Задача коммивояжёра:

Имеется p городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжёр должен посетить все p городов по одному разу, вернувшись в тот, с которого начал. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Метод ветвей и границ

Граф $G = (V,E)$ – полный и задан матрицей весов.

Будем считать, что матрица весов необязательно симметрична, как это имеет место для неориентированных графов, иначе говоря, граф является ориентированным и взвешенным, то есть сетью.

Представим процесс построения маршрута в виде построения двоичного корневого дерева решений, в котором каждому узлу x соответствует некоторое подмножество M(x) множества всех маршрутов.

Корню поставлено в соответствие множество всех маршрутов.

Пусть x – некоторый узел дерева. Выберем дугу (v, w), которая входит хотя бы в один маршрут из M(x).

Тогда M(x) разбивается на 2 непересекающихся множества, в одно из которых можно отнести все маршруты, содержащие дугу (v, w), а в другое – не содержащие её.

Будем считать, что первое подмножество соответствует левому сыну узла x, а второе – правому. Получаем в общих чертах **правило ветвления**.

Узел дерева решений, для которого строятся сыновья называется **активным**.

Главное достоинство метода ветвей и границ в сравнении с полным перебором заключается в том, что активными являются лишь те узлы, в которых может содержаться оптимальный маршрут.

Правило активизации узлов, которое сводится к **правилу подсчёта границ**.

Предположим, что для узлов дерева решений вычислено значение f(x) такое, что вес любого маршрута из множества M(x) не меньше, чем f(x). Такое число называется **нижней границей** или границей узла x.

Правило активизации узлов:

из множества узлов, не имеющих сыновей, в качестве активного выбирается узел с наименьшей нижней границей.

Дерево решений прирастает за счёт сыновей активного узла.

Узел, для которого построены оба сына, активным стать в дальнейшем не может.

Процесс построения дерева решений продолжается до тех пор, пока активным не будет объявлен узел, для которого множество M(x) состоит из одного маршрута, а границы всех других узлов не меньше чем вес этого маршрута.

Процедуру вычитания из каждого элемента строки (соответственно столбца) минимального элемента этой же строки (столбца) называют **редукцией**.

Процедуру, которая сначала осуществляет редукцию каждой строки, а затем по изменённой матрице редукцию всех столбцов, называют **редукцией матрицы**, а саму матрицу – **редуцированной**.

При этом в каждой строке и каждом столбце имеется хотя бы один нулевой элемент.

F – сумма всех констант, использованных при редукции. Тогда f является нижней границей всех маршрутов коммивояжёра для исходной нередуцированной матрицы весов. Получили **правило вычисления нижней границы корневого узла дерева решений.**

Правило построения нижней границы для каждого узла аналогично.

Раскраска графов

Подмножество вершин графа называется **независимым**, если никакие вершины из этого подмножества не смежны.

Во многих приложениях рассматриваются разбиения вершин на независимые подмножества.

Такие разбиения удобно описывать следующим образом.

Вершинной раскраской (далее - просто раскраской) графа называется отображение множества вершин графа на конечное множество цветов;

n-раскраска графа - раскраска с использованием n цветов.

Раскраска называется **правильной**, если никакие две вершины одного цвета не смежны.

Очевидно, что для графа без петель всегда существует правильная раскраска в |V| цветов.

Хроматическим числом графа G называется минимальное число n=χ(G), такое, что существует правильная n-раскраска.

Лемма 1. В любом планарном графе без петель и кратных ребер существует вершина степени не более пяти.

Теорема о пяти красках:

Каждый планарный граф без петель и кратных ребер является не более чем 5-хроматическим.

<u>Доказательство:</u> (индукцией по числу вершин).

При $p=1$ утверждение теоремы верно. Допустим, что утверждение верно для всех $p<p_0$. Докажем, что тогда оно верно и для p_0.

Рассмотрим планарный граф G без петель и кратных ребер с p_0 вершинами; по лемме 1 в нем есть вершина v_0 степени не более 5.

По предположению индукции граф G', получаемый удалением из G вершины v_0 (очевидно, также планарный), может быть раскрашен не более, чем в 5 цветов.

Пусть $v_1 \ldots v_k$, $k=\deg(v_0)$ - все вершины-соседи вершины v_0, расположенные по часовой стрелке относительно v_0.

Если в раскраске вершин $v_1 \ldots v_k$ используется не более 4-х цветов, то "покрасим" вершину v_0 в оставшийся 5-й цвет и получим правильную раскраску.

Осталось рассмотреть случай, когда в раскраске вершин $v_1 \ldots v_k$ в графе G' используется 5 цветов (k=5).

Пусть c_i - цвет вершины v_i (i=1..5). Рассмотрим множество A, состоящее из вершины v_1 и всех вершин графа G, исключая v_0, в которые можно дойти из v_1 только по вершинам цветов c_1 и c_3.

