Определение. $f(x)$ определена на R, на любом $[a, A] \subset R$ у неё конечное число точек разрыва,

$$\exists \int_a^A |f(x)|dx\,, \exists \lim_{A\to+\infty} \int_a^A |f(x)|dx\,, \exists \lim_{a\to-\infty} \int_a^A |f(x)|dx\,,$$

то есть $\exists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$.

Тогда $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$

называется преобразованием Фурье

$$\left(\text{здесь } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \right.$$

$$\left. = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\right)$$

Если $\hat{f}(\lambda) -$ преобразование Фурье $f(x)$, то

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{i\lambda x} d\lambda$$

называется обратным преобразованием Фурье.

Лемма. $\forall f(x)$, удовлетворяющей условиям из предыдущего определения, $\hat{f}(\lambda) \in C(R)$ и $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \left|\hat{f}(\lambda)\right| = 0$.

Теорема. Пусть $f(x)$ удовлетворяет всем условиям определения из начала лекции и пусть в точке x_0 $\exists \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0)$ и $\exists \delta > 0,$ что

$$\exists \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|}{t} dt$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{A \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{i\lambda x_0} d\lambda \right) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Следствие. Если $f(x) \in C(R)$ и удовлетворяет всем условиям теоремы и кроме того существует $\check{\hat{f}}(x)$, то $\check{\hat{f}}(x) \equiv f(x)$.

1. Функциональные последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Использование равномерной сходимости функциональных последовательностей для доказательства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости предела. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости для последовательностей.

2. Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость ряда. критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов. Необходимый признак Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

3. Степенные ряды. Теорема Адамара. Понятие радиуса сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара. Свойство равномерной сходимости степенного ряда внутри области сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Ряд Тейлора. Теорема Абеля о непрерывности на $(-R, R]$. Методом суммирования по Абелю, суммирование ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}$

4. Бесконечные произведения, понятие сходимости. Свойство не отрицательности членов произведение и поведение общего члена. Сравнение произведения с рядом.
Абсолютно сходящиееся проиведение и сравнение с рядом.

5. Ряды Фурье. Ортогональность тригонометрической системы. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда, коэффициенты Фурье. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации Римана. Признак Дини. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке. Достаточное условие дифференцируемости ряда Фурье. Об интегрировании рядов Фурье. Ядро Фейера и его свойства. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических (теорема Фейера). Определение преобразования Фурье . Теорема о существовании обратного преобразования Фурье.