

Определение. $f(x)$ определена на R , на любом $[a, A] \subset R$ у неё конечное число точек разрыва,
 $\exists \int_a^A |f(x)| dx$, $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A |f(x)| dx$, $\exists \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^A |f(x)| dx$,

то есть $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$.

Тогда $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$

называется преобразованием Фурье

$$\left(\begin{aligned} &\text{здесь } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx \end{aligned} \right)$$

Если $\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Фурье $f(x)$, то

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

называется обратным преобразованием Фурье.

Лемма. $\forall f(x)$, удовлетворяющей условиям из предыдущего определения,

$$\hat{f}(\lambda) \in C(R) \text{ и } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\hat{f}(\lambda)| = 0.$$

Теорема. Пусть $f(x)$ удовлетворяет всем условиям определения из начала лекции и пусть в точке x_0

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0) \text{ и } \exists \delta > 0, \text{ что}$$

$$\exists \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|}{t} dt$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \hat{f}(x) e^{i\lambda x_0} d\lambda \right) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Следствие. Если $f(x) \in C(\mathbb{R})$ и удовлетворяет всем условиям теоремы и кроме того существует $\check{f}(x)$, то

$$\check{f}(x) \equiv f(x).$$

1. Функциональные последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Использование равномерной сходимости функциональных последовательностей для доказательства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости предела. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости для последовательностей.

2. Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость ряда. критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов. Необходимый признак Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

3. Степенные ряды. Теорема Адамара. Понятие радиуса сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара. Свойство равномерной сходимости степенного ряда внутри области сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Ряд Тейлора. Теорема Абеля о непрерывности на $(-R, R]$. Методом суммирования по Абелю, суммирование ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

4. Бесконечные произведения, понятие сходимости. Свойство неотрицательности членов произведения и поведение общего члена.

Сравнение произведения с рядом.

Абсолютно сходящееся произведение и сравнение с рядом.

5. Ряды Фурье. Ортогональность тригонометрической системы.

Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда, коэффициенты Фурье. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.

Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации Римана.

Признак Дини. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке. Достаточное условие дифференцируемости ряда

Фурье. Об интегрировании рядов Фурье. Ядро Фейера и его свойства. Суммирование ряда Фурье методом средних

арифметических (теорема Фейера). Определение

преобразования Фурье. Теорема о существовании обратного преобразования Фурье.