Возможны два случая:

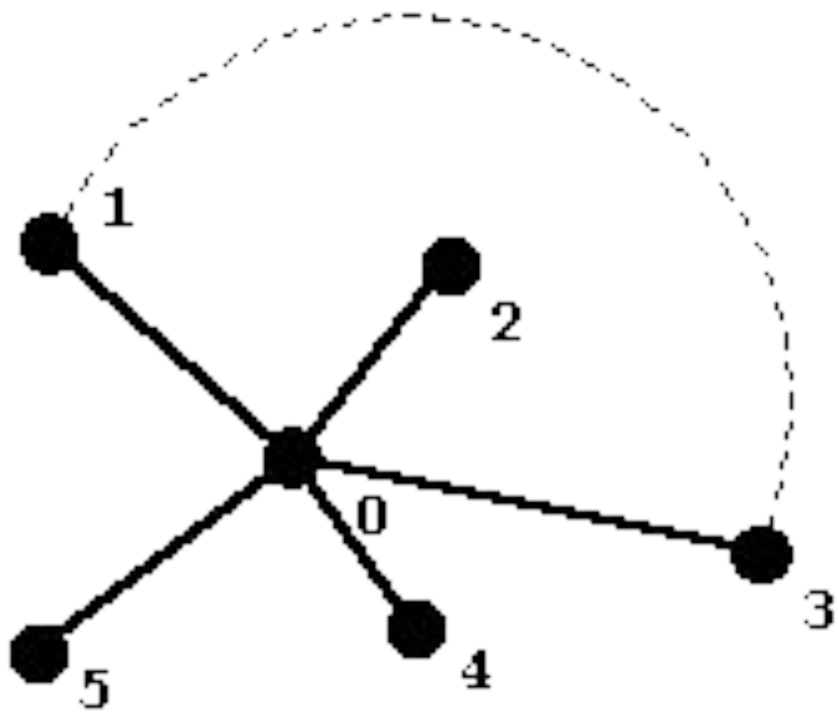
1. $v_3 \notin A$;
2. $v_3 \in A$.

В первом случае поменяем цвета вершин множества A ($c_1 \leftrightarrow c_3$); окраска при этом останется правильной.

Действительно, множество A состоит по определению из *всех* вершин цветов c_1 и c_3, в которые можно дойти из v_1, поэтому среди вершин, смежных вершинам, принадлежащим A, нет вершин цветов c_1 или c_3.

После замены цветов вершин множества A вершина v_1 получит цвет c_3, следовательно, можно использовать цвет c_1 для "окраски" вершины v_0 и получить таким образом правильную раскраску графа G.

Остается второй случай. Из принадлежности вершины v_3 множеству A следует, что существует путь из v_1 в v_3 ($v_1 S v_3$), проходящий только по вершинам цветов c_1 и c_3



Рассмотрим цикл $L=v_1Sv_3(v_3,v_0)v_0(v_0,v_1)v_1$ и замкнутую кривую, которая соответствует этому циклу в геометрической реализации графа.

Вершина v_2 находится внутри этой замкнутой кривой, а v_4 - снаружи. Это следует из того, что линии, соответствующие ребрам графа в его геометрической реализации, не могут пересекаться (не считая концов).

Определим множество B, состоящее из вершины v_2 и всех вершин графа G, исключая v_0, в которые можно дойти из v_2 только по вершинам цветов c_2 и c_4.

Вершина v_4 не принадлежит B, поскольку любой путь из v_2 в v_4 должен проходить, по крайней мере, через одну вершину, принадлежащую циклу L - т.е. либо через вершину v_0, либо через вершину, окрашенную в цвета c_1 или c_3.

Следовательно, как и в первом случае, можно поменять цвета вершин множества B ($c_2 \leftrightarrow c_4$) и "покрасить" v_0 в c_2. ♦

Теорема о четырех красках.

Каждый планарный граф без петель и кратных ребер является не более чем 4-хроматическим.

Проблема четырех красок оставалась нерешенной в течение многих лет. Утверждается, что эта теорема была доказана с помощью хитроумных рассуждений и компьютерной программы в 1976 году .

Алгоритм раскраски графа

1. Найти число связей всех вершин графа.
2. Рассматривать вершины в порядке не возрастания числа связей.
3. Начинаем раскрашивание в очередной цвет.

   Последовательно перебираем вершины и, если рассматриваемая вершина не раскрашена, а также не имеет связей с вершинами раскрашенными в этот цвет, то красим её в этот цвет.

4. Если все вершины просмотрены, но не раскрашены, то повторяем пункт 3, с цветом на единицу больше, пока все вершины не раскрашены. Число цветов это и есть хроматическое число.