t-\tau_2)dt \qquad (8.52)$$

Порівнюючи підінтегральні вирази у формулах (8.45) і (8.52), можна зробити висновок, що вони за характером однакові. Отже, кореляційна функція для $q_n(\tau)$ за формою подібна сигнальної функції $q_s(\tau)$ і являє собою автокореляційну функцію сигналу на вході.

На практиці взаємокореляційну функцію $q(\tau)$ для декількох фіксованих значень τ можна отримати за допомогою простого кореляційного приймача (рис.).


s(t)
Лінія затримки
0
Δ
2Δ
iΔ
(ν-1)Δ
νΔ
Y(t)
Схема порівняння
τ_m