Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Метод обратной матрицы рассмотрим на примере решения квадратной системы 3 порядка.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Основная матрица системы

Матрица - столбец свободных членов

Матрица - столбец неизвестных

Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений

Тогда систему можно записать так:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad A\cdot X=B$$

Найдем решение системы в матричном виде.

Предположим, что *det A* отличен от нуля и, следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.

Умножим слева матричную запись системы на обратную матрицу:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \Rightarrow\ E\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \Rightarrow\ \boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

Метод обратной матрицы применим для решения квадратных систем с невырожденной основной матрицей.

ПРИМЕР 1

Задание Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение Данная система уравнений может быть записана матричным уравнением

$$A \cdot X = B$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Выразив из этого уравнения X, получим

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-4) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 -$$

$$-1 \cdot (-4) \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -20 - 48 - 3 + 18 + 20 + 8 = -25 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти методом обратно матрицы.

Найдем обратную матрицу A^{-1} с помощью союзной матрицы. Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} к соответствующим элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10+4 = -6; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5-12) = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1+6 = 5; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-20+3) = 17;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10-9 = 1; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+12) = -10$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -16+6 = -10;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-3) = -5; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4+4 = 0.$$

Запишем союзную матрицу A^*, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 17 & 1 & -10 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее запишем обратную матрицу согласно формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$. Будем иметь:

$$A^{-1} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножая обратную матрицу A^{-1} на столбец свободных членов B, получим искомое решение исходной системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -6 + 51 - 20 \\ 7 + 3 - 10 \\ 5 - 30 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$