Лекция №4

Кодирование числовой информации

Вопросы лекции:

1. Кодирование информации
2. Системы счисления
3. Перевод чисел из одной системы счисления в другую
4. Арифметические операции в системах счисления
5. Формы представления чисел в памяти компьютера

Системы счисления

Система счисления (С.с.) **-** это способ записи чисел с помощью заданного набора специальных знаков (цифр).

В зависимости от способа изображения чисел **С.с.** бывают **позиционные** и **непозиционные.**

В ***непозиционной*** **С.с.** символы, обозначающие то или иное количество, не меняют своего значения в зависимости от места в изображении количества. Примером непозиционной **С.с.** может служить римская, в которой для каждого числа используется специфическое сочетание символов (XIV, CXXVII и т.п.).

В ***позиционных*** системах счисления вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число.

Исторический интерес представляет так называемая «вавилонская», или шестидесятеричная система счисления, весьма сложная, существовавшая в Древнем Вавилоне, за две тысячи лет до н.э.

Это первая известная нам система счисления, основанная на позиционном принципе. Система вавилонян сыграла большую роль в развитии математики и астрономии, ее следы сохранились до наших дней. Так, мы до сих пор делим час на 60 минут, а минуту на 60 секунд. Точно так же, следуя примеру вавилонян, окружность мы делим на 360 частей (градусов).

Системы счисления

Всякая позиционная система счисления характеризуется **основанием** – количеством различных цифр, используемых для записи чисел. В позиционных системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от её положения в числе (позиции, разряда). Количество используемых цифр называется **основанием системы счисления**.

Десятичная система счисления, которая используется в повседневной практике, использует для записи чисел десять цифр (от 0 до 9).

Так, в десятичной системе счисления, основание которой равно 10, различают 10 арабских цифр - 0, 1, 2, ..., 9.

Исторически, использование для счета десяти цифр связано с тем, что человечество училось считать на пальцах. На самом деле для представления любого числа достаточно алфавита, состоящего только из двух символов, что и реализуется, при хранении информации в памяти электронных устройств. Ячейка памяти в этом случае может находиться в одном из двух состояний, которые кодируются как 0 и 1.

Информационная емкость такой ячейки равна 1 биту.

Системы счисления

Основание позиционной системы счисления — это количество различных знаков или символов, используемых для изображения цифр в данной системе.

За основание системы можно принять любое натуральное число — два, три, четыре и т.д. Значения цифр лежат в пределах от 0 до Р-1. В общем случае запись любого смешанного числа в **сс** с основанием Р будет представлять собой ряд вида:

$$a_{m-1} P^{m-1} + a_{m-2} P^{m-2} + \ldots + a_2 P^2 + a_1 P^1 + a_0 P^0 + a_{-1} P^{-1} + a_{-2} P^{-2} + \ldots + + a_{-S} P^{-S},$$

где нижние индексы определяют местоположение цифры в числе (разряд):

положительные значения индексов - для целой части числа (m разрядов),

отрицательны значения - для дробной (s разрядов).

Пример: $777{,}77 = 7 * 100 + 7 * 10 + 7 *1 + 7 *10^{-1} + 7 * 10^{-2} =$

$= 7 * 10^2 + 7 *10^1 + + 7 *10^0 + 7 * 10^{-1} + 7 *10^{-2}.$

Системы счисления

Максимальное число, которое может быть представлено в m разрядах :

$$N= P^m - 1.$$

Минимальное значащее число (не равное 0), которое может быть представлено в s разрядах дробной части:

$$N= P^{-S}.$$

Имея в целой части m числа, а в дробной S разрядов, можно записать всего $\mathbf{P^{m+s}}$ разрядных чисел.

Системы счисления

Двоичная С.с. имеет основание P=2 и использует для представления информации всего две цифры : 0 и 1.

