Системы счисления

Системы счисления (**СС**) **–** совокупность приемов и правил для записи чисел цифровыми знаками.

- Знаки бывают специальные **числовые** и обычные **алфавитные**.
- Различают два вида систем счисления (СС): позиционные и непозиционные.

Непозиционные СС – значение числа зависит от конфигурации, значение конкретной цифры постоянно и не зависит от ее расположения в записи числа.

Пример. XXXVII = 35, здесь X = 10 не зависит от положения в записи числа

Позиционные СС – значение числа зависит от позиции цифр.

Системы счисления

Позиционные СС	
Однородные	Смешанные
Для кодирования каждой позиции числа может быть использован весь набор символов	Для каждой позиции свой набор символов (часы: 11:85 показывать не могут)

Следует отличать виды и типы систем счисления от существующих систем счисления, различающихся основанием.

Виды позиционных систем счисления

- **Двоичные системы счисления** – являются основной при построении цифр ЭВМ – простота построения элемента, находящегося в одном из двух состояний: 0 и 1. Цифровые ЭВМ, начиная с их создания по настоящее время, работают с двоичной системой счисления.
- **Троичная**. На основании этой системы счисления была предпринята попытка построения принципиально иных ЭВМ, которые кодировали информацию не двумя уровнями сигнала, а тремя. Однако данные ЭВМ не получили распространения, а существовали только в виде экспериментальных образцов в силу сложности схематического

Виды позиционных систем счисления

- **Восьмеричная**. (1..7) Ранее использовалась для введения чисел и программ в ЭВМ
- **Шестнадцатеричная**. В качестве недостающих цифровых символов используют буквы латинского алфавита. (A, B, C, D, E, F). Удобна для краткой записи длинных двоичных чисел.

Виды позиционных систем счисления

- **Двоично-десятичная**. Каждый символ десятичного числа кодируется с помощью двоичной системы. Применяется для вводов информации, однако может быть использован и для арифметических действий.

- **Иные системы** счисления (8,16,10,50) используются для более наглядного представления чисел для пользователя.

Виды позиционных систем счисления

Любое число может быть представлено в виде степенного ряда

$$N = a_{m-1}P^{m-1} + a_{m-2}P^{m-2} + \ldots + a_k P^k + a_0 P^0 + a_{-1}P^{-1} + a_{-2}P^{-2} + \ldots + a_{-s}P^{-s}$$

где a_i - цифры СС, в которой записано число, $0 \le a_i \le P-1$.

Нижние индексы:

- положительные индексы для целой части числа (**m** разрядов)
- отрицательные индексы для дробной части (**s** разрядов)

Диапазоны чисел

Максимальное целое число, которое можно представить в m разрядах:

$$N_{max} = P^m - 1$$

Минимальное дробное значащее, не равное нулю число:

$$N_{min} = P^{-s}$$

Если есть m разрядов для представления целой части и s разрядов для дробной, то всего можно записать P^{m+s} разных чисел.

Количество разрядов, необходимое для записи в позиционной системе счисления с основанием q некоторого числа X, можно определить как

$$N \le P^{m+s} - 1$$

$$m + s \ge \log_P (N - 1)$$

Диапазоны чисел

Для представления числа, записанного в позиционной системе счисления с выбранным основанием q, при помощи электрических сигналов необходимо иметь некоторое электронное устройство, формирующее на выходе q различных электрических сигналов, которые достаточно легко отличить друг от друга (закодировать выходное число). Необходимое число этих устройств должно равняться числу разрядов целой и дробной частей записываемого числа.

Чем больше q, тем меньше понадобиться таких устройств, но эти устройства будут сложнее, т.к. должны формировать многоуровневый выходной сигнал. Это усложняет идентификацию выходного сигнала, повышает вероятность ошибок при воздействии внешних помех и усложняет устройство.

Критерием выбора q в данном случае является минимизация аппаратных затрат при обеспечении достаточной помехоустойчивости. Математическое решение поставленной задачи показало, что оптимальной является система счисления с основанием q = e = 2.71

Диапазоны чисел

В качестве наиболее простого определения оптимальности системы счисления можно взять произведение числа разрядов L на число значений в каждом разряде S. Тогда количество чисел, которые можно записать в виде L-разрядного вектора по S значений в каждом разряде равно $N = S^L$. Сложность определяется тогда произведением $C = LS$. Имеем, $ln(N) = L \cdot ln(S)$, откуда $C = S \cdot \frac{ln(N)}{ln(S)}$. Дифференцируя, получим

$$\dot{C} = \frac{ln(N) \cdot ln(S) - ln(N)}{ln(S)^2}$$

откуда $ln(S) = 1$ или $S = e$.

Арифметические действия в двоичной системе счисления

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+0=1$

$1+1=10$

$$
\begin{array}{r}
1010_2 \\
* \quad 101 \\
\hline
1010 \\
+ \quad 0000 \\
1010 \\
\hline
110010
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1010 & 101 \\
\cline{2-2}
-\ 101 & 10 \\
\cline{1-1}
00 &
\end{array}
$$

Перевод из одной системы счисления в другую

- Табличный метод используется для преобразования чисел, заданных в системах счисления, основания которых кратно двум

Пример: перевести число 113_{10} в двоичную СС.

10^2	10^1	10^0
1100100	1010	0001

$1 \cdot 1100100 + 1 \cdot 1010 + 0011 \cdot 0001 = 11100012$

$C3_{16} = 1100\ 0011_2 = 011\ 000\ 011_{2\,(\text{байт})} = 303_8$

Из 16 в 8 или из 8 в 16 только этим способом!!!

10	2
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000

$\underline{110}\underline{111}_2 = 67_8$ $\underline{0011}\underline{0111}_2 = 37_{16}$

$67_8 \rightarrow 37_{16}$

Перевод из одной системы счисления в другую

- Использующий вес разрядов

Метод, использующий вес разряда – основан на представлении числа в виде степенного ряда.

$$101110 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 14 = 46$$

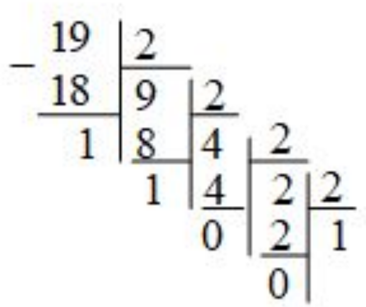
Арифметические операции для получения суммы степенного ряда выполняются в той системе счисления, в которую производится преобразование.

Перевод из одной системы счисления в другую

- Метод деления перевод чисел из одной системы счисления в другую с произвольными основаниями

Метод преобразования чисел из 10-чной системы счисления в систему с произвольными основаниями.

Метод деления столбиком.

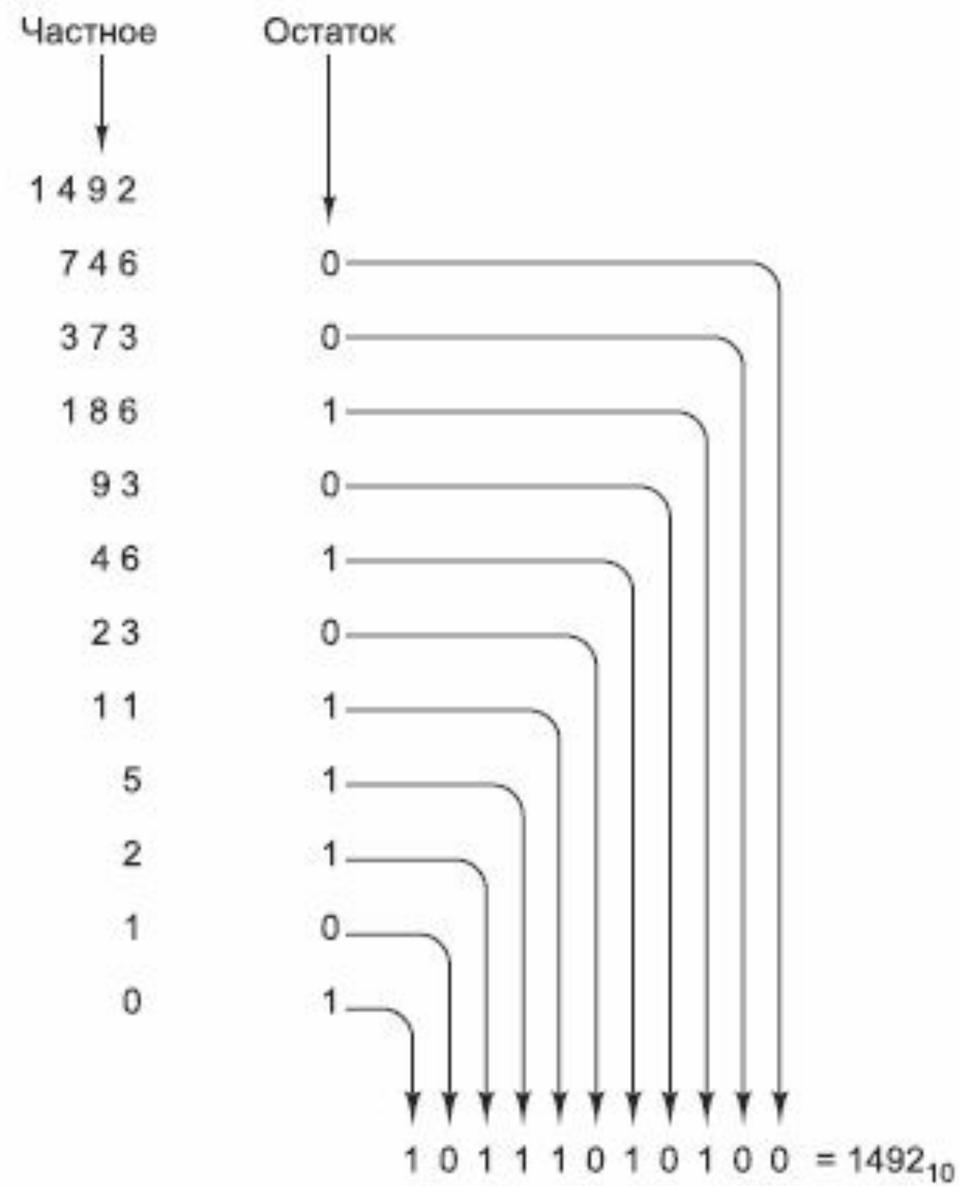


$19_{10} = 10011_2$

Деление продолжается до тех пор, пока не получится число меньше основания. Записываем преобразованное число, начиная с конца.

Перевод из одной системы счисления в другую

- Метод деления перевод чисел из одной системы счисления в другую с произвольными основаниями



Перевод из одной системы счисления в другую

- Метод деления перевод чисел из одной системы счисления в другую с произвольными основаниями

Перевести 98_{10} в двоичную СС.

$98 : 2 = 49 \quad 0 = b_0$

$49 : 2 = 24 \quad 1 = b_1$

$24 : 2 = 12 \quad 0 = b_2$

$2 : 2 = 6 \quad 0 = b_3$

$6 : 2 = 3 \quad 0 = b_4$

$3 : 2 = 1 \quad 1 = b_5$

$1 = b_6$

Деление прекращают, когда остаток будет меньше основания новой СС.

$98_{10} = 1100010_2$

Перевод дробных чисел

- Умножаем на основание СС, если получается целая часть числа, мы ее используем, оставшуюся дробную часть без целой продолжаем умножать. Умножение производиться до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю, или не будет получена требуемая точность.
- Умножению подлежит только дробная часть. Единицы переполнения в умножении не участвуют. Они образуют результат, который читается сверху вниз.

Пример:

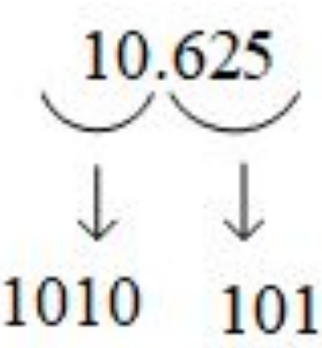
$0,625_{10}$

$$0.625 * 2 = 1.250 \qquad 0.250 * 2 = 0.500 \qquad 0.500 * 2 = 1.000$$

Перевод дробных чисел

- **Смешанные числа** преобразуются: целая часть своим способом, дробную своим.

Пример:



Перевод дробных чисел

- **Алгоритм использования методов перевода чисел из одной системы**

(

Для того, чтобы преобразовать число из системы счисления с основанием А в системы счисления с основанием В, возможны следующие 3 варианта:

1) Когда А и В –степени числа 2, используется табличный метод (перевод чисел через двоичную систему)

$A = 2^x$

$B = 2^y$

2) Если $A < B$, то используется метод, опирающийся на вес разряда.

3) Если $A > B$ используется метод, основанный на делении для целой части числа, дробные числа преобразуются умножением.

BCD-код или двоично-десятичный код

Часто используется в системах передачи данных, например, от клавиатуры. В этом коде каждый разряд десятичного числа представляется двоичной тетрадой.

a) тетрады (упакованный BCD код) - поле из 4 двоичных разрядов

b) в виде байта (неупакованный код)

a) $123_{10}= 0001\ 0010\ 0011_{2\text{-}10}$

b) $123_{10} = 00000001\ 00000010\ 00000011_{2\text{-}10}$

Двоично-десятичный код (*binary-coded decimal*), **BCD**, 8421-BCD — форма записи целых чисел, когда каждый десятичный разряд числа записывается в виде его четырёхбитного двоичного кода.

Например, десятичное число 311_{10} будет записано в двоичной системе счисления в двоичном коде как $1\ 0011\ 0111_2$, а в двоично-десятичном коде как $0011\ 0001\ 0001_{BCD}$.

BCD-код или двоично-десятичный код

Преимущества

1. Упрощён вывод чисел на индикацию — вместо последовательного деления на 10 требуется просто вывести на индикацию каждый полубайт. Аналогично, проще ввод данных с цифровой клавиатуры.
2. Для дробных чисел (как с фиксированной, так и с плавающей запятой) при переводе в человеко-читаемый десятичный формат и наоборот не теряется точность.
3. Упрощены умножение и деление на 10, а также округление.

По этим причинам двоично-десятичный формат применяется в калькуляторах — калькулятор в простейших арифметических операциях должен выводить в точности такой же результат, какой подсчитает человек на бумаге.

BCD-код или двоично-десятичный код

Недостатки

1. Требует больше памяти.
2. Усложнены арифметические операции. Так как в 8421-BCD используются только 10 возможных комбинаций 4-х битового поля вместо 16, существуют запрещённые комбинации битов: 1010(1010), 1011(1110), 1100(1210), 1101(1310), 1110(1410) и 1111(1510).

BCD-код или двоично-десятичный код

При сложении и вычитании чисел формата 8421-BCD действуют правила:

1. При сложении двоично-десятичных чисел каждый раз, когда происходит перенос бита в старший полубайт, необходимо к полубайту, от которого произошёл перенос, добавить корректирующее значение 0110 (= 6_{10} = 16_{10} — 10_{10}: разница количеств комбинаций полубайта и используемых значений).
2. При сложении двоично-десятичных чисел каждый раз, когда встречается недопустимая для полубайта комбинация, необходимо к каждой недопустимой комбинации добавить корректирующее значение 0110 с разрешением переноса в старшие полубайты.
3. При вычитании двоично-десятичных чисел, для каждого полубайта, получившего заём из старшего полубайта, необходимо провести коррекцию, отняв значение 0110.

BCD-код или двоично-десятичный код

Пример операции сложения двоично-десятичных чисел:

Требуется: Найти число A = D + C, где D = 3927, C = 4856

Решение: Представим числа D и C в двоично-десятичной форме:

$D = 3927_{10} = 0011\ 1001\ 0010\ 0111_{BCD}$

$C = 4856_{10} = 0100\ 1000\ 0101\ 0110_{BCD}$

Суммируем числа D и C по правилам двоичной арифметики:

```
        *         **
  0011 1001 0010 0111
+ 0100 1000 0101 0110
 ____________________
= 1000 0001 0111 1101 - Двоичная сумма
+      0110      0110 - Коррекция
 ____________________
  1000 0111 1000 0011
```

'*' — тетрада, из которой был перенос в старшую тетраду

'**' — тетрада с запрещённой комбинацией битов

В тетраду, помеченную символом *, добавляем шестёрку, так как по правилам двоичной арифметики перенос унёс с собой 16, а по правилам десятичной арифметики должен был унести 10.

В тетраду, помеченную символом **, добавляем шестёрку и разрешаем распространение переноса, так как комбинация битов 1101 (что соответствует десятичному числу 13) является запрещённой.