$101110,101 = 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = 46,625.$

Восьмеричная С.с. имеет основание P=8 и имеет алфавит, состоящий из цифр 0...7.

$$257_{(8)} = 2*8^2 + 2*8^1 + 2*8^0 = 175_{(10)}.$$

В **шестнадцатеричной С.с.** (P=16) используются цифры 0...9 и латинские буквы A...F (A- соответствует 10, B-11, C-12,D-13, E-14,F-15).

$$AF_{(16)} = 10*16^1 + F*16^0 = 175_{(10)}.$$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

При **переводе целого *десятичного* числа** в систему с основанием *q* его необходимо последовательно *делить* на *q* до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный *q-1*. Число в системе с основанием *q* записывается как последовательность остатков от деления, записанных в обратном порядке, начиная с последнего.

Пример:

$$75_{10} = 1\,001\,011_2 = 113_8 = 4B_{16}$$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

При переводе *правильной десятичной дроби* в систему счисления с основанием q необходимо сначала саму дробь, а затем дробные части всех последующих произведений последовательно *умножать* на q, отделяя после каждого умножения целую часть произведения. Число в новой системе счисления записывается как последовательность полученных целых частей произведения.

Умножение производится до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю. Это значит, что сделан точный перевод. В противном случае перевод осуществляется до заданной точности. Достаточно того количества цифр в результате, которое поместится в ячейку.

Пример: $0{,}35_{10} = 0{,}01011_{2} = 0{,}263_{8} = 0{,}59_{16}$.

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

шестнадцатеричное	3 5 0 6
двоичное	0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0
восьмеричное	3 2 4 0 6

шестнадцатеричное	B E A C
двоичное	1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0
восьмеричное	1 3 7 2 5 4

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

При переводе числа *из двоичной (восьмеричной, шестнадцатеричной) системы в десятичную* надо это число представить в виде суммы степеней основания его системы счисления.

Например:

7	6	5	4	3	2	1	0		разряды переводимого числа
1	0	1	1	1	0	1	0		переводимое число
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		степень числа 2
128	+0	+32	+16	+8	+0	+2	+0	=186	результат перевода

Арифметические операции в системах счисления

Арифметические операции с двоичными, восьмеричными и шестнадцатеричными числами осуществляются по тем же правилам, что и с десятичными числами, за исключением того, что переносы в следующие разряды производятся при достижении 2, 8 и 16, а не 10 как в десятичной системе.

Перенос	1 111	11	1
1-е слагаемое	10100110	246	A6
2-е слагаемое	00101111	57	2F
Результат	11010101	325	D5

```
×  101   (5)          ×  101   (5)          ×   101   (10)→(5)
    11   (3)             101   (5)             1010   (10)
 ------                ------                -------
   101                   101                    000
  101                   000                    101
 ------                101                    000
  1111   (15)          ------                 101
                       11001   (25)          -------
                                             110010   (50)
```

Арифметические операции в системах счисления

Сложение и вычитание двоичных чисел

Сложение (вычитание) двоичных чисел производится поразрядно с переносом (заниманием) единицы в старший (старшем) разряд (е) :

$$\begin{array}{r} 1001110100111.0110 \\ +\quad 10001011.1001 \\ \hline 1010000110010.1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11011001.011 \\ -\quad 100110.100 \\ \hline 10110010.111 \end{array}$$

Арифметические операции в системах счисления

Умножение и деление двоичных чисел

Как и в случае десятичных чисел умножение бинарных (двоичных) чисел производится путем поразрядного умножения с последующим суммированием ; положение десятичной точки определяется также аналогично.

```
      1011.10
  *    101.01
 ------------
       101110
 +      00000
      10111
     00000
    10111
 ------------
    111100.0110
```

```
 1000100110 | 11001
-  11001    |------
 ---------- | 10110
   0100101
     11001
 ----------
      11001
      11001
 ----------
          0
```

Прямой, обратный и дополнительные коды

Прямой код любого двоичного N- числа определяется следующим образом: признаком знака является наличие нуля (+) или единицы (-) в старшем разряде регистра, называемом знаковым, значащая часть числа не меняется. Например числа $X = -11011001$; $Y = 110111001$ в прямом коде имеют вид :

$$X_{пр} = 111011001 \qquad Y_{пр} = 0110111001.$$

При использовании двух последних кодов операция сложения чисел с различными знаками сводится к операции сложения при помощи обратного и дополнительного кодов, например:

$X=1996$ $\qquad Y= -54$

$$+\begin{array}{l} X_{пр} = 011111001100 \\ Y_{пр} = 100000110110 \\ \hline \end{array} \qquad +\begin{array}{l} X_{обр} = 011111001100 \\ Y_{обр} = 111111001001 \\ \hline \quad\;\; 011110010110 \end{array} \qquad +\begin{array}{l} X_{доп} = 011111001100 \\ Y_{доп} = 111111001010 \\ \hline \quad\;\; 011110010110 \end{array}$$

Прямой, обратный и дополнительные коды

Для положительного двоичного числа значения всех трех кодов совпадают; тогда как обратный код отрицательного числа получается из прямого кода путем инверсии всех его цифровых разрядов, а дополнительный - из обратного путем добавления к младшему разряду единицы.

При сложении бинарных чисел, представленных в обратном (дополнительном) коде, производится сложение всех n разрядов регистра, включая знаковый; при этом в случае возникновения переноса в знаковом разряде 1 добавляется (не добавляется) к младшему разряду обратного (дополнительного) кода. Используя обратный (дополнительный) коды легко перейти от операции вычитания к сложению:

$$Z = X - Y = X_{обр} + (-Y)_{обр}.$$

Формы представления чисел

В вычислительных машинах применяются две формы представления двоичных чисел:

- естественная форма или форма с фиксированной запятой;

- нормальная форма или форма с плавающей запятой (точкой).

С **Ф.з.** все числа изображаются в виде последовательности цифр с постоянным для всех чисел положением запятой, отделяющей целую часть от дробной.

Например , если в 10 - **С.с.** имеются 5 разрядов в целой части (до запятой) и 5 разрядов в дробной части (после запятой); числа , записанные в такую разрядную сетку, имеют вид :

+00721,35500 ; +00000,00328 ; -10301,20260.

Диапазон значащих чисел (N) в **С.с.** с основанием P при наличии *m* разрядов в целой части и *S* разрядов в дробной части (без учета знака числа) будет достаточно широк. Например при P=2, m=10, S=6 диапазон чисел простирается от 0.015 до 1024.

Формы представления чисел

В случае с **фиксированной запятой** положение точки фиксируется строго в определенном месте относительно разрядов числа, как правило, перед старшим или после младшего; в первом случае представляются числа $|N|<1$, во втором - только целые.

знак	..	р	а	з	р	я	д	ы	..	..	**. точка**
n-1	n-2		..	..	j	..	..	2	1	0	

Формы представления чисел

С **плавающей запятой** каждое число изображается в виде двух групп цифр. Первая группа называется **мантиссой** (M), вторая - **порядком** (P), причем абсолютная величина мантиссы должна быть меньше 1, а порядок - целым числом.

В общем случае представление N- числа в форме с **П.з** имеет следующий вид : $N = \pm M\ P^n$,

где P - основание **С.с.**. Приведенные выше числа в нормальной форме запишутся так :

$$+0.721355 * 10^3;$$

$$+0.328 * 10^{-3};$$

$$- 0.0103012026 * 10^5.$$

Формы представления чисел

Диапазон значащих чисел в **С.с.** с основанием Р при наличии m разрядов у мантиссы и S разрядов у порядка (без учета знаковых разрядов у мантиссы и порядка) очень широк, например при Р=2, m =10, s=6 диапазон чисел простирается от 10^{-19} до 10^{19}. Общий формат числа с плавающей запятой**:**

знак числа	п	о	р	я	д	о	к	м	а	н	т	и	с	с	а
n+k+1	n+k						n+1	n					2	1	0

Формы представления чисел

Так как под мантиссу отводится фиксированное число битов, то для получения максимальной точности используются нормализованные числа, для которых выполняется условие $P \leq |M| < 1$. Если в процессе вычисления получается ненормализованное число, оно, как правило, автоматически нормализуется : если d старших битов мантиссы нулевые, то производится ее сдвиг на d битов влево (младшие биты обнуляются) с одновременным уменьшением порядка на d единиц.

В мини- и микро-ЭВМ (в отличие от ЭВМ старших классов) представление чисел с **П.з.** имеет свои особенности : используется двоичная **С.с.** и два формата - короткий (32 бита) и длинный (64 бита) . Под порядок отводится 8 бит, а под мантиссу -23 бита (короткий) и 55 (длинный